

DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.201907035



# 形式背景的下近似协调与粒协调的关系

陈东晓<sup>1</sup>, 李进金<sup>1,2</sup>

(1. 华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021;  
2. 闽南师范大学 数学科学与统计学院, 福建 漳州 363000)

**摘要:** 在形式背景中引入上、下近似算子和上、下近似协调集引入证据理论的信任函数与似然函数, 讨论它们与上、下近似协调集的关系, 进而得到决策形式背景的下近似协调与粒协调是等价的。  
**关键词:** 形式背景; 近似算子; 近似协调集; 粒协调  
**中图分类号:** TP 18      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1000-5013(2020)01-0130-07

## Relationships Between Lower Approximation Consistent and Granular Consistent in Formal Contexts

CHEN Dongxiao<sup>1</sup>, LI Jinjin<sup>1,2</sup>

(1. School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China;  
2. School of Mathematical Sciences and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou 363000, China)

**Abstract:** In this paper, the upper and lower approximation operators and the upper and lower approximation consistent sets are introduced into formal context. The belief and plausibility functions from the evidence theory are employed to characterize upper and lower approximation consistent sets. Then the equivalence between lower approximation consistent and granular consistent of decision formal context is obtained.  
**Keywords:** formal context; approximation operators; approximation consistent set; granular consistent

形式概念分析(FCA)是由德国数学家 Wille<sup>[1]</sup>提出的一种分析数据的有效工具,它的核心是形式背景和概念格.形式背景是由对象集、属性集以及对象和属性之间的二元关系构成的.而概念格是将形式背景里的对象子集和属性子集以一种概念层次体现出来.近年来,形式概念分析已被广泛应用于概念认知、知识提取等领域.形式背景是形式概念分析中数据的组织形式,由对象集、属性集与两者之间的一个二元关系组成.形式背景中有 3 种基本的模态逻辑算子,即充分性算子、必要性算子和可能性算子<sup>[2]</sup>.Wille 利用充分性算子,建立起对象幂集和属性幂集间的一个伽罗瓦连接,给出了形式概念的定义.一个形式背景中,所有形式概念构成一个完备格,称为概念格.因此,形式概念分析也被称为概念格理论.必要性算子和可能性算子分别就是粗糙集理论<sup>[3]</sup>中的下近似算子和上近似算子.利用上、下近似算子,Yao<sup>[4]</sup>给出了对象定向概念格的定义,Gediga 等<sup>[2]</sup>定义了属性定向概念.通过对照形式概念的研究,对象定向概念格和属性定向概念格也取得了许多研究结果. Shao 等<sup>[5]</sup>研究了对应的属性约简问题,给出了约简的算法.形式背景上的模态逻辑算子在一定意义下可以相互转换,这为概念格理论与粗糙集理论之间建立起“沟通”的桥梁.因此,在形式背景中,粗糙集理论与概念格理论具有非常密切的联系.形式背景中粗糙集近似本质上是广义近似空间中的粗糙运算,它的一个特点是近似集和被近似集不在同一论

域. 粗糙集理论的一个主要应用是提取决策规则, 它要求近似集和被近似集必须在同一论域. 为了在形式背景中利用粗糙集方法导出决策规则, Li 等<sup>[6-7]</sup>在形式背景中给出了几种修正的粗糙近似, 针对其中一种粗糙近似运算研究了基于决策规则的属性约简问题. Dempster-Shafer 证据理论以基本概率分配为基础, 利用信任函数和似然函数构成的不确定区间刻画证据的不确定性和未知性. 集合的信任测度和似然测度可以看成是对该集合的不确定性的定量刻画, 而同一集合的上近似和下近似可以看成是对该集合所表示信息的定性描述, 那么证据理论与粗糙集理论之间存在必然的联系<sup>[8-10]</sup>. 文献[11-17]研究了利用证据理论刻画信息系统、决策信息系统中的属性约简问题, 文献[18-22]分别通过建立一对覆盖近似算子与信任函数、似然函数的联系以讨论覆盖决策信息系统的约简. 在形式背景中, 概念格理论与粗糙近似理论之间有着密切关系<sup>[23]</sup>, 同样可以利用证据理论刻画形式背景的属性约简问题. 本文给出形式背景下的一种粗糙近似集定义, 通过定义信任函数和似然函数, 给出下近似协调集的等价结论, 讨论了下近似协调集的约简, 定义了上、下近似核心属性, 并给出充要条件. 最后, 定义了下近似协调的决策形式背景, 并得到决策形式背景的下近似协调与粒协调是等价的.

## 1 基本概念和定理

**定义 1**<sup>[1,24]</sup> 形式背景  $(U, A, I)$ , 其中,  $U$  为对象集,  $A$  为属性集,  $I$  为  $U$  与  $A$  之间的二元关系,  $(x, a) \in I$ , 表示对象  $x$  具有属性  $a$ , 也记为  $xIa$ .

设  $X \subseteq U, B \subseteq A$ , 定义在形式背景  $(U, A, I)$  上的算子, 即

$$X^* = \{a \in A \mid \forall x \in X, xIa\}, \quad B^* = \{x \in U \mid \forall a \in B, xIa\}.$$

特别地, 对于任意  $x \in X$ , 记  $\{x\}^* = x^*$ , 对任意  $a \in B$ , 记  $\{a\}^* = a^*$ , 因而有  $X^* = \{a \in A \mid X \subseteq a^*\} = \bigcap_{x \in X} x^*, B^* = \{x \in U \mid B \subseteq x^*\} = \bigcap_{a \in B} a^*$ . 称  $(X, B)$  为形式背景  $(U, A, I)$  上的一个形式概念 (简称概念), 其中,  $X^* = B, B^* = X$ , 称  $X$  为概念的外延,  $B$  为概念的内涵. 所有的概念构成的集合叫做一个概念格, 记为  $L(U, A, I)$ , 记外延全体  $L_U(U, A, I) = \{X \mid (X, B) \in L(U, A, I)\}$ , 内涵全体  $L_A(U, A, I) = \{B \mid (X, B) \in L(U, A, I)\}$ .

**命题 1**<sup>[24]</sup> 设  $(U, A, I)$  为一个形式背景,  $\forall x \in U, a \in A$ , 则有  $x^{**} = (x)_A = \bigcap \{X \mid x \in X, X \in L_U(U, A, I)\}, a^{**} = (a)_U = \bigcap \{B \mid a \in B, B \in L_A(U, A, I)\}$ .

**命题 2**<sup>[24]</sup> 设  $(U, A, I)$  为一个形式背景,  $\forall X \in L_U(U, A, I), B \in L_A(U, A, I)$ , 则  $X = \bigcup_{x \in X} x^{**}, B = \bigcup_{a \in B} a^{**}$ .

利用粗糙集理论中的上、下近似算子的定义, 引入定义 2.

**定义 2** 设  $(U, A, I)$  为一个形式背景,  $\forall X \subseteq U, X$  的上近似和下近似定义为下近似  $\underline{R}(X) = \{x \in U \mid x^{**} \subseteq X\}$ , 上近似  $\bar{R}(X) = \{x \in U \mid x^{**} \cap X \neq \emptyset\}$ . 集合  $BN(X) = \bar{R}(X) - \underline{R}(X)$  称为  $X$  的边界.

根据定义 2 有如下结论.

**定理 1** 设  $(U, A, I)$  为一个形式背景,  $\forall X \subseteq U, Y \subseteq U$ , 则有如下结论:

- 1)  $\underline{R}(\emptyset) = \emptyset, \underline{R}(U) = U, \bar{R}(\emptyset) = \emptyset, \bar{R}(U) = U$ ;
- 2)  $\underline{R}(X) \subseteq X \subseteq \bar{R}(X)$ ;
- 3)  $\underline{R}(X \cap Y) = \underline{R}(X) \cap \underline{R}(Y), \bar{R}(X \cup Y) = \bar{R}(X) \cup \bar{R}(Y)$ ;
- 4)  $\underline{R}(X \cup Y) \supseteq \underline{R}(X) \cup \underline{R}(Y), \bar{R}(X \cap Y) \subseteq \bar{R}(X) \cap \bar{R}(Y)$ ;
- 5)  $\underline{R}(\sim X) = \sim \bar{R}(X), \bar{R}(\sim X) = \sim \underline{R}(X)$ ;
- 6)  $\underline{R}(\underline{R}(X)) = \underline{R}(X), \bar{R}(\bar{R}(X)) = \bar{R}(X)$ .

证明: 容易直接根据定义 2 证得.

$\forall B \subseteq A$ , 定义  $X^{*B} = \{a \in B \mid \forall x \in X, xIa\}, C^{*B} = \{x \in U \mid \forall a \in C, xIa\}$ , 其中,  $X \subseteq U, C \subseteq B$ , 容易得到  $X^{*B} = X^* \cap B$ , 且有  $X^{*A} = X^*$ .

**命题 3**<sup>[3]</sup> 设  $(U, A, I)$  为一个形式背景,  $C \subseteq B \subseteq A$ , 则  $\forall X \subseteq U, \forall x \in U$ , 有

- 1)  $X^{*C} \subseteq X^{*B} \subseteq X^{*A}, x^{*C} \subseteq x^{*B} \subseteq x^{*A}$ ;
- 2)  $X^{*A} \cap A \subseteq X^{*B} \cap B \subseteq X^{*C} \cap C, x^{*A} \cap A \subseteq x^{*B} \cap B \subseteq x^{*C} \cap C$ ;

3)  $C^{*B} = C^{*A}$ .

定义  $\underline{R}_B(X) = \{x \in U \mid x^{*B^*B} \subseteq X\}$ ,  $\bar{R}_B(X) = \{x \in U \mid x^{*B^*B} \cap X \neq \emptyset\}$ , 由命题 3 有如下结论.

**定理 2** 设  $(U, A, I)$  为一个形式背景,  $\forall X \subseteq U, \forall B \subseteq A$ , 有  $\underline{R}_B(X) \subseteq \underline{R}_A(X), \bar{R}_A(X) \subseteq \bar{R}_B(X)$ .

证明: 由于  $\forall x \in X, x^{*A^*A} \subseteq x^{*B^*B}, \forall x \in \underline{R}_B(X)$ , 有  $x^{*B^*B} \subseteq X$ , 所以  $x^{*A^*A} \subseteq X, x \in \underline{R}_A(X)$ , 即  $\underline{R}_B(X) \subseteq \underline{R}_A(X)$ .  $\forall x \in \bar{R}_A(X)$ , 有  $x^{*A^*A} \cap X \neq \emptyset$ , 故  $x^{*B^*B} \cap X \neq \emptyset, x \in \bar{R}_B(X)$ , 即  $\bar{R}_A(X) \subseteq \bar{R}_B(X)$ .

**定理 3** 设  $(U, A, I)$  为一个形式背景,  $\forall X \subseteq U$ , 则  $\underline{R}(X) = \bigcup_{x \in \underline{R}(X)} x^{**}$  且  $\sim \bar{R}(X) = \underline{R}(\sim X) =$

$\bigcup_{x \in \underline{R}(\sim X)} x^{**}$ . 若  $X \in L_U(U, A, I)$ , 则有  $\underline{R}(X) = X$ .

证明: 对于  $\forall X \subseteq U$ , 显然有  $\underline{R}(X) \subseteq \bigcup_{x \in \underline{R}(X)} x^{**}$ .  $\forall x \in \underline{R}(X), \forall y \in x^{**}$ , 则有  $y^{**} \subseteq x^{**} \subseteq X$ , 因此  $y \in \underline{R}(X)$ , 进而  $x^{**} \subseteq \underline{R}(X), \bigcup_{x \in \underline{R}(X)} x^{**} \subseteq \underline{R}(X)$ , 于是有  $\underline{R}(X) = \bigcup_{x \in \underline{R}(X)} x^{**}$ . 根据定理 1, 易得  $\sim \bar{R}(X) = \underline{R}(\sim X) = \bigcup_{x \in \underline{R}(\sim X)} x^{**}$ .

由命题 2 可知,  $X \in L_U(U, A, I)$ , 则有  $X = \bigcup_{x \in X} x^{**}$ , 故  $\forall x \in X, x^{**} \subseteq X$ , 即有  $x \in \underline{R}(X)$ , 所以  $X \in \underline{R}(X)$ . 由定理 1 可知,  $\underline{R}(X) \subseteq X$ , 故有  $\underline{R}(X) = X$ .

2 形式背景的上、下近似协调集

**定义 3**<sup>[8-9]</sup> 设  $U$  是非空论域, 集值函数  $m: P(U) \rightarrow [0, 1]$  称为 mass 函数, 如果它满足如下性质: 1)  $m(\emptyset) = 0$ ; 2)  $m(X) \geq 0, \forall X \subseteq U$ ; 3)  $\sum_{X \subseteq U} m(X) = 1$ .

若  $m(X) > 0$ , 称  $X$  是  $m$  的焦元, 记  $M = \{X \subseteq U \mid m(X) > 0\}$ , 序对  $(M, m)$  为  $U$  上的一个信任结构.

**定义 4**<sup>[8-9]</sup> 设  $(M, m)$  称为  $U$  上的一个信任结构, 集函数  $\text{Bel}: P(U) \rightarrow [0, 1]$  称为  $U$  上的信任函数,  $\text{Bel}(X) = \sum_{Y \subseteq X} m(Y), \forall X \subseteq U$ . 集函数  $\text{Pl}: P(U) \rightarrow [0, 1]$  称为  $U$  上的似然函数,  $\text{Pl}(X) = \sum_{Y \cap X \neq \emptyset} m(Y), \forall X \subseteq U$ .

同一信任结构导出的信任函数和似然函数对偶, 即  $\text{Pl}(X) = 1 - \text{Bel}(\sim X)$ , 且  $\text{Bel}(X) \leq \text{Pl}(X)$ .

粗糙集理论和 Dempster-Shafer 证据理论之间有很强的联系. 以下定理 4 表明, 经典的信念和似然函数可以用 Pawlaks 集合的上、下近似来表示.

**定理 4** 假设  $(U, A, I)$  为一个形式背景,  $\forall X \subseteq U$ , 记  $\text{Bel}_A(X) = P(\underline{R}_A(X)) = \frac{|R_A(X)|}{|U|}, \text{Pl}_A(X) = P(\bar{R}_A(X)) = \frac{|\bar{R}_A(X)|}{|U|}$ , 则  $\text{Bel}_A(X), \text{Pl}_A(X)$  是  $U$  上一对对偶的信任函数与似然函数, 其对应的 mass 函数为  $m(Y) = P(j(Y)) = \frac{|j(Y)|}{|U|}$ , 其中,  $j(Y) = \{y \in U \mid y^{**} = Y\}$ .

证明:  $\text{Bel}_A(X) = P(\underline{R}_A(X)) = \frac{|R_A(X)|}{|U|} = \frac{1}{|U|} |\{x \in U \mid x^{**} \subseteq X\}| = \frac{1}{|U|} \sum_{x^{**} \subseteq X} |x| = \frac{1}{|U|} \times \sum_{x^{**} \subseteq X} |j(x^{**})| = \sum_{x^{**} \subseteq X} \frac{|j(x^{**})|}{|U|} = \sum_{Y \subseteq X} \frac{|j(Y)|}{|U|} = \sum_{Y \subseteq X} m(Y)$ .

**定义 5** 设  $(U, A, I)$  为一个形式背景,  $B \subseteq A$ , 若  $\forall X \in L_U(U, A, I)$ , 都有  $\underline{R}_A(X) = \underline{R}_B(X)$ , 则称  $B$  是下近似协调集, 若  $B$  的所有真子集都不是下近似协调集, 则称  $B$  是下近似约简集; 若  $\forall X \in L_U(U, A, I)$ , 都有  $\bar{R}_A(X) = \bar{R}_B(X)$ , 则称  $B$  是上近似协调集, 若  $B$  的所有真子集都不是上近似协调集, 则称  $B$  是上近似约简集.

**定理 5** 设  $(U, A, I)$  为一个形式背景,  $B \subseteq A$ , 则  $B$  为下近似协调集当且仅当  $\sum_{X \in L_U(U, A, I)} \text{Bel}_B(X) = \sum_{X \in L_U(U, A, I)} \text{Bel}_A(X)$ .  $B$  为下近似约简集当且仅当  $\sum_{X \in L_U(U, A, I)} \text{Bel}_B(X) = \sum_{X \in L_U(U, A, I)} \text{Bel}_A(X)$ , 且  $\forall C \subset B$ , 有  $\sum_{X \in L_U(U, A, I)} \text{Bel}_B(X) > \sum_{X \in L_U(U, A, I)} \text{Bel}_C(X)$ .

证明: 已知  $B \subseteq A$  为下近似协调集, 即  $\forall X \in L_U(U, A, I), \underline{R}_A(X) = \underline{R}_B(X)$ , 则  $\sum_{X \in L_U(U, A, I)} Bel_B(X) = \sum_{X \in L_U(U, A, I)} \frac{|\underline{R}_B(X)|}{|U|} = \sum_{X \in L_U(U, A, I)} \frac{|\underline{R}_A(X)|}{|U|} = \sum_{X \in L_U(U, A, I)} Bel_A(X)$ .  
反之,  $\forall X \in L_U(U, A, I)$ , 有  $\underline{R}_B(X) \subseteq \underline{R}_A(X)$ , 所以  $Bel_B(X) \leq Bel_A(X)$ , 故  $\sum_{X \in L_U(U, A, I)} Bel_B(X) \leq \sum_{X \in L_U(U, A, I)} Bel_A(X)$ , 又已知  $\sum_{X \in L_U(U, A, I)} Bel_B(X) = \sum_{X \in L_U(U, A, I)} Bel_A(X)$ , 所以有  $Bel_B(X) = Bel_A(X)$ , 进而有  $|\underline{R}_B(X)| = |\underline{R}_A(X)|$ , 故  $\underline{R}_B(X) = \underline{R}_A(X)$ , 即  $B$  为下近似协调集.

$\forall C \subset B$ ,  $B$  是下近似约简集,  $\forall X \in L_U(U, A, I), \underline{R}_C(X) \subseteq \underline{R}_B(X)$ , 故  $Bel_C(X) \leq Bel_B(X)$ ,  $\sum_{X \in L_U(U, A, I)} Bel_C(X) \leq \sum_{X \in L_U(U, A, I)} Bel_B(X)$ , 若  $\sum_{X \in L_U(U, A, I)} Bel_C(X) = \sum_{X \in L_U(U, A, I)} Bel_B(X)$ , 则  $C$  是下近似协调集, 由于  $B$  是下近似约简集, 与之矛盾. 因而有  $\sum_{X \in L_U(U, A, I)} Bel_C(X) < \sum_{X \in L_U(U, A, I)} Bel_B(X)$ .

反之, 若  $\sum_{X \in L_U(U, A, I)} Bel_B(X) = \sum_{X \in L_U(U, A, I)} Bel_A(X)$ , 且  $\forall C \subset B$ , 有  $\sum_{X \in L_U(U, A, I)} Bel_B(X) > \sum_{X \in L_U(U, A, I)} Bel_C(X)$ , 则  $B$  是下近似协调集, 且  $C$  不是下近似协调集, 即  $B$  是下近似约简集.

**定理 6** 设  $(U, A, I)$  为一个形式背景,  $B \subseteq A$ , 则  $B$  为上近似协调集当且仅当  $\sum_{X \in L_U(U, A, I)} Pl_B(X) = \sum_{X \in L_U(U, A, I)} Pl_A(X)$ .  $B$  为上近似约简集当且仅当  $\sum_{X \in L_U(U, A, I)} Pl_B(X) = \sum_{X \in L_U(U, A, I)} Pl_A(X)$ , 且  $\forall C \subset B$ , 有  $\sum_{X \in L_U(U, A, I)} Pl_B(X) < \sum_{X \in L_U(U, A, I)} Pl_C(X)$ .

证明: 与定理 5 证明类似.  
**定义 6**<sup>[24]</sup> 设  $(U, A, I)$  为一个形式背景,  $B \subseteq A$ , 若  $\forall x \in U, x^{*B*B} = x^{*A*A}$ , 则称  $B$  是  $(U, A, I)$  的粒协调集.

**定理 7** 设  $(U, A, I)$  为一个形式背景,  $B \subseteq A$ , 则  $B$  为下近似协调集当且仅当  $B$  为粒协调集.  
证明:  $B$  是下近似协调集, 则有  $\forall X \in L_U(U, A, I)$ , 都有  $\underline{R}_A(X) = \underline{R}_B(X)$ , 所以  $\forall x \in U, x^{*A*A} = \underline{R}_A(x^{*A*A}) = \underline{R}_B(x^{*A*A})$ , 故  $x \in \underline{R}_B(x^{*A*A}), x^{*B*B} \subseteq x^{*A*A}$ , 又  $\forall x \in U, x^{*A*A} \subseteq x^{*B*B}$ , 即  $x^{*A*A} = x^{*B*B}$ ,  $B$  是  $(U, A, I)$  的粒协调集.

反之, 如果  $\forall x \in U, x^{*A*A} = x^{*B*B}, \forall X \in L_U(U, A, I), \forall x \in \underline{R}_A(X)$ , 则  $x^{*A*A} \subseteq X$ , 于是  $x^{*B*B} \subseteq X$ , 进而  $x \in \underline{R}_B(X)$ , 故有  $\underline{R}_A(X) \subseteq \underline{R}_B(X)$ , 由定理 1 可知,  $\underline{R}_B(X) \subseteq \underline{R}_A(X)$ , 于是有  $\underline{R}_A(X) = \underline{R}_B(X)$ , 即  $B$  为下近似协调集.

**例 1** 设  $(U, A, I)$  为一个形式背景,  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}, A = \{a, b, c, d, e\}$ . 形式背景, 如表 1 所示.

该形式背景中, 对应的形式概念为  $L(U, A, I) = \{(U, \emptyset), (134, b), (235, ae), (24, c), (14, bd), (3, abd), (2, ace), (4, bcd), (\emptyset, A)\}$ . 取  $B = \{a, b, c, d\}$ , 验证得

$$\begin{aligned} \underline{R}_A(\{134\}) &= \underline{R}_B(\{134\}) = \{1, 3, 4\}, & \underline{R}_A(\{235\}) &= \underline{R}_B(\{235\}) = \{2, 3, 5\}, \\ \underline{R}_A(\{24\}) &= \underline{R}_B(\{24\}) = \{2, 4\}, & \underline{R}_A(\{14\}) &= \underline{R}_B(\{14\}) = \{1, 4\}, \\ \underline{R}_A(\{3\}) &= \underline{R}_B(\{3\}) = \{3\}, & \underline{R}_A(\{2\}) &= \underline{R}_B(\{2\}) = \{2\}, & \underline{R}_A(\{4\}) &= \underline{R}_B(\{4\}) = \{4\}, \end{aligned}$$

即  $B$  是下近似协调集. 由文献[24]容易验证  $B$  是粒协调集.

### 3 决策形式背景的上、下近似协调集

**定义 7** 设  $(U, A, I, D, J)$  为一个决策形式背景, 其中,  $(U, A, I)$  和  $(U, D, J)$  都是形式背景,  $A$  称为条件属性集,  $D$  称为目标属性集.  $B \subseteq A$ , 若  $\forall Y \in L_U(U, D, J)$ , 都有  $\underline{R}_A(Y) = \underline{R}_B(Y)$ , 则称  $B$  是下近似协调集; 若  $B$  的所有真子集都不是下近似协调集, 则称  $B$  是下近似约简集.  $(U, A, I, D, J)$  的所有下近似

表 1 形式背景  $(U, A, I)$

Tab. 1 Formal context  $(U, A, I)$

$U$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	1
3	1	1	0	0	1
4	0	1	1	1	0
5	1	0	0	0	1

约简集的交称为下近似核心属性集,记为  $\text{Core}_L(A,D)$ .

**定义 8** 设  $(U,A,I,D,J)$  为一个决策形式背景,  $B \subseteq A$ , 若  $\forall Y \in L_U(U,D,J)$ , 则都有  $\bar{R}_A(Y) = \bar{R}_B(Y)$ , 则称  $B$  是上近似协调集; 若  $B$  的所有真子集都不是上近似协调集, 则称  $B$  是上近似约简集.  $(U,A,I,D,J)$  的所有上近似约简集的交称为上近似核心属性集, 记为  $\text{Core}_U(A,D)$ .

**定理 8** 设  $(U,A,I,D,J)$  为一个决策形式背景,  $B \subseteq A$ ,  $\forall Y \in L_U(U,D,J)$ , 则  $\underline{R}_A(Y) = \underline{R}_B(Y)$ , 当且仅当  $\sum_{Y \in L_U(U,D,J)} \text{Bel}_A(Y) = \sum_{Y \in L_U(U,D,J)} \text{Bel}_B(Y)$ ;  $B$  为下近似约简集, 当且仅当  $\sum_{Y \in L_U(U,D,J)} \text{Bel}_B(Y) = \sum_{Y \in L_U(U,D,J)} \text{Bel}_A(Y)$ , 且  $\forall C \subset B$ , 有  $\sum_{Y \in L_U(U,D,J)} \text{Bel}_B(Y) > \sum_{Y \in L_U(U,D,J)} \text{Bel}_C(Y)$ .

证明: 已知  $\forall Y \in L_U(U,D,J)$ ,  $\underline{R}_A(Y) = \underline{R}_B(Y)$ , 则  $\sum_{Y \in L_U(U,D,J)} \text{Bel}_A(Y) = \sum_{Y \in L_U(U,D,J)} \frac{|\underline{R}_A(Y)|}{|U|} = \sum_{Y \in L_U(U,D,J)} \frac{|\underline{R}_B(Y)|}{|U|} = \sum_{Y \in L_U(U,D,J)} \text{Bel}_B(Y)$ .

反之,  $\forall Y \in L_U(U,D,J)$ , 有  $\underline{R}_B(Y) \subseteq \underline{R}_A(Y)$ , 所以有  $\text{Bel}_B(Y) \leq \text{Bel}_A(Y)$ , 故  $\sum_{Y \in L_U(U,D,J)} \text{Bel}_B(Y) \leq \sum_{Y \in L_U(U,D,J)} \text{Bel}_A(Y)$ , 又  $\sum_{Y \in L_U(U,D,J)} \text{Bel}_B(Y) = \sum_{Y \in L_U(U,D,J)} \text{Bel}_A(Y)$ , 所以  $\text{Bel}_A(Y) = \text{Bel}_B(Y)$ , 进而  $|\underline{R}_A(Y)| = |\underline{R}_B(Y)|$ , 故  $\underline{R}_A(Y) = \underline{R}_B(Y)$ , 即  $B$  为下近似协调集.

**定理 9** 设  $(U,A,I,D,J)$  为一个决策形式背景,  $B \subseteq A$ ,  $\forall Y \in L_U(U,D,J)$ , 则  $\bar{R}_A(Y) = \bar{R}_B(Y)$ , 当且仅当  $\sum_{Y \in L_U(U,D,J)} \text{Pl}_B(Y) = \sum_{Y \in L_U(U,D,J)} \text{Pl}_A(Y)$ ;  $B$  为上近似约简集当且仅当  $\sum_{Y \in L_U(U,D,J)} \text{Pl}_B(Y) = \sum_{Y \in L_U(U,D,J)} \text{Pl}_A(Y)$ , 且  $\forall C \subset B$ , 有  $\sum_{Y \in L_U(U,D,J)} \text{Pl}_C(Y) > \sum_{Y \in L_U(U,D,J)} \text{Pl}_B(Y)$ .

证明: 已知  $\forall Y \in L_U(U,D,J)$ ,  $\bar{R}_B(Y) = \bar{R}_A(Y)$ , 则  $\sum_{Y \in L_U(U,D,J)} \text{Pl}_B(Y) = \sum_{Y \in L_U(U,D,J)} \frac{|\bar{R}_B(Y)|}{|U|} = \sum_{Y \in L_U(U,D,J)} \frac{|\bar{R}_A(Y)|}{|U|} = \sum_{Y \in L_U(U,D,J)} \text{Pl}_A(Y)$ .

反之,  $\forall Y \in L_U(U,D,J)$ , 有  $\bar{R}_A(Y) \subseteq \bar{R}_B(Y)$ , 所以有  $\text{Pl}_A(Y) \leq \text{Pl}_B(Y)$ , 故  $\sum_{Y \in L_U(U,D,J)} \text{Pl}_A(Y) \leq \sum_{Y \in L_U(U,D,J)} \text{Pl}_B(Y)$ , 又已知  $\sum_{Y \in L_U(U,D,J)} \text{Pl}_A(Y) = \sum_{Y \in L_U(U,D,J)} \text{Pl}_B(Y)$ , 所以  $\text{Pl}_A(Y) = \text{Pl}_B(Y)$ , 进而  $|\bar{R}_A(Y)| = |\bar{R}_B(Y)|$ , 故  $\bar{R}_A(Y) = \bar{R}_B(Y)$ , 即  $B$  为下近似协调集.

**定义 9** 设  $(U,A,I,D,J)$  为一个决策形式背景,  $a \in A$  在  $A$  中的重要度为  $\text{Sig}_{A \setminus \{a\}} \{a\} = \sum_{Y \in L_U(U,D,J)} \text{Bel}_A(Y) - \sum_{Y \in L_U(U,D,J)} \text{Bel}_{A \setminus \{a\}}(Y)$ .

**定义 10** 设  $(U,A,I,D,J)$  为一个决策形式背景,  $B \subseteq A$ ,  $a \in A \setminus B$  对于  $B$  的重要度为  $\text{Sig}_B \{a\} = \sum_{Y \in L_U(U,D,J)} \text{Bel}_{B \cup \{a\}}(Y) - \sum_{Y \in L_U(U,D,J)} \text{Bel}_B(Y)$ .

**定理 10**  $\text{Core}_L(A,D) = \{a \in A \mid \text{Sig}_{A \setminus \{a\}} \{a\} > 0\}$ .

证明: 对于任意  $a \in \text{Core}_L(A,D)$ , 则  $A \setminus \{a\}$  不是下近似协调集, 否则  $A \setminus \{a\}$  至少包含一个上近似约简集, 则该约简集不包含  $a$ , 与  $a \in \text{Core}_L(A,D)$  相矛盾. 根据定理 8 可知,  $\sum_{Y \in L_U(U,D,J)} \text{Bel}_A(Y) > \sum_{Y \in L_U(U,D,J)} \text{Bel}_{A \setminus \{a\}}(Y)$ , 故有  $\text{Sig}_{A \setminus \{a\}} \{a\} > 0$ .

反之, 如果  $\text{Sig}_{A \setminus \{a\}} \{a\} > 0$ , 即  $\sum_{Y \in L_U(U,D,J)} \text{Bel}_A(Y) > \sum_{Y \in L_U(U,D,J)} \text{Bel}_{A \setminus \{a\}}(Y)$ , 由定理 8 可知,  $A \setminus \{a\}$  不是下近似协调集, 故所有的下近似协调集必包含  $a$ , 即  $a \in \text{Core}_L(A,D)$ .

同理, 可以定义上近似协调下的属性重要度.

**定义 11** 设  $(U,A,I,D,J)$  为一个决策形式背景,  $a \in A$  在  $A$  中的重要度为  $\text{Sig}_{A \setminus \{a\}} \{a\} =$

$$\sum_{Y \in L_U(U, D, J)} Pl_{A \setminus \{a\}}(Y) - \sum_{Y \in L_U(U, D, J)} Pl_A(Y).$$

定义 12 假设  $(U, A, I, D, J)$  为一个决策形式背景,  $B \subseteq A, a \in A \setminus B$  对于  $B$  的重要度为  $Sig_B\{a\} = \sum_{Y \in L_U(U, D, J)} Pl_B(Y) - \sum_{Y \in L_U(U, D, J)} Pl_{B \cup \{a\}}(Y)$ .

表 2 决策形式背景  $(U, A, I, D, J)$

Tab. 2 Decision formal context  $(U, A, I, D, J)$

定理 11  $Core_U(A, D) = \{a \in A \mid Sig_{A \setminus \{a\}}\{a\} > 0\}$ .

证明: 类似定理 10 证明.

例 2 设  $(U, A, I, D, J)$  为一个决策形式背景,  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 条件属性  $A = \{a, b, c, d, e\}$ , 决策属性  $D = \{f, g, h\}$ . 该决策形式背景, 如表 2 所示.

在此决策形式背景中, 条件属性对应的概念格为  $L(U, A, I) = \{(U, \emptyset), (134, b), (235, ae), (24, c), (14, bd), (3, abd), (2, ace), (4, bcd), (\emptyset, A)\}$ . 决策属性对应的概念格为  $L(U, D, J) = \{(U, \emptyset), (14, f), (235, g), (2, gh), (\emptyset, D)\}$ . 计算得  $B_1 = \{a, c, d\}$  和  $B_2 = \{c, d, e\}$  是其两个下近似约简集, 其下近似核心属性为  $Core_L(A, D) = \{c, d\}$ .

## 4 决策形式背景的下近似协调与粒协调的关系

定义 13<sup>[24]</sup> 设  $(U, A, I, D, J)$  为一个决策形式背景, 如果  $\forall x \in U$ , 有  $x^{*A * A} \subseteq x^{*D * D}$ , 则称  $(U, A, I, D, J)$  为协调的; 否则, 称  $(U, A, I, D, J)$  是不协调的.

定义 14 设  $(U, A, I, D, J)$  为一个决策形式背景,  $\forall Y \in L_U(U, D, J)$ , 都有  $\underline{R}_D(Y) = \underline{R}_A(Y)$ , 则称  $(U, A, I, D, J)$  是下近似协调的; 否则, 称为不协调的.

定理 12 设  $(U, A, I, D, J)$  为一个决策形式背景,  $(U, A, I, D, J)$  是粒协调的, 当且仅当  $(U, A, I, D, J)$  是下近似协调的.

证明:  $\forall Y \in L_U(U, D, J)$ , 都有  $\underline{R}_A(Y) \subseteq Y = \underline{R}_D(Y)$ , 故只需验证  $\underline{R}_D(Y) = Y \subseteq \underline{R}_A(Y)$ .  $\forall y \in Y$ , 则  $y^{*D * D} \subseteq Y$ , 又  $(U, A, I, D, J)$  是粒协调的, 故  $y^{*A * A} \subseteq y^{*D * D} \subseteq Y$ , 于是有  $y \in \underline{R}_A(Y)$ , 即有  $\underline{R}_D(Y) = Y \subseteq \underline{R}_A(Y)$ , 进而  $\underline{R}_A(Y) = \underline{R}_D(Y)$ ,  $(U, A, I, D, J)$  是下近似协调的.

反之, 若  $(U, A, I, D, J)$  是下近似协调的, 则  $\forall Y \in L_U(U, D, J)$ , 有  $\underline{R}_A(Y) = \underline{R}_D(Y)$ . 由于  $\forall y \in Y$ , 则  $y^{*D * D} \in L_U(U, D, J)$ ,  $\underline{R}_A(y^{*D * D}) = \underline{R}_D(y^{*D * D}) = y^{*D * D}$ , 所以有  $y \in \underline{R}_A(y^{*D * D})$ , 进而有  $y^{*A * A} \subseteq y^{*D * D}$ ,  $(U, A, I, D, J)$  是粒协调的.

Li 等<sup>[25]</sup>介绍了粒协调与强协调及弱协调之间关系, 三者相互不一样, 而文中定义的下近似协调与粒协调等价, 这里不再一一介绍三者之间的关系.

## 5 结束语

引入形式背景中的上、下近似算子  $\underline{R}(X), \bar{R}(X)$ , 并定义了上、下近似协调集, 引入了证据理论的  $Bel(X), Pl(X)$ , 讨论证据理论与上、下近似协调的关系, 进而讨论下近似协调的决策形式背景与粒协调的决策形式背景是等价的. 通过引入不同的上、下近似算子, 可以得到不同的协调定义, 研究形式背景下不同协调定义与经典的协调定义之间关系, 对形式背景的属性约简有重要意义.

### 参考文献:

[1] WILLE R. Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts[C]// Proceedings of the NATO Advanced Study Institute. Banff: Springer, 1982: 314-339. DOI:10. 1007/978-94-009-7798-3\_15.

[2] GÜNTSCH I, GEDIGA G. Modal-style operators in qualitative data analysis[C]// Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Data Mining. Maebashi: IEEE Press, 2002: 155-162. DOI:10. 1109/ICDM. 2002. 1183898.

[3] PAWLAK Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11(5): 341-356. DOI:10. 1007/BF01001956.

- [4] YAO Yiyu. Concept lattices in rough set theory[C]// IEEE Annual Meeting of the Fuzzy Information. Banff; IEEE Press, 2004; 796-801. DOI: 10. 1109/NAFIPS. 2004. 1337404.
- [5] SHAO Mingwen, ZHANG Wenxiu. Approximation in formal concept analysis[C]// 10th International Conference, RSFDGrC 2005. Regina; Springer, 2005; 43-53. DOI: 10. 1007/11548669\_5.
- [6] LI Tongjun, ZHANG Wenxiu. Rough approximations in formal contexts[C]// Proceedings of 2005 International Conference on Machine Learning and Cybernetics. Guangzhou; IEEE Press, 2005; 3162-3167. DOI: 10. 1109/ICMLC. 2005. 1527487.
- [7] LI Tongjun, WU Weizhi. Attribute reduction in formal contexts: A covering rough set approach[J]. Fundamenta Informaticae, 2011, 111(1): 15-32. DOI: 10. 3233/FI-2011-551.
- [8] SKOWRON A. The relationship between rough set theory and evidence theory[J]. Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics, 1989, 37(1): 87-90.
- [9] SKOWRON A. The rough sets theory and evidence theory[J]. Fundamenta Informaticae, 1990, 13(3): 245-262.
- [10] YAO Yiyu, LINGRAS P J. Interpretations of belief functions in the theory of rough sets[J]. Information Sciences, 1998, 104(1/2): 81-106. DOI: 10. 1016/s0020-0255(97)00076-5.
- [11] TAN Anhui, WU Weizhi, LI Jinjin, *et al.* Evidence-theory-based numerical characterization of multigranulation rough sets in incomplete information systems[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2016, 294: 18-35. DOI: 10. 1016/j. fss. 2015. 08. 016.
- [12] TAN Anhui, WU Weizhi, TAO Yuzhi. On the belief structures and reductions of multigranulation spaces with decisions[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2017, 88: 39-52. DOI: 10. 1016/j. ijar. 2017. 05. 005.
- [13] WU Weizhi, LEUNG Y, ZHANG Wenxiu. Connections between rough set theory and Dempster-Shafer theory of evidence[J]. International Journal of General Systems, 2002, 31(4): 405-430. DOI: 10. 1080/0308107021000013626.
- [14] WU Weizhi, ZHANG Mei, LI Huaizu, *et al.* Knowledge reduction in random information systems via Dempster-Shafer theory of evidence[J]. Information Sciences, 2005, 174(3/4): 143-164. DOI: 10. 1016/j. ins. 2004. 09. 002.
- [15] WU Weizhi. Attribute reduction based on evidence theory in incomplete decision systems[J]. Information Sciences, 2008, 178(5): 1355-1371. DOI: 10. 1016/j. ins. 2007. 10. 006.
- [16] WU Weizhi, LEUNG Y. Optimal scale selection for multi-scale decision tables[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2013, 54(8): 1107-1129. DOI: 10. 1016/j. ijar. 2013. 03. 017.
- [17] XU Weihua, ZHANG Xiaoyan, ZHONG Jianmin, *et al.* Attribute reduction in ordered information systems based on evidence theory[J]. Knowledge and Information Systems, 2010, 25(1): 169-184. DOI: 10. 1007/s10115-009-0248-5.
- [18] CHEN Degang, LI Wanlu, ZHANG Xiao, *et al.* Evidence-theory-based numerical algorithms of attribute reduction with neighborhood-covering rough sets[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2014, 55(3): 908-923. DOI: 10. 1016/j. ijar. 2013. 10. 003.
- [19] 车晓雅, 李磊军, 米据生. 基于证据理论刻画多粒度覆盖粗糙集の数値属性[J]. 智能系统学报, 2016, 11(4): 481-486. DOI: 10. 11992/tis. 201606011.
- [20] CHE Xiaoya, MI Jusheng, CHEN Degang. Information fusion and numerical characterization of a multi-source information system[J]. Knowledge-Based Systems, 2018, 145: 121-133. DOI: 10. 1016/j. knosys. 2018. 01. 008.
- [21] LIN Guoping, LIANG Jiye, QIAN Yuhua. An information fusion approach by combining multigranulation rough sets and evidence theory[J]. Information Sciences, 2015, 314: 184-199. DOI: 10. 1016/j. ins. 2015. 03. 051.
- [22] 张燕兰, 李长清. 基于证据理论的覆盖决策信息系统的属性约简[J]. 模式识别与人工智能, 2018, 31(9): 27-38. DOI: 10. 16451/j. cnki. issn1003-6059. 201809003.
- [23] CHEN Jinkun, LI Jinjin, LIN Yaojin, *et al.* Relations of reduction between covering generalized rough sets and concept lattices[J]. Information Sciences, 2015, 304: 16-27. DOI: 10. 1016/j. ins. 2014. 11. 053.
- [24] WU Weizhi, LEUNG Y, MI Jusheng. Granular computing and knowledge reduction in formal contexts[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2009, 21(10): 1461-1474. DOI: 10. 1109/tkde. 2008. 223.
- [25] LI Jinhai, ASWANI KUMAR C, MEI Changlin, *et al.* Comparison of reduction in formal decision contexts[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2017, 80: 100-122. DOI: 10. 1016/j. ijar. 2016. 08. 007.

(责任编辑: 黄晓楠 英文审校: 黄心中)