

DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.201811066



欧式看跌期权定价问题的 紧致有限差分格式

田朝薇, 李锦成, 翁智峰

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 针对单个的 Black-Scholes 方程, 提出一种紧致差分格式. 首先, 利用指数变换消去方程中的空间一阶导数; 接着, 在时间方向上采用 CN 格式, 空间二阶导数采用四阶 Padé 逼近, 构造精度为 $O(\Delta t^2 + h^4)$ 的紧致差分格式; 然后, 利用一种较为不同的离散能量法分析差分格式的稳定性 and 收敛性; 最后, 通过数值算例验证理论分析的有效性.

关键词: Black-Scholes 方程; 欧式看跌期权; 指数变换; 紧致差分格式

中图分类号: O 241; O 242 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5013(2019)06-0830-07

Compact Finite Difference Scheme for Pricing European Put Options

TIAN Zhaowei, LI Jincheng, WENG Zhifeng

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: For a single Black-Scholes equation, we propose a compact difference scheme. Firstly, the first-order spatial derivative in the equation is eliminated by exponential transformation, and then a compact difference scheme with the order $O(\Delta t^2 + h^4)$ is obtained by using CN scheme for time derivative and the fourth-order Padé approximation for the second-order spatial derivatives. The stability and convergence of the difference scheme are analyzed by a different discrete energy method. Numerical examples demonstrate that the difference scheme is effective.

Keywords: Black-Scholes equation; European put option; exponential transformation; compact difference scheme

Black-Scholes 方程是 1973 年由 Black 和 Scholes^[1] 推导出的著名期权定价公式, 由于它是一个二元二阶的偏微分方程, 解析解的形式比较特殊, 因此, 不能进行快速求解. 随着计算机技术的飞速发展, 有限差分方法显示出诸多的优越性, 目前, 学者们已经针对该方程提出了许多有限差分格式. 顾传青等^[2] 对欧式看涨期权定价问题, 先通过适当的自变数等价代换将 Black-Scholes 方程化为标准的抛物型偏微分方程, 再提出一种有效七点差分 GMRES 方法. Liao 等^[3] 首先利用代数变换消去方程中对空间的一阶导数项, 进而得到一个四阶紧致差分格式; 然后, 通过 Fourier 分析法证明格式的无条件稳定性. 赵美芝等^[4] 在文献^[3] 的基础上, 利用离散能量法, 证明差分格式的稳定性 and 收敛性. Company 等^[5] 对

收稿日期: 2018-11-12

通信作者: 翁智峰(1985-), 男, 讲师, 博士, 主要从事偏微分方程数值计算的研究. E-mail: zfwmath@163.com.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11701197); 福建省中青年教育科研项目(JAT160024); 华侨大学青年教师科研提升资助计划项目(ZQNYX502)

带有合理性参数的美式期权定价问题,提出了有限差分方法. Zhou 等^[6]将 Laplace 变换和有限差分方法结合,求解美式期权定价问题. Jeong 等^[7]利用在每个时间步长上减少一个或两个计算网格点,只计算更新的数值解的思想,对无边界的 Black-Scholes 方程提出了有限差分方法. Cen 等^[8]对广义 Black-Scholes 方程,提出一种鲁棒精确有限差分方法. Zhang 等^[9]对欧式期权时间分数阶 Black-Scholes 方程,提出一个隐式差分格式. 在上述工作的基础上,本文提出一种基于文献[10]的指数变换,对欧式看跌期权定价问题,构造一个四阶紧致有限差分格式.

1 Black-Scholes 方程及其等价模型

考虑单个 Black-Scholes 方程^[1]的初边值问题

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + rS \frac{\partial u}{\partial S} &= ru, \quad 0 < S < \infty, \quad 0 \leq \tau < T, \\ u(S, T) &= \max(K - S, 0), \quad 0 \leq S < \infty, \\ u(0, \tau) &= K, \quad u(S_\infty, \tau) = 0, \quad S_\infty \rightarrow \infty, \quad 0 \leq \tau \leq T. \end{aligned} \right\} \tag{1}$$

式(1)中: u 为欧式看跌期权的价格, $u > 0$; S 为股票价格, $S > 0$; τ 为时间; r 为无风险利率, $r > 0$; σ 为股票价格 S 的波动率, $\sigma > 0$; K 为执行价格, $K > 0$; T 为到期日, $T > 0$.

为了去掉问题(1)方程中 $\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial S}$ 的变系数 S , 引入文献[3]的变换 $S = e^x$, 将问题(1)转化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{\partial u}{\partial x} - ru &= 0, \quad a < x < b, \quad 0 \leq \tau < T, \\ u(x, T) &= \max(K - e^x, 0), \quad a \leq x \leq b, \\ u(a, \tau) &= K, \quad u(b, \tau) = 0, \quad 0 \leq \tau \leq T. \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

式(2)中: a, b 是常数.

由于问题(2)的初始条件是在 $\tau = T$ 时刻, 故作变换 $t = T - \tau$, 将问题(2)化为常见的微分方程初边值问题, 即

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{\partial u}{\partial x} + ru &= 0, \quad a < x < b, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) &= \max(K - e^x, 0), \quad a \leq x \leq b, \\ u(a, t) &= K, \quad u(b, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

为了便于后面验证算法的收敛阶, 考虑方程右端项为 $f(x, t)$ 的情形, 即

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{\partial u}{\partial x} + ru &= f(x, t), \quad a < x < b, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) &= \max(K - e^x, 0), \quad a \leq x \leq b, \\ u(a, t) &= K, \quad u(b, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

将问题(4)中第一个方程的两边同时乘以 $\frac{2}{\sigma^2}$, 得

$$\frac{2}{\sigma^2} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{2r}{\sigma^2}\right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2r}{\sigma^2} u = \frac{2}{\sigma^2} f(x, t). \tag{5}$$

为了去掉方程(5)中对空间的一阶导数项进而应用紧致差分格式, 令 $1 - \frac{2r}{\sigma^2} = \alpha$, 同时, 引入指数变换^[10], 即

$$u(x, t) = \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^x \alpha ds\right) \cdot v(x, t) = \exp\left(\frac{1}{2} \alpha x\right) \cdot v(x, t).$$

则式(5)转化为

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left[\frac{1}{2\sigma^2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 + r\right] v = f(x, t) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \alpha x\right).$$

为方便起见, 令 $\frac{\sigma^2}{2} = s, \frac{1}{2\sigma^2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 + r = w$, 易知 $s > 0, w > 0$. 于是问题(4)转化为微分方程初边值

问题,即

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - s \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + wv &= g(x,t), \quad a < x < b, \quad 0 < t \leq T, \\ v(x,0) &= \max((K - e^x) \cdot \exp(-\frac{1}{2}\alpha x), 0), \quad a \leq x \leq b, \\ v(a,t) &= K \cdot \exp(-\frac{1}{2}\alpha a), \quad v(b,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

式(6)中: $g(x,t)=f(x,t) \cdot \exp(-\frac{1}{2}\alpha x)$.

2 四阶紧致有限差分格式

对问题(6)作紧致有限差分格式. 将空间区间 $[a,b]$ 分成 N 等分,空间步长为 $h=\frac{b-a}{N}, x_i=a+ih, 0\leq i\leq N$;将时间区间 $[0,T]$ 分成 M 等分,时间步长为 $\Delta t=\frac{T}{M}, t_n=n \cdot \Delta t, 0\leq n\leq M$.

记 $\Omega=\{(x_i,t_n) \mid 0\leq i\leq N, 0\leq n\leq M\}$. 定义网格函数空间为

$$\Phi_h = \left\{ \phi \mid \phi = (\phi_0, \phi_1, \cdots, \phi_N) \right\}, \quad \bar{\Phi}_h = \left\{ \phi \mid \phi \in \Phi_h, \phi_0 = 0, \phi_N = 0 \right\}.$$

对于任意的网格函数 $\phi \in \Phi_h$,引入如下记号

$$\delta_x \phi_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{h}(\phi_i - \phi_{i-1}), \quad \delta_x^2 \phi_i = \frac{1}{h^2}(\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1}).$$

对于任意的网格函数 $\phi \in \bar{\Phi}_h$,定义如下记号

$$\mathcal{A}\phi_i = \frac{1}{12}(\phi_{i-1} + 10\phi_i + \phi_{i+1}).$$

将式(6)中的第一式在 $(x_i,t_{n+\frac{1}{2}})$ 点离散,可得

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x_i,t_{n+\frac{1}{2}}) - s \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_i,t_{n+\frac{1}{2}}) + wv(x_i,t_{n+\frac{1}{2}}) = g(x_i,t_{n+\frac{1}{2}}). \tag{7}$$

式(7)中: $1\leq i\leq N-1; 0\leq n\leq M-1$.

因有 $\frac{\partial v}{\partial t}(x_i,t_{n+\frac{1}{2}}) = \delta_t v_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\Delta t^2), \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_i,t_{n+\frac{1}{2}}) = \frac{\delta_x^2}{\mathcal{J} + \frac{h^2}{12}\delta_x^2} v_i^{n+\frac{1}{2}} + O(h^4)$, 并记算子 $\mathcal{J} + \frac{h^2}{12}\delta_x^2 =$

\mathcal{A} , 于是,式(7)变形为

$$\delta_t v_i^{n+\frac{1}{2}} - s \frac{\delta_x^2}{\mathcal{A}} v_i^{n+\frac{1}{2}} + wv_i^{n+\frac{1}{2}} = g_i^{n+\frac{1}{2}} + r_i^{n+\frac{1}{2}}, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad 0 \leq n \leq M-1. \tag{8}$$

且存在正常数 C ,使得

$$|r_i^{n+\frac{1}{2}}| \leq C(\Delta t^2 + h^4), \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad 0 \leq n \leq M-1.$$

在式(8)中略去小量项 $r_i^{n+\frac{1}{2}}$, 可得求解问题(6)的紧致有限差分格式为

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{A}\delta_t v_i^{n+\frac{1}{2}} - s\delta_x^2 v_i^{n+\frac{1}{2}} + w\mathcal{A}v_i^{n+\frac{1}{2}} &= \mathcal{A}g_i^{n+\frac{1}{2}} = \psi_i^{n+\frac{1}{2}}, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad 0 \leq n \leq M-1, \\ v_i^0 &= \max((K - \exp(a + ih)) \cdot \exp(-\frac{1}{2}\alpha(a + ih)), 0), \quad 1 \leq i \leq N-1, \\ v_0^n &= K \cdot \exp(-\frac{1}{2}\alpha a), \quad v_N^n = 0, \quad 0 \leq n \leq M. \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

3 差分格式解的稳定性和收敛性分析

对于任意的 $U,V \in \bar{\Phi}_h$,定义如下记号

$$(U,V) = h \sum_{i=1}^{N-1} U_i V_i, \quad \|U\| = \sqrt{(U,U)},$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V})_1 &= h \sum_{i=1}^N (\delta_x U_{i-\frac{1}{2}}) (\delta_x V_{i-\frac{1}{2}}), \quad \|\delta_x \boldsymbol{U}\| = \sqrt{(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{U})_1}, \\ (\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V})_2 &= h \sum_{i=1}^{N-1} (\delta_x^2 U_i) (\delta_x^2 V_i), \quad \|\delta_x^2 \boldsymbol{U}\| = \sqrt{(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{U})_2}, \\ \|\boldsymbol{U}\|_\infty &= \max_{0 \leq i \leq N} |U_i|, \\ (\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V})_{1,A} &= (\mathcal{A}\boldsymbol{U}, -\delta_x^2 \boldsymbol{U}) = -h \sum_{i=1}^{N-1} (\mathcal{A}U_i) \delta_x^2 V_i, \quad \|\delta_x \boldsymbol{U}\|_A = \sqrt{(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{U})_{1,A}}.\end{aligned}$$

引理 1^[11] 对于任意的 $\boldsymbol{U} \in \bar{\Phi}_h$, 有

$$\frac{2}{3} \|\delta_x \boldsymbol{U}\|^2 \leq \|\delta_x \boldsymbol{U}\|_A^2 \leq \|\delta_x \boldsymbol{U}\|^2, \tag{10}$$

$$\|\boldsymbol{U}\|_\infty \leq \frac{\sqrt{b-a}}{2} \|\delta_x \boldsymbol{U}\|. \tag{11}$$

定理 1 设 $\{v_i^n \mid 0 \leq i \leq N, 0 \leq n \leq M\}$ 为差分格式

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{A} \delta_t v_i^{n+\frac{1}{2}} - s \delta_x^2 v_i^{n+\frac{1}{2}} + w \mathcal{A} v_i^{n+\frac{1}{2}} &= \phi_i^{n+\frac{1}{2}}, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad 0 \leq n \leq M-1, \\ v_i^0 &= \beta(x_i), \quad 1 \leq i \leq N-1, \\ v_0^n &= 0, \quad v_N^n = 0, \quad 0 \leq n \leq M \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

的解, 则有

$$\|\delta_x \boldsymbol{v}^n\|_A^2 \leq \|\delta_x \boldsymbol{v}^0\|_A^2 + \frac{T}{2s} \max_{0 \leq k \leq n-1} \|\boldsymbol{\psi}^{k+\frac{1}{2}}\|^2.$$

证明 将式(12)第一式的两边与 $-\delta_x^2 \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}}$ 作内积, 可得

$$(\mathcal{A} \delta_t \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}}, -\delta_x^2 \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}}) - s (\delta_x^2 \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}}, -\delta_x^2 \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}}) + w (\mathcal{A} \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}}, -\delta_x^2 \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}}) = (\boldsymbol{\psi}^{n+\frac{1}{2}}, -\delta_x^2 \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}}). \tag{13}$$

式(13)中: 等号左端的项

$$\begin{aligned} w (\mathcal{A} \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}}, -\delta_x^2 \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}}) &= w \|\delta_x \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}}\|_A^2 \geq 0; \\ -s (\delta_x^2 \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}}, -\delta_x^2 \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}}) &= s \|\delta_x^2 \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}}\|^2; \\ (\mathcal{A} \delta_t \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}}, -\delta_x^2 \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}}) &= \left(\left(\mathcal{J} + \frac{h^2}{12} \delta_x^2 \right) \delta_t \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}}, -\delta_x^2 \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}} \right) = \\ &= (\delta_t \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}}, -\delta_x^2 \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}}) + \frac{h^2}{12} (\delta_x^2 \delta_t \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}}, -\delta_x^2 \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} (\delta_t \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}}, -\delta_x^2 \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}}) &= (\delta_x \delta_t \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}}, \delta_x \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2\Delta t} (\|\delta_x \boldsymbol{v}^{n+1}\|^2 - \|\delta_x \boldsymbol{v}^n\|^2); \\ \frac{h^2}{12} (\delta_x^2 \delta_t \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}}, -\delta_x^2 \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}}) &= -\frac{h^2}{12} \frac{1}{2\Delta t} (\|\delta_x^2 \boldsymbol{v}^{n+1}\|^2 - \|\delta_x^2 \boldsymbol{v}^n\|^2), \end{aligned}$$

$$\text{故 } (\mathcal{A} \delta_t \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}}, -\delta_x^2 \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2\Delta t} \left[\left(\|\delta_x \boldsymbol{v}^{n+1}\|^2 - \frac{h^2}{12} \|\delta_x^2 \boldsymbol{v}^{n+1}\|^2 \right) - \left(\|\delta_x \boldsymbol{v}^n\|^2 - \frac{h^2}{12} \|\delta_x^2 \boldsymbol{v}^n\|^2 \right) \right].$$

由文献[11]中的公式 $\|\delta_x \boldsymbol{U}\|_A^2 = \|\delta_x \boldsymbol{U}\|^2 - \frac{h^2}{12} \|\delta_x^2 \boldsymbol{U}\|^2$, 可得

$$(\mathcal{A} \delta_t \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}}, -\delta_x^2 \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2\Delta t} (\|\delta_x \boldsymbol{v}^{n+1}\|_A^2 - \|\delta_x \boldsymbol{v}^n\|_A^2).$$

式(13)等号右端项, 应用 Yong 不等式可得

$$(\boldsymbol{\psi}^{n+\frac{1}{2}}, -\delta_x^2 \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}}) \leq s \|\delta_x^2 \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{1}{4s} \|\boldsymbol{\psi}^{n+\frac{1}{2}}\|^2.$$

于是, 式(13)有不等关系为

$$\frac{1}{2\Delta t} (\|\delta_x \boldsymbol{v}^{n+1}\|_A^2 - \|\delta_x \boldsymbol{v}^n\|_A^2) \leq \frac{1}{4s} \|\boldsymbol{\psi}^{n+\frac{1}{2}}\|^2,$$

即

$$\|\delta_x \boldsymbol{v}^{n+1}\|_A^2 \leq \|\delta_x \boldsymbol{v}^n\|_A^2 + \frac{\Delta t}{2s} \|\boldsymbol{\psi}^{n+\frac{1}{2}}\|^2,$$

进而有

$$\|\delta_x \mathbf{v}^n\|_A^2 \leq \|\delta_x \mathbf{v}^0\|_A^2 + \frac{1}{2s} \Delta t \cdot n \cdot \max_{0 \leq k \leq n-1} \|\boldsymbol{\psi}^{k+\frac{1}{2}}\|^2,$$

即有

$$\|\delta_x \mathbf{v}^n\|_A^2 \leq \|\delta_x \mathbf{v}^0\|_A^2 + \frac{T}{2s} \max_{0 \leq k \leq n-1} \|\boldsymbol{\psi}^{k+\frac{1}{2}}\|^2. \tag{14}$$

证毕.

定理 2 设 $\{v(x_i, t_n) | 0 \leq i \leq N, 0 \leq n \leq M\}$ 是问题(6)的解析解, $\{v_i^n | 0 \leq i \leq N, 0 \leq n \leq M\}$ 是紧致差分格式(9)的数值解, 令 $e_i^n = v(x_i, t_n) - v_i^n$, 则 e_i^n 满足

$$\begin{cases} \mathcal{A} \delta_i e_i^{n+\frac{1}{2}} - s \delta_x^2 e_i^{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{W} \mathcal{A} e_i^{n+\frac{1}{2}} = r_i^{n+\frac{1}{2}}, & 1 \leq i \leq N-1, \quad 0 \leq n \leq M-1, \\ e_i^0 = 0, & 1 \leq i \leq N-1, \\ e_0^n = 0, \quad e_N^n = 0, & 0 \leq n \leq M. \end{cases}$$

其中, $|r_i^{n+\frac{1}{2}}| \leq C(\Delta t^2 + h^4)$, 则有 $\|e^n\|_\infty \leq \frac{b-a}{4} \sqrt{\frac{3T}{s}} C(\Delta t^2 + h^4)$.

证明 由式(14)可得

$$\|\delta_x e^n\|_A^2 \leq \frac{T}{2s} \max_{0 \leq k \leq n-1} \|r^{k+\frac{1}{2}}\|^2.$$

由于 $\|r^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \leq h \cdot N \cdot C^2(\Delta t^2 + h^4)^2 \leq (b-a)C^2(\Delta t^2 + h^4)^2$, 并由式(10)可得

$$\frac{2}{3} \|\delta_x e^n\|^2 \leq \frac{T}{2s} (b-a)C^2(\Delta t^2 + h^4)^2,$$

即

$$\|\delta_x e^n\| \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3T}{s}} \sqrt{b-a} C(\Delta t^2 + h^4).$$

由式(11)可得

$$\|e^n\|_\infty \leq \frac{\sqrt{b-a}}{2} \|\delta_x e^n\| \leq \frac{b-a}{4} \sqrt{\frac{3T}{s}} C(\Delta t^2 + h^4).$$

证毕.

4 数值试验

例 1 考虑如下微分方程初边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\partial u}{\partial x} + ru = f(x, t), & 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq 1, \\ u(x, 0) = x^4 + x^2 + 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = (t+1)^2, \quad u(1, t) = 3(t+1)^2, & 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

上式中: $r=0.5; \sigma=\sqrt{2}$; 精确解为 $u(x, t)=(t+1)^2(x^4+x^2+1)$; 右端项为

$$f(x, t) = 2(t+1)(x^4+x^2+1) - (t+1)^2 \left[\frac{\sigma^2}{2} (12x^2+2) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) (4x^3+2x) - r(x^4+x^2+1) \right].$$

数值计算结果, 如表 1, 2 所示. 表 1, 2 中: Max-Error 表示最大误差; M-rate 表示最大误差对应的收敛阶; L^2 -Error 表示二范数误差; L^2 -rate 表示二范数误差对应的收敛阶.

由表 1, 2 可知: 文中提出的紧致有限差分格式关于空间四阶收敛, 关于时间二阶收敛, 这与理论分析结果一致.

表 1 例 1 对不同 N 的数值误差和收敛阶

Tab. 1 Numerical errors and orders of convergence with different N for example 1

参数	$N=5, M=25$	$N=10, M=100$	$N=20, M=400$	$N=40, M=1\ 600$	$N=80, M=6\ 400$
Max-Error	$1.636\ 8 \times 10^{-4}$	$1.021\ 9 \times 10^{-5}$	$6.390\ 6 \times 10^{-7}$	$4.005\ 0 \times 10^{-8}$	$2.502\ 7 \times 10^{-9}$
M-rate	—	4.001 6	3.999 2	3.996 1	4.000 2
L^2 -Error	$1.458\ 0 \times 10^{-4}$	$9.178\ 0 \times 10^{-6}$	$5.769\ 7 \times 10^{-7}$	$3.612\ 9 \times 10^{-8}$	$2.258\ 2 \times 10^{-9}$
L^2 -rate	—	3.989 7	3.991 6	3.997 3	3.999 9

表 2 例 1 对不同 M 的数值误差和收敛阶

Tab. 2 Numerical errors and orders of convergence with different M for example 1

参数	$M=5, N=500$	$M=10, N=500$	$M=20, N=500$	$M=40, N=500$	$M=80, N=500$
Max-Error	$5.029\ 5\times10^{-3}$	$1.195\ 2\times10^{-3}$	$2.981\ 6\times10^{-4}$	$7.453\ 9\times10^{-5}$	$1.863\ 5\times10^{-5}$
M-rate	—	2.073 2	2.003 1	2.000 0	2.000 0
L^2 -Error	$4.403\ 8\times10^{-3}$	$1.095\ 2\times10^{-3}$	$2.746\ 3\times10^{-4}$	$6.888\ 1\times10^{-5}$	$1.725\ 7\times10^{-5}$
L^2 -rate	—	2.007 6	1.995 6	1.995 3	1.996 9

例 2 考察问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + rS \frac{\partial u}{\partial S} - ru = 0, & (S, \tau) \in (S_a, S_b) \times (0, T), \\ u(S, T) = \max(K - S, 0), \\ u(S_a, \tau) = K, \quad u(S_b, \tau) = 0. \end{cases}$$

上式中: u 为欧式看跌期权的价格; S 表示股票价格; r 为无风险利率; σ 为股票价格的波动率; K 为执行价格; T 为到期日.

这里取区间为 $S_a = e^{-20} \approx 0$ (对应的 $a = -20$) 到 $S_b = e^4 \approx 54.6$ (对应的 $b = 4$) 之间, 对空间区间进行 160 等分、时间区间进行 25 600 等分. 当 $r = 0.005, \sigma = 0.1, T = 1, K = 20$ 时, 得到的数值解曲面, 如图 1 所示. 由图 1 可知: 用当前的差分格式可以得到光滑和稳定的数值解.

为了说明提出的差分格式的实用有效性, 分别对问题中的参数取不同值, 考察它们对看跌期权价格的影响, 结果如图 2 所示. 由图 2(a) 可知: 当 $r = 0.005, T = 1.0, K = 20$, σ 为 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 时, 股票价格在执行价格 20 附近的波动率越大, 期权价格越高, 印证了金融界高风险、高回报

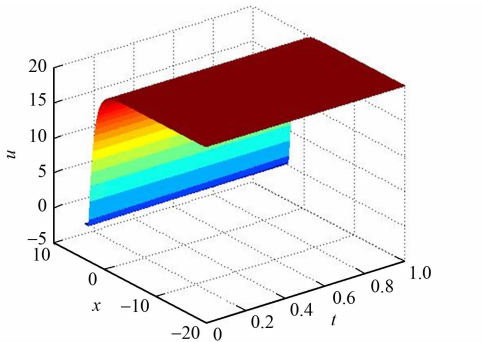


图 1 当 $r = 0.005, \sigma = 0.1, T = 1, K = 20$ 时, 例 2 的数值解

Fig. 1 Numerical solution of example 2 when $r = 0.005, \sigma = 0.1, T = 1, K = 20$

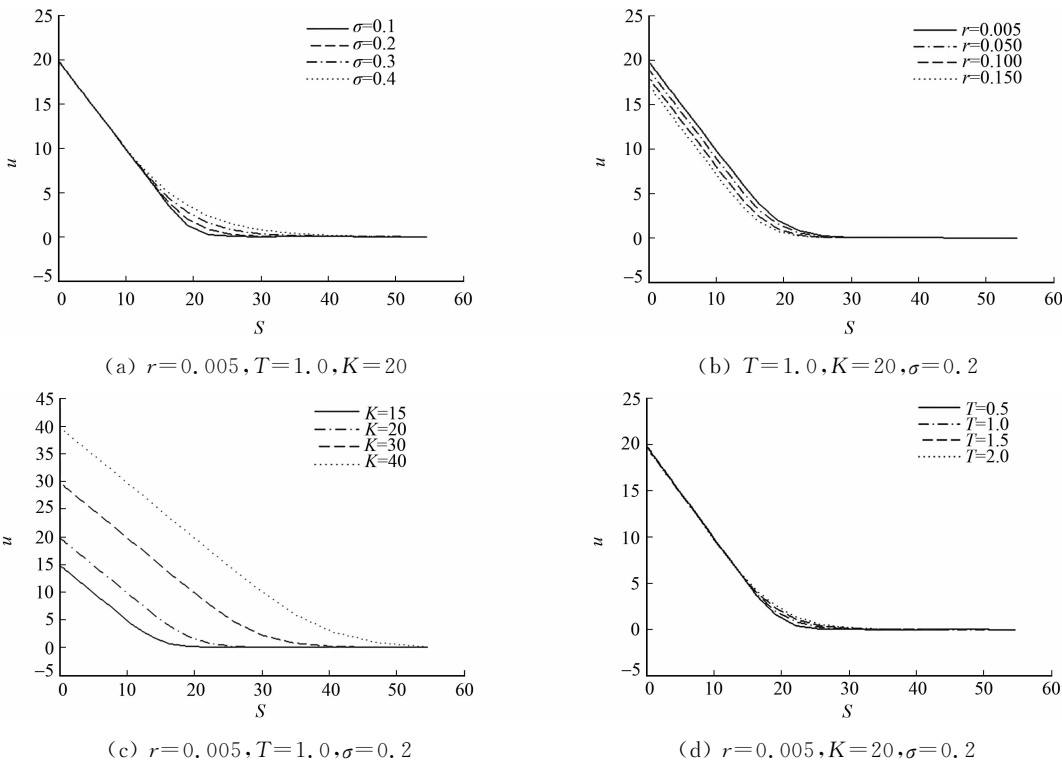


图 2 例 2 中的不同参数对看跌期权价格的影响

Fig. 2 Impact of put option pricing with different parameters for example 2

的说法. 由图 2(b)可知: 当 $T=1.0, K=20, \sigma=0.2, r$ 分别为 $0.005, 0.050, 0.100, 0.150$ 时, 利率的升高会引起看跌期权价格的下跌. 由图 2(c)可知: 当 $r=0.005, T=1.0, \sigma=0.2, K$ 分别为 $15, 20, 30, 40$ 时, 执行价格越高, 看跌期权价格越高. 由图 2(d)可知: 当 $r=0.005, K=20, \sigma=0.2, T$ 分别为 $0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ 时, 有效期的长短对期权价格的影响不大. 以上结果均与实际市场情形一致.

5 结束语

针对单个的 Black-Scholes 方程, 考察欧式看跌期权定价问题, 利用指数变换方法消去方程中的空间一阶导数, 进而提出一种具有空间四阶精度的紧致有限差分格式. 利用与以往较为不同的能量分析法, 对差分格式解的收敛性和稳定性进行分析, 并通过数值算例验证差分格式的应用可行性. 接下来的研究将会考虑如何将该方法推广到求解多个自由度的 Black-Scholes 方程及其他类型的 Black-Scholes 方程中.

参考文献:

- [1] BLACK F, SCHOLLES M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of Political Economy, 1973, 81(3): 637-654. DOI: 10.1086/260062.
- [2] 顾传青, 康颖. 欧式看涨期权定价问题的一种有效七点差分 GMRES 方法[J]. 应用数学与计算数学学报, 2014, 28(4): 518-528. DOI: 10.3969/j.issn.1006-6330.2014.04.017.
- [3] LIAO Wenyuan, ZHU Jianping. An accurate and efficient numerical method for solving Black-Scholes equation in option pricing[J]. International Journal of Mathematics in Operational Research, 2009, 1(1): 191-210. DOI: 10.1504/ij-mor.2009.022881.
- [4] 赵美芝, 戴伟忠, 晏云. 求解 Black-Scholes 方程的精度紧致有限差分格式[J]. 闽南师范大学学报(自然科学版), 2017, 30(1): 1-10.
- [5] COMPANY R, EGOROVA V, JODAR L, *et al.* Finite difference methods for pricing American put option with rationality parameter: Numerical analysis and computing[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2016, 304: 1-17. DOI: 10.1016/j.cam.2016.03.001.
- [6] ZHOU Zhiqiang, GAO Xuemei. Numerical methods for pricing American options with time-fractional PDE models[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2016(2): 1-8. DOI: 10.1155/2016/5614950.
- [7] JEONG D, YOO M, KIM J. Finite difference method for the Black-Scholes equation without boundary conditions[J]. Computational Economics, 2018, 51(4): 961-972. DOI: 10.1007/s10614-017-9653-0.
- [8] CEN Zhongdi, LE Anbo. A robust and accurate finite difference method for a generalized Black-Scholes equation[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2011, 235(13): 3728-3733. DOI: 10.1016/j.cam.2011.01.018.
- [9] ZHANG Hongmei, LIU Fawang, TURNER I, *et al.* Numerical solution of the time fractional Black-Scholes model governing European options[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2016, 71(9): 1772-1783. DOI: 10.1016/j.camwa.2016.02.007.
- [10] LIAO Wenyuan. A compact high-order finite difference method for unsteady convection-diffusion equation[J]. International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics, 2012, 13(3): 135-145. DOI: 10.1080/15502287.2012.660227.
- [11] 孙志忠, 高广花. 分数阶微分方程的有限差分方法[M]. 北京: 科学出版社, 2015.

(责任编辑: 黄晓楠 英文审校: 黄心中)