第 40 卷 第 6 期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 40 No. 6
2019 年 11 月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Nov. 2019

DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.201903003

一类单叶调和函数的拟共形性质

傅冬绵[1],黄心中[2]

(1. 华侨大学 工商管理学院,福建 泉州 362021;
2. 华侨大学 数学科学学院,福建 泉州 362021)

摘要: 研究单位圆盘 $D=\{z \mid |z|<1\}$ 上满足 $\mathrm{Re}\{\alpha z[h''(z)+g''(z)]+h'(z)+g'(z)\}>0, z\in D, \alpha>0$ 的单叶调和函数 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 的拟共形性质,对复伸张 $w(z)=\dfrac{g'(z)}{h'(z)}$ 的模给出最好的最小上界估计,进而给出该类函数到 D 的余集 D^c 上的拟共形延拓,并对其复伸张的模给出最好的最小上界估计,改进和推广了 2004 年 Yalcin S 等的研究成果.

关键词: 单叶调和函数;拟共形映照;复特征模估计;调和拟共形延拓

中图分类号: O 174.51;O 174.55 **文献标志码**: A **文章编号**: 1000-5013(2019)06-0812-05

On Quasiconformal Properties for One Set of Univalent Harmonic Mappings

FU Dongmian[1], HUANG Xinzhong[2]

(1. College of Business Administration, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China;
2. School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: We study the quasiconformal properties of the univalent harmonic functions $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ on the unit disk $D=\{z \mid |z|<1\}$ with $\mathrm{Re}\{\alpha z[h''(z)+g''(z)]+h'(z)+g'(z)\}>0$, $z\in D$, $\alpha>0$, and obtain the best upper bound estimation for the module of the dilatation function $w(z)=\dfrac{g'(z)}{h'(z)}$. Moreover, we construct their harmonic quasiconformal extension functions to the domain D^c of D, and give the best upper bound estimation for the module of their dilatation functions. The results improve and generalize the ones made by Yalcin S, *et al* in 2004.

Keywords: univalent harmonic function; quasiconformal mapping; module estimate of complex dilatation; harmonic quasiconformal extension

1 预备知识

平面区域 $\Omega\subset\mathbf{C}$ 上具有二阶连续可微的复值函数 $f=u+\mathrm{i}v$ 是调和的,u,v 都是 Ω 上的实值调和函数.如果 Ω 为单连通区域,则 f 可表示为 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$,$h(z)$,$g(z)$ 为 Ω 上的解析函数.当 f 为单位圆盘 $D=\{z \mid |z|<1\}$ 上的调和函数,满足 $f(0)=f_z(0)-1=0$,则 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n+\overline{\sum_{n=1}^{\infty}b_n z^n}$.

Lewy[1] 证明了 $f(z)$ 为单位圆盘 D 上保向、局部单叶,当且仅当 $J_f(z)=|f_z(z)|^2-|f_{\bar z}(z)|^2>0$,

收稿日期: 2019-03-03
通信作者: 傅冬绵(1961-),女,副教授,主要从事函数论与计算机理论的研究. E-mail:fudm@163.com.
基金项目: 华侨大学中青年教师科技创新资助项目(600005-Z16J063)

即 $f(z)$ 的复伸张的模满足 $|w(z)|=\left|\dfrac{g'(z)}{h'(z)}\right|<1$. 若 $f(z)$ 在 D 上单叶，满足 $|w(z)|\leqslant k<1$，则称 $f(z)$ 为调和 K-拟共形映照，$K=\dfrac{1+k}{1-k}\geqslant 1$. K-拟共形映照的几何意义在于把微小的圆映成微小的椭圆，它的长、短轴之比限制于 K 内. 单位圆盘上的单叶函数、拟共形映照和单叶调和函数是 3 个不同的函数类，有许多共同性质，又有不少独特的特征，引起函数论学者的兴趣，如对系数猜想、偏差性质、区域模的增长性等问题的研究[2-5]. 对单位圆盘 D 上的调和函数 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}=z+\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_nz^n+\overline{\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_nz^n}$，令 $\mathrm{HP}(\alpha)=\{f(z)=h(z)+\overline{g(z)}\mid \mathrm{Re}\{\alpha z[h''(z)+g''(z)]+h'(z)+g'(z)\}>0,\alpha\geqslant 0\}$. Yalcin 等[6]研究 HP($\alpha$)类函数的单叶性及其偏差估计等问题，证明了下列定理.

定理 A　设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}=z+\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_nz^n+\overline{\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_nz^n}$ 是单位圆盘 D 上的调和函数，满足

$$\sum_{n=1}^{\infty}n[\alpha(n-1)+1](|a_n|+|b_n|)\leqslant 2,\qquad 0\leqslant|b_1|<1,\quad \alpha\geqslant 0. \tag{1}$$

则调和函数 $f(z)$ 在单位圆盘 D 上单叶保向，且 $f(z)\in\mathrm{HP}(\alpha)$.

条件(1)给出 $f(z)\in\mathrm{HP}(\alpha)$ 的一个必要条件，文献[6]引入 HP(α)的一个子族：$\mathrm{HF}(\alpha)=\left\{f(z)=h(z)+\overline{g(z)}\mid f(z)\in\mathrm{HP}(\alpha),h(z)=z-\sum\limits_{n=2}^{\infty}|a_n|z^n,g(z)=z-\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|z^n\right\}$，并对该类函数的有界性、偏差、像区域等特征进行研究. 对于 HF(α)类函数的刻画，文献[6]证明下列两个主要定理.

定理 B　设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}=z+\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_nz^n+\overline{\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_nz^n}$ 是单位圆盘 D 上的调和函数，则 $f(z)\in$ HF(α)的充要条件为

$$\sum_{n=1}^{\infty}n[\alpha(n-1)+1](|a_n|+|b_n|)\leqslant 2,\qquad a_1=1,\quad \alpha\geqslant 0.$$

定理 C　设 $f(z)\in\mathrm{HF}(\alpha)$，则

$$(1-|b_1|)r-\frac{1-|b_1|}{2(1+\alpha)}r^2\leqslant|f(z)|\leqslant(1+|b_1|)r+\frac{1-|b_1|}{2(1+\alpha)}r^2,\qquad |z|=r+1.$$

近年来，局部单叶调和函数的整体单叶性，单叶调和函数何时成为调和拟共形映照，单叶调和函数何时可以到余集上的拟共形延拓等问题受到学者极大的关注，并得到一些成果[7-14]. 文中对文献[6]所考虑的调和函数类做进一步研究，刻画出该类单叶调和函数可成为单叶调和拟共形映照的性质，给出该类调和函数到单位圆盘外区域的单叶拟共形延拓，并分别得到复伸张模的最小上界精确估计.

例 1　令 $f(z)=z+b\bar{z}+\dfrac{1-b}{2}\overline{z^2}$，$0<b<1$，$z\in D$，容易证明 $f(z)$ 为单位圆盘 D 上的单叶调和函数，其复伸张函数为 $w(z)=b+(1-b)z$，从而 $f(z)$ 不是单位圆盘 D 上的调和拟共形映照.

2　主要定理及证明

研究满足定理 A 条件的单叶调和函数的拟共形性质，基于例 1，该类单叶调和函数必须有规范化的条件，证明定理 1.

定理 1　设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}=z+\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_nz^n+\overline{\sum\limits_{n=2}^{\infty}b_nz^n}$ 是 D 上的调和函数，其系数满足

$$\sum_{n=2}^{\infty}n[\alpha(n-1)+1](|a_n|+|b_n|)\leqslant 1,\qquad \alpha>0, \tag{2}$$

则 $f(z)$ 为 D 上的 $1+\dfrac{2}{\alpha}$-拟共形映照，$K=1+\dfrac{2}{\alpha}$ 为最大伸张模估计的最小上界，极值函数为 $f(z)=z+\dfrac{1}{2(1+\alpha)}\overline{z^2}$.

证明:设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 是单位圆盘 D 上的调和函数,满足定理1的条件,根据定理A,$b_1=0$,则 $f(z)$ 为单位圆盘 D 上的单叶调和函数.又根据文献[1],有 $h'(z)\neq 0$.

由于 $\alpha>0$,有

$$|h'(z)|=|1+\sum_{n=2}^{\infty}na_nz_{n-1}|\geqslant 1-\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|\geqslant 1-\sum_{n=2}^{\infty}n[\alpha(n-1)+1]|a_n|.$$

另一方面,由式(2)可得

$$1-\sum_{n=2}^{\infty}n[\alpha(n-1)+1]|a_n|\geqslant\sum_{n=2}^{\infty}n[\alpha(n-1)+1]|b_n|.$$

故有

$$|h'(z)|\geqslant\sum_{n=2}^{\infty}n[\alpha(n-1)+1]|b_n|\geqslant(1+\alpha)\sum_{n=2}^{\infty}n|b_n|\geqslant(1+\alpha)|g'(z)|,\qquad z\in D.$$

从而有

$$|w(z)|=\left|\frac{g'(z)}{h'(z)}\right|\leqslant\frac{1}{1+\alpha}.$$

这证明 $f(z)$ 为单位圆盘 D 上的 $1+\frac{2}{\alpha}$ 拟共形映照.要证明 $K=1+\frac{2}{\alpha}$ 最好的最小上界估计,考虑函数 $f(z)=z+1+\frac{1}{2(1+\alpha)}\overline{z^2}$,其满足定理1的条件,且 $f(z)$ 为单位圆盘 D 上的 $1+\frac{2}{\alpha}$ 拟共形映照,这说明 $K=1+\frac{2}{\alpha}$ 是可达到的,定理1证毕.

研究满足定理A条件下,单叶调和函数是否可以调和延拓到整个复平面上,证明定理2.

定理2 设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n+\overline{\sum_{n=2}^{\infty}b_nz^n}$ 是 D 上的调和函数,其系数满足

$$\sum_{n=2}^{\infty}n[\alpha(n-1)+1](|a_n|+|b_n|)\leqslant 1,\qquad \alpha>0.$$

令 $F_f(z)=\begin{cases}f(z), & |z|\leqslant 1,\\ \beta(z), & |z|>1,\end{cases}$ $\beta(z)=H(z)+\overline{G(z)}=z+\sum_{n=2}^{\infty}\overline{b_n}\frac{1}{z^n}+\overline{\sum_{n=2}^{\infty}\overline{a_n}\frac{1}{z^n}}$,$|z|>1$,$F_f(z)$ 是调和拟共形映照 $f(z)$ 从单位圆盘 D 到单位圆盘外 D^c 上的单叶保向调和映照延拓,且 $F_f(z)$ 是 D^c 上的调和 $\frac{1}{1+\alpha}$ 拟共形映照,$K=1+\frac{2}{\alpha}$ 是拟共形延拓的最大伸张模估计的最小上界,函数 $f(z)=z+\frac{1}{2(1+\alpha)}z^2$ 到 D^c 上的调和拟共形延拓 $\beta_0(z)=z+\frac{1}{2(1+\alpha)}\frac{1}{\overline{z^2}}$ 为 D^c 上的 $1+\frac{2}{\alpha}$ 拟共形映照.

证明:根据定理1,$f(z)$ 在 D 内为调和拟共形映照.根据拟共形映照理论,$f(z)$ 可连续延拓到边界上.由构造函数 $F(z)$,通过验算,可得在单位圆 $|z|=1$ 上,$f(\exp(\mathrm{i}\theta))=\beta(\exp(\mathrm{i}\theta))$,$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$,且 $\beta(z)$ 为 D^c 上的调和函数,故 $F_f(z)$ 是 $f(z)$ 从 D 到 D^c 上的调和延拓.

当 $z\in D^c$ 时,对于 $1<|z_1|\leqslant|z_2|<\infty$,$z_1\neq z_2$,有

$$|\beta(z_1)-\beta(z_2)|\geqslant\left|z_1-z_2+\sum_{n=2}^{\infty}\overline{a_n}\frac{1}{z_1^n}-\sum_{n=2}^{\infty}\overline{a_n}\frac{1}{z_2^n}\right|-\left|\sum_{n=2}^{\infty}\overline{b_n}\frac{1}{z_1^n}-\sum_{n=2}^{\infty}\overline{b_n}\frac{1}{z_2^n}\right|\geqslant$$

$$|z_1-z_2|\left(\begin{array}{l}1-\left|\sum_{n=2}^{\infty}\overline{a_n}\frac{(z_2^{n-1}+z_2^{n-2}z_1+\cdots+z_2z_1^{n-2}+z_1^{n-1})}{z_1^nz_2^n}\right|-\\ \left|\sum_{n=2}^{\infty}\overline{b_n}\frac{(z_2^{n-1}+z_2^{n-2}z_1+\cdots+z_2z_1^{n-2}+z_1^{n-1})}{z_1^nz_2^n}\right|\end{array}\right)>$$

$$|z_1-z_2|\left[1-\left(\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|+\sum_{n=2}^{\infty}n|b_n|\right)\right].$$

由假设条件 $\sum_{n=2}^{\infty}n[\alpha(n-1)+1](|a_n|+|b_n|)\leqslant 1$,$\alpha>0$,有 $\sum_{n=2}^{\infty}n(|a_n|+|b_n|)\leqslant 1$,$\frac{1}{(1+\alpha)}<1$.故 $\beta(z)$ 在 D^c 上是单叶调和函数.

对任何 $z\in D$,经计算可得

$$H_z(z)=1-\sum_{n=2}^{\infty}\overline{b_n}\frac{n}{z^{n+1}},\qquad G_z(z)=-\sum_{n=2}^{\infty}\overline{a_n}\frac{n}{z^{n+1}},$$

$$\left|\frac{G_z(z)}{H_z(z)}\right|=\left|\frac{-\sum_{n=2}^{\infty}\overline{a_n}\frac{n}{z^{n+1}}}{1-\sum_{n=2}^{\infty}\overline{b_n}\frac{n}{z^{n+1}}}\right|\leqslant\frac{\sum_{n=2}^{\infty}n\mid a_n\mid}{1-\sum_{n=2}^{\infty}n\mid b_n\mid}.$$

令 $x=\sum_{n=2}^{\infty}n\mid a_n\mid$,$y=\sum_{n=2}^{\infty}n\mid b_n\mid$,则 $x\geqslant0$,$y\geqslant0$,$x+y\leqslant\frac{1}{(1+\alpha)}$,通过计算极值,可得 $\left|\frac{G_z(z)}{H_z(z)}\right|\leqslant\frac{1}{1+\alpha}$,这证明了 $\beta(z)$为 D^c 上的$\frac{1}{1+\alpha}$拟共形映照.

经计算,$f(z)=z+\frac{1}{2(1+\alpha)}z^2$,$z\in D$,满足定理 2 的条件,在 D^c 上的调和拟共形延拓为$\beta_0(z)=z+\frac{1}{2(1+\alpha)}\frac{1}{\overline{z}^2}$,$1<|z|<\infty$,其最大伸张模为 $K=1+\frac{2}{\alpha}$,定理 2 证毕.

定理 B 说明满足定理 B 条件的单叶调和函数是有界的.

定理 3　设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n+\overline{\sum_{n=2}^{\infty}b_nz^n}$ 是单位圆盘 D 上的调和函数,满足

$$\sum_{n=1}^{\infty}n[\alpha(n-1)+1](\mid a_n\mid+\mid b_n\mid)\leqslant2,\qquad 0\leqslant\mid b_1\mid<1,\quad \alpha>0,$$

则对任何 $z\in D$,有

$$\mid f(z)\mid\leqslant(1+\mid b_1\mid)\mid z\mid+\frac{2(1+\mid b_1\mid)}{\alpha}[\mid z\mid+(1-\mid z\mid)\ln(1-\mid z\mid)]\leqslant$$
$$(1+\mid b_1\mid)+\frac{2(1+\mid b_1\mid)}{\alpha}.$$

证明:根据定理 3 的条件,由定理 A 可知,该类调和函数是单叶的.有界性证明如下.

$$\sum_{n=2}^{\infty}n[\alpha(n-1)+1](\mid a_n\mid+\mid b_n\mid)\leqslant1-\mid b_1\mid.$$

因此,当 $\alpha\geqslant1$ 时,对于任何 $n\geqslant2$ 的正整数,有

$$\mid a_n\mid\leqslant\frac{1-\mid b_1\mid}{\alpha n(n-1)},\qquad \mid b_n\mid\leqslant\frac{1-\mid b_1\mid}{\alpha n(n-1)},$$

$$\mid h(z)\mid\leqslant\left|z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\right|\leqslant\mid z\mid+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1-\mid b_1\mid}{\alpha n(n-1)}\mid z^n\mid=$$
$$\mid z\mid+\frac{1-\mid b_1\mid}{\alpha}[\mid z\mid+(1-\mid z\mid)\ln(1-\mid z\mid)],$$

$$\mid g(z)\mid\leqslant\left|b_1z+\sum_{n=2}^{\infty}b_nz^n\right|\leqslant\mid b_1z\mid+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1-\mid b_1\mid}{\alpha n(n-1)}\mid z^n\mid=$$
$$\mid b_1\mid\mid z\mid+\frac{1-\mid b_1\mid}{\alpha}[\mid z\mid+(1-\mid z\mid)\ln(1-\mid z\mid)].$$

从而对任何 $z\in D$,有

$$\mid f(z)\mid\leqslant\mid h(z)\mid+\mid g(z)\mid\leqslant$$
$$(1+\mid b_1\mid)\mid z\mid+\frac{2(1-\mid b_1\mid)}{\alpha}[\mid z\mid+(1-\mid z\mid)\ln(1-\mid z\mid)]\leqslant$$
$$(1+\mid b_1\mid)+\frac{2(1-\mid b_1\mid)}{\alpha}.$$

当 $0<\alpha<1$ 时,对于任何 $n\geqslant2$ 的正整数,有

$$\mid a_n\mid\leqslant\frac{1-\mid b_1\mid}{\alpha n^2}<\frac{1-\mid b_1\mid}{\alpha n(n-1)},\qquad \mid b_n\mid\leqslant\frac{1-\mid b_1\mid}{\alpha n^2}<\frac{1-\mid b_1\mid}{\alpha n(n-1)}.$$

从而对任何 $z\in D$,同样得到

$$
\begin{aligned}
|f(z)| \leqslant |h(z)| + |g(z)| \leqslant \\
(1+|b_1|)|z| + \frac{2(1-|b_1|)}{\alpha}[|z| + (1-|z|)\ln(1-|z|)] \leqslant \\
(1+|b_1|) + \frac{2(1-|b_1|)}{\alpha}.
\end{aligned}
$$

定理 3 证毕.

参考文献:

[1] LEWY H. On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings[J]. Bull Amer Math Soc,1936,42(10):689-692. DOI:10.1090/S0002-9904-1936-06397-4.

[2] CLUNIE J,SHEIL-SMALL T. Harmonic univalent functions[J]. Ann Acad Sci Fenn Ser A I Math,1984,9:3-25.

[3] AHLFORS L. Lectures on quasiconformal mappings[M]. Providence:American Mathematical Society,2006.

[4] KALAJ D. Quasiconformal harmonic mappings and close to convex domains[J]. Filomat,2010,24(1):63-68. DOI:10.2298/FIL1001063K.

[5] REICH E. On extremal quasiconformal extensions of conformal mappings[J]. Israel J Math,1977,28(1/2):91-97. DOI:10.1007/bf02759783.

[6] YALCIN S,ÖZTÜRK M. A new subclass of complex harmonic functions[J]. Mathematical Ineqalities and Applications,2004,7(1):55-61.

[7] PAVLOVIC M. Boundary correspondence under harmonic quasiconformal homeomorphisms of the unit disk[J]. Ann Acad Sci Fenn Math,2002,27:365-372.

[8] 黄心中,傅冬绵. 微分算子作用下平面调和映照的单叶半径和 Bloch 常数估计[J]. 数学年刊,2013,34A(6):653-662.

[9] 潘旭玲,黄心中. 一类新的 Salagean-Type 单叶调和映照的特征[J]. 华侨大学学报(自然科学版),2013,34(4):466-470. DOI:10.11830/issn.1000-5013.2013.04.0466.

[10] 潘旭玲,黄心中. 一类单位圆盘上单叶调和映照的延拓定理[J]. 华侨大学学报(自然科学版),2013,34(6):701-705. DOI:10.11830/issn.1000-5013.2013.06.0701.

[11] 王其文,黄心中. 在微分算子作用下调和函数的单叶半径估计[J]. 华侨大学学报(自然科学版),2014,35(2):227-231. DOI:10.11830/issn.1000-5013.2014.02.0227.

[12] 黄心中. 单位圆到水平条形无界区域的调和拟共形映照[J]. 数学学报,2014,57(5):875-880.

[13] FU Dongmian,HUANG Xinzhong. Harmonic K-quasiconformal mappings from unit disk onto half planes[J]. Bull Malays Math Sci Soc,2016,39(1):339-347. DOI:10.1007/s40840-015-0174-5.

[14] 黄心中. 平面上具有有界 Frechet 导数的调和映照单叶半径的精确估计[J]. 中国科学:数学,2014,44(6):685-692. DOI:10.1360/012014-24.

(**责任编辑:** 钱筠 **英文审校:** 黄心中)