第 40 卷　第 6 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 40　No. 6
2019 年 11 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Nov. 2019

DOI：10.11830/ISSN.1000-5013.201901058

解析函数的 Bohr 型半径估计

白晓瑾[1]，石擎天[2,3]

(1. 华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 363021；
2. 泉州师范学院 数学与计算机科学学院，福建 泉州 362000；
3. 泉州师范学院 福建省大数据管理新技术与知识工程重点实验室，福建 泉州 362000)

摘要： 引进参数 $p\in(0,\infty)$，探讨单位圆盘到自身上解析函数的 Bohr 型不等式. 运用有界解析函数的偏差定理和系数估计，推广经典的 Bohr 定理和 Paulsen 等得到的相应结果，且半径估计值都是精确的.

关键词： 解析函数；Bohr 半径；截断部分；系数估计

中图分类号： O 174.51　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000-5013(2019)06-0817-06

Estimations of Bohr Type Radii for Analytic Functions

BAI Xiaojin[1], SHI Qingtian[2,3]

(1. School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China;
2. School of Mathematics and Computation Sciences, Quanzhou Normal University, Quanzhou 362000, China;
3. Fujian Provincial Key Laboratory of Data Intensive Computing, Quanzhou Normal University, Quanzhou 362000, China)

Abstract: We mainly estimate some kinds of Bohr-type inequalities for analytic functions from the unit disk into itself by introducing the parameter $p\in(0,\infty)$. By applying the distortion theorem and coefficient estimations of bounded analytic functions, we generalize the classical Bohr theorem and the corresponding results obtained by Paulsen *et al*, and obtain some sharpness radii estimations.

Keywords: analytic functions; Bohr radii; section part; coefficient estimates

1　预备知识

经典的 Bohr 定理如下：任意单位圆盘到自身上的解析函数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，不等式

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n\leqslant 1 \tag{1}$$

在圆盘 $|z|=r<\dfrac{1}{3}$ 内成立. 其中，$\dfrac{1}{3}$ 是满足上式的最大值，称为 Bohr 半径. Bohr 定理是由 Bohr[1] 于 1914 年首次提出，之后，学者们将 Bohr 半径(也称 Bohr 定理)推广到调和映照和多复变中，并进行了深入的研究，发现其在 Banach 代数和双曲几何中都有广泛的应用[2-6].

经典的 Bohr 定理的推广形式比较多，其中一种 Bohr 型定理为 Rogosinski 半径，即将式(1)改写为

$$|S_N(z)|:=\left|\sum_{k=0}^{N-1}a_kz^k\right|<1.$$

收稿日期： 2019-01-30
通信作者： 石擎天(1986-)，男，讲师，博士，主要从事复分析的研究. E-mail：shiqingtian2013@gmail.com.
基金项目： 国家自然科学基金资助项目(11471128)；泉州师范学院科研计划项目(H19009)

上式中：S_N 称为 f 的部分和或截断部分. 由文献[2-3]可知，上式成立仅当 $|z|=r<\frac{1}{2}$. 类比于经典的 Bohr 定理，考虑用 $|f(z)|$ 替换式(1)中 $|f(0)|=|a_0|$，可得 Bohr-Rogosinski 半径[7]

$$R_N^f(z):=|f(z)|+\sum_{k=N}^{\infty}|a_k|r^k<1$$

在圆盘 $|z|\leqslant R_N$ 内成立，其中，N 为给定的正整数. 2017 年，Kayumov 等[7]运用有界解析函数的系数估计和偏差定理，得到 R_N 的最佳值.

定理 A[7] 设 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$ 是单位圆盘 D 上满足 $|f(z)|<1$ 的解析函数，则有

$$|f(z)|+\sum_{k=N}^{\infty}|a_k|r^k\leqslant 1$$

在圆盘 $|z|=r\leqslant R_N$ 内成立，其中，R_N 是方程 $\varphi_N(r):=2(1+r)r^N-(1-r)^2=0$ 在 $(0,1)$ 内的正根，且 R_N 是最佳的.

另外，$|f(z)|^2+\sum_{k=N}^{\infty}|a_k|r^k\leqslant 1$ 在圆盘 $|z|=r\leqslant R'_N$ 内成立，其中，R'_N 是方程 $\lambda_N(r):=(1+r)\times r^N-(1-r)^2=0$ 在 $(0,1)$ 内的正根，且 R'_N 也是最佳的.

Paulsen 等[8]将 $|a_0|^2$ 替换式(1)中的 $|a_0|$，得到定理 B.

定理 B[8] 设 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$ 是单位圆盘 D 上满足 $|f(z)|<1$ 的解析函数，则

$$|a_0|^2+\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|r^k\leqslant 1$$

在 $r\leqslant 1/2$ 内成立.

通过引入参数 $p\in(0,\infty)$，运用有界解析函数的偏差定理和系数估计推广定理 B 和经典的 Bohr 定理，且半径估计值是精确的.

2 相关引理及其证明

引理 A[9] 若 $\phi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 是单位圆盘 D 内解析函数，且 $|\phi(z)|<1$，$z\in D$，则 $|a_n|\leqslant 1-|a_0|^2$，其中，$n=1,2,3,\cdots$.

引理 B[10] 若 $\phi(z)$ 是单位圆盘 D 内的解析函数，且 $|\phi(z)|<1$，$z\in D$，则有

1) $\left|\frac{\partial\phi(z)}{\partial z}\right|\leqslant\frac{1-|\phi(z)|^2}{1-|z|^2}$，$z\in D$，其中，等号成立当且仅当 ϕ 是 Möbius 变换及其旋转；

2) $|f(z)|\leqslant\frac{r+|a_0|}{1+|a_0|r}$，$z\in D$，其中，等号成立当且仅当 ϕ 是 Möbius 变换及其旋转.

引理 1 设 $\phi(x)=\frac{1-x^2}{1-x^p}$，$p>0$ 为 $[0,1)$ 上实值函数，则有如下估计：

1) $1\leqslant\phi(x)\leqslant\frac{2}{p}$，$0<p\leqslant 2$；

2) $\frac{2}{p}<\phi(x)\leqslant 1$，$p>2$.

证明：当 $p\neq 2$ 时，有

$$\frac{\partial\phi(x)}{\partial x}=\frac{x(2x^p-px^p+px^{p-2}-2)}{(1-x^p)^2}.$$

令 $g(x)=2x^p-px^p+px^{p-2}-2$，即 $g(1)=0$，则有

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x}=p(p-2)(1-x^2)x^{p-3},\qquad x\in[0,1].$$

当 $p\in(0,2)$ 时，因为 $\frac{\partial g(x)}{\partial x}<0$，且 $\frac{\partial\phi(x)}{\partial x}>0$，故 $\phi(x)$ 是 $[0,1)$ 上单调递增函数，则有 $\phi(x)\geqslant\phi(0)=$

1；当 $p\in(2,+\infty)$时，因为$\frac{\partial g(x)}{\partial x}>0$，且$\frac{\partial \phi(x)}{\partial x}<0$，所以，$\phi(x)$是$[0,1)$上的单调递减函数，则有 $\phi(x)\leqslant\phi(0)=1$.

再考虑函数 $\phi(x)-\frac{2}{p}=\frac{2x^p-px^2+p-2}{p(1-x^p)}$. 设 $q(x)=2x^p-px^2+p-2$，则有 $q(1)=0$，且$\frac{\partial q(x)}{\partial x}=2px(x^{p-2}-1)$，$x\in[0,1]$. 当 $p\in(0,2)$时，易知$\frac{\partial q(x)}{\partial x}\geqslant 0$，则有 $q(x)\leqslant q(1)=0$，即 $\phi(x)\leqslant\frac{2}{p}$；当 $p\in(2,+\infty)$时，易知$\frac{\partial q(x)}{\partial x}<0$，则有 $q(x)>q(1)=0$，即 $\phi(x)>\frac{2}{p}$.

3　Bohr 型半径估计

应用节 2 中引理，对解析函数的多种 Bohr 型定理进行研究，有定理 1～4.

定理 1　设 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$ 是单位圆盘上解析函数并且$|f(z)|<1$，则有

1）当 $0<p\leqslant 2$ 时，不等式$|a_0|^p+\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|r^k\leqslant 1$ 在圆盘 $r\leqslant\frac{p}{p+2}$内成立；

2）当 $p>2$ 时，不等式$|a_0|^p+\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|r^k\leqslant 1$ 在圆盘 $r\leqslant\frac{1}{2}$内成立.

上述 Bohr 型半径估计值均精确.

证明：由引理 A，可知$|a_k|\leqslant 1-|a_0|^2$，其中，$k=1,2,3,\cdots$，则有

$$|a_0|^p+\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|r^k\leqslant|a_0|^p+(1-|a_0|^2)\frac{r}{1-r}.$$

由$|a_0|^p+(1-|a_0|^2)\frac{r}{1-r}\leqslant 1$，可得 $r\leqslant 1\Big/\left(1+\frac{1-|a_0|^2}{1-|a_0|^p}\right)$.

1）当 $0<p\leqslant 2$ 时，应用引理 1，可得 $r\leqslant\frac{1}{1+\frac{2}{p}}=\frac{p}{p+2}$.

给定 $a\in[0,1)$，考虑函数

$$f(z)=\frac{a-z}{1-az}=a-(1-a^2)\sum_{k=1}^{\infty}a^{k-1}z^k,\qquad z\in D,\tag{2}$$

则有

$$|a_0|^p+\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|r^k=a^p+(1-a^2)\sum_{k=1}^{\infty}a^{k-1}r^k=a^p+(1-a^2)\frac{r}{1-ar}.$$

所以，由 $a^p+(1-a^2)\frac{r}{1-ar}>1$，可得 $r>\frac{1}{a+\frac{1-a^2}{1-a^p}}\geqslant\frac{p}{p+2}$.

2）当 $p>2$ 时，应用引理 1，可得 $r\leqslant\frac{1}{2}$，且精确性可由式(2)类似得证.

由定理 1 可知，当 $p=1$ 和 $p=2$ 时，所得估计结果与文献[8]中定理 2.1 和推论 2.7 分别一致. 而且注意到定理 1 中，参数 $p\in(0,\infty)$可取值所有正数，所以，定理 1 更具有一般性. 运用引理 A，类似于定理 1，可以得到定理 2.

定理 2　设 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$ 是单位圆盘上解析函数，且$|f(z)|<1$，则

1）当 $0<p\leqslant 2$ 时，$|a_0|^p+\sum_{k=1}^{\infty}k^2|a_k|r^k\leqslant 1$ 在$|z|=r\leqslant R_1$ 内成立，其中，R_1 是方程 $\omega(r):=2r(1-r^2)-p(1-r)^4=0$ 在$(0,1)$内的最小正根，且 R_1 是精确的；

2）当 $p>2$ 时，$|a_0|^p+\sum_{k=1}^{\infty}k^2|a_k|r^k\leqslant 1$ 在$|z|=r\leqslant R_2$ 内成立，其中，R_2 是式 $\delta(r):=r(1-r^2)-$

$(1-r)^4=0$ 在$(0,1)$内的最小正根,且 R_2 是精确的.

定理 3 设 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$ 是单位圆盘上的解析函数,且$|f(z)|<1$,则

$$|f(z)|+\sum_{k=1}^{\infty}k^2|a_k|r^k\leqslant 1$$

在$|z|=r\leqslant R$ 内成立,其中,R 是方程 $\rho(r):=2(1+r)(1-r^2)-(1-r)^5=0$ 在$(0,1)$内的最小正根,且 R 是精确的.

定理 4 设 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$ 是单位圆盘上的解析函数,且$|f(z)|<1$,则

$$|f(z)|^2+\sum_{k=1}^{\infty}k^2|a_k|r^k\leqslant 1$$

在$|z|=r\leqslant R$ 内成立,其中,R 是方程 $\nu(r):=-(1-r^2)(1-r)^4+r(1+r)(1-r^2)=0$ 在$(0,1)$内的最小正根,且 R 是精确的.

4 截断的 Bohr 型半径估计

受定理 A 的启发,对其截断的 Bohr 型半径估计有定理 5.

定理 5 设 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$ 是单位圆盘 D 上的解析函数,满足 $|f(z)|<1$,则

1) 当 $0<p\leqslant 2$ 时,$|a_0|^p+\sum_{k=1}^{m}|a_k|r^k\leqslant 1$,$m$ 为正整数,在$|z|=r\leqslant R_{m1}$ 内成立,其中,R_{m1} 是方程 $\psi_m(r):=2r(1-r^m)-p(1-r)=0$ 在$(0,1]$内的最小正根,且 R_{m1} 是精确的;

2) 当 $p>2$ 时,$|a_0|^p+\sum_{k=1}^{m}|a_k|r^k\leqslant 1$,$m$ 为正整数,在$|z|=r\leqslant R_{m2}$ 内成立,其中,R_{m2} 是式 $\zeta_m(r):=r(1-r^m)-(1-r)=0$ 在$(0,1]$内的最小正根,且 R_{m2} 是精确的.

证明:因为 $f(z)$是 D 到自身上的解析函数,由引理 A 可知 $a_k|\leqslant 1-|a_0|^2$,其中,$k=1,2,3,\cdots$,则

$$|a_0|^p+\sum_{k=1}^{m}|a_k|r^k\leqslant|a_0|^p+(1-|a_0|^2)\sum_{k=1}^{m}r^k\leqslant|a_0|^p+(1-|a_0|^2)\frac{r(1-r^m)}{1-r}. \tag{3}$$

1) 当 $0<p\leqslant 2$ 时,由于$|f(z)|<1$,所以$|a_0|<1$. 由引理 1 的证明可知$\frac{1-|a_0|^2}{1-|a_0|^p}$关于 $a_0\in[0,1)$单调递增,则有

$$\frac{1-|a_o|^2}{1-|a_o|^p}\frac{r(1-r^m)}{1-r}\leqslant\frac{2}{p}\frac{r(1-r^m)}{1-r}\leqslant 1$$

在 $r\leqslant R_{m1}$ 内成立. 其中,R_{m1} 是 $\psi_m(r):=2r(1-r^m)-p(1-r)=0$ 在$(0,1]$内的最小正根.

事实上,因为有

$$\frac{\partial\psi_m(r)}{\partial r}=-2(m+1)r^m+p+2\geqslant 0,$$

所以,$\psi_m(r)$在$[0,1]$内先递增后递减,由 $\psi_m(0)=-p<0$ 和 $\psi_m(1)=0$ 可知,$r\in\left[0,\left(\frac{p+2}{2m+2}\right)^{\frac{1}{m}}\right]\subset[0,1]$,即当 $p<2m$ 时,存在 $R_{m1}\in(0,1]$,使 $\psi_m(r)=0$.

固定 $a\in[0,1)$,考虑函数

$$f(z)=\frac{a-z}{1-az}=a-(1-a^2)\sum_{k=1}^{\infty}a^{k-1}z^k,\qquad z\in D,$$

易验证 $f(z)$满足定理中的条件,则

$$|a_0|^p+\sum_{k=1}^{m}|a_k|r^k=a^p+(1-a^2)\sum_{k=1}^{\infty}a^{k-1}r^k=a^p+(1-a^2)\frac{r[1-(ar)^m]}{1-ar}.$$

由引理 1 得

$$\frac{1-a^2}{1-a^p}\frac{r[1-(ar)^m]}{1-ar}\leqslant\frac{2}{p}r[1+r+\cdots+r^{m-1}].$$

所以，当 $r>R_{m1}$ 时，$|a_0|^p+\sum_{k=1}^{m}|a_k|r^k>1$，从而说明 R_{m1} 是精确的.

2）当 $p>2$ 时，由于 $|f(z)|<1$，所以 $|a_0|<1$. 将引理 1 应用于式(3)中，可得

$$\frac{1-|a_0|^2}{1-|a_0|^p}\frac{r(1-r^m)}{1-r}\leqslant\frac{r(1-r^m)}{1-r}\leqslant 1.$$

整理得到 $\zeta_m(r):=r(1-r^m)-(1-r)\leqslant 0$，当 $r\leqslant R_{m2}$ 时成立.

类似于 $0<p\leqslant 2$，可得 $R_{m2}\in(0,1]$ 是精确的.

由定理 5，考虑 $p=1$ 的情况，得到推论 1.

推论 1　设 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$ 是单位圆盘上的解析函数，且 $|f(z)|<1$，$z\in D$，则

$$|a_0|+\sum_{k=1}^{m}|a_k|r^k\leqslant 1$$

在 $|z|=r\leqslant R_m$ 内成立，其中，R_m 是方程 $\eta_m(r):=2r(1-r^m)-(1-r)=0$ 在 $(0,1)$ 内的最小正根，且 R_m 是精确的.

基于文献[7]中定理 1 的考虑，在定理 5 的基础上进一步得到定理 6.

定理 6　设 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$ 是单位圆盘上解析函数，且 $|f(z)|<1$，$z\in D$，则

$$|f(z)|+\sum_{k=1}^{m}|a_k|r^k\leqslant 1$$

在 $|z|=r\leqslant R_m$ 内成立，其中，R_m 是方程 $\alpha_m(r)=2r(1+r)(1-r^m)-(1-r)^2=0$ 在 $(0,1)$ 内的最小正根，且 R_m 是精确的.

证明：由于 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$ 是单位圆盘上解析函数，且 $|f(z)|<1$，$f(0)=a_0$，则由引理 A，B，可知 $|a_k|\leqslant 1-|a_0|^2$，其中，$k=1,2,3,\cdots$，以及 $|f(z)|\leqslant\frac{r+|a_0|}{1+r|a_0|}$，则有

$$|f(z)|+\sum_{k=1}^{m}|a_k|r^k\leqslant\frac{r+|a_0|}{1+r|a_0|}+(1-|a_0|^2)\frac{r(1-r^m)}{1-r}.$$

因为有

$$\begin{aligned}u(a_0,r)=&(r+|a_0|)(1-r)+r(1-|a_0|^2)(1-r^m)(1+r|a_0|)-(1-r)(1+r|a_0|)=\\&(1-|a_0|^2)r(1-r^m)(1+r|a_0|)-(1-r^2)(1-|a_0|)=\\&(1-|a_0|)[(1+|a_0|)r(1+r|a_0|)(1-r^m)-(1-r)^2],\end{aligned}$$

由于 $(1+|a_0|)r(1+r|a_0|)(1-r^m)-(1-r)^2$ 关于 $|a_0|$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，所以有

$$u(a_0,r)\leqslant(1-|a_0|)[2r(1+r)(1-r^m)-(1-r)^2].$$

当 $r\leqslant R_m$ 时，有 $\alpha_m(r):=2r(1+r)(1-r^m)-(1-r)^2\leqslant 0$，即 $|f(z)|+\sum_{k=1}^{m}|a_k|r^k\leqslant 1$ 在 $|z|=r\leqslant R_m$ 内成立.

由 $\alpha_m(r)$ 在 $[0,1]$ 的连续性及端点处的值可知

$$\alpha_m(0)=-1,\qquad\alpha_m(1)=0,\qquad\alpha_m\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}-\left[3\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}+\frac{1}{4}\right]>0,$$

所以，存在 $R_m\in(0,1)$，使得 $\alpha_m(r)=0$.

固定 $a\in[0,1)$，考虑函数

$$f(z)=\frac{a-z}{1-az}=a-(1-a^2)\sum_{k=1}^{\infty}a^{k-1}z^k,\qquad z\in D.$$

则有

$$|f(-r)|+\sum_{k=1}^{m}|a_k|r^k=\frac{r+a}{1+ar}+(1-a^2)\sum_{k=1}^{m}a^{k-1}r^k=$$
$$\frac{r+a}{1+ar}+(1-a^2)\frac{r(1-(ar)^m)}{1-ar}.$$

由于有

$$\begin{aligned}h(a,r)=&(r+a)(1-ar)+r(1+ar)(1-a^2)(1-(ar)^m)-(1+ar)(1-ar)=\\&(1-a^2)(1+ar)r(1-(ar)^m)-(1-a)(1-ar)(1-r)=\\&(1-a)(1-ar)[(1+a)r(1+ar)(1+ar+(ar)^2+\cdots+(ar)^{m-1})-(1-r)],\end{aligned}$$

而$[(1+a)r(1+ar)(1+ar+(ar)^2+\cdots+(ar)^{m-1})-(1-r)]$关于 a 在$[0,1]$内单调递增,所以有

$$h(a,r)\leqslant(1-a)(1-ar)[2r(1+r)(1+r+r^2+\cdots+r^{m-1})-(1-r)].$$

故当 $r>R_m$ 时,$|f(-r)|+\sum\limits_{k=1}^{m}|a_k|r^k>1$,从而说明 R_m 是精确的.

类似定理5可得定理7.

定理7 $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kz^k$ 是单位圆盘上的解析函数,且$|f(z)|<1$,$z\in D$,则

$$|f(z)|^2+\sum_{k=1}^{m}|a_k|r^k\leqslant1$$

在$|z|=r\leqslant R_m$ 内成立,其中,R_m 是方程$\beta_m(r):=r(1+r)^2(1-r^m)-(1-r)(1-r^2)=0$ 在$(0,1)$的最小正根,且 R_m 是精确的.

参考文献:

[1] BOHR H. A theorem concerning power series[J]. Proceedings of the London Mathematical Society,1914,13(1190):1-5. DOI:10.1112/plms/s2-13.1.1.

[2] LANDAU E,GAIER D. Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionen-theorie[M]// HAFNER W. Monatshefte für Mathematik und Physik. Berlin:Springer-Verlag,1986.

[3] ROGOSINSKI W. Über Bildschranken bei Potenzreihen und ihren Abschnitten[J]. Mathematische Zeitschrift,1923,17(1):260-276. DOI:10.1007/bf01504347.

[4] MUHANNA Y A,ALI R M. Bohr's phenomenon for analytic functions and the hyperbolicmetric[J]. Mathematische Nachrichten,2013,286(11/12):1059-1065. DOI:10.1002/mana.201200197.

[5] LIU Taishun,WANG Jianfei,TANG Xiaomin. Schwarz lemma at the boundary of the unit ball in $\mathbf{C}^n$ and its applications[J]. Journal of Geometric Analysis,2014,25(3):1890-1914. DOI:10.1007/s12220-014-9497-y.

[6] WANG Jianfei,LIU Taishun. The Roper-Suffridge extension operator and its applications to convex mappings in $\mathbf{C}^2$[J]. Transactions of the American Mathematical Society,2018,370(11):7743-7759. DOI:10.1090/tran/7221.

[7] KAYUMOV I R,PONNUSAMY S. Bohr-Rogosinski radius for analytic functions[J/OL]. (2017-08-18)[2019-01-31]. https://arxiv.org/pdf/1708.05585.pdf.

[8] PAULSEN V I,POPESCU G,SINGH D. On Bohr's inequality[J]. Proceedings of the London Mathematical Society,2002,85(2):493-512. DOI:10.1112/s0024611502013692.

[9] GRAHAM I,KOHR G. Geometric function theory in one and higher dimensions[M]. New York:Marcel Dekker Inc,2003. DOI:10.1201/9780203911624.

[10] LIU Mingsheng,SHANG Yinmiao,XU Junfeng. Bohr-type inequalities of analytic functions[J]. Journal of Inequalities and Applications,2018,345(1):1-13. DOI:10.1186/s13660-018-1937-y.

(责任编辑:黄晓楠 英文审校:黄心中)