第 40 卷　第 5 期
2019 年 9 月

华侨大学学报（自然科学版）
Journal of Huaqiao University (Natural Science)

Vol. 40　No. 5
Sep. 2019

DOI：10. 11830/ISSN. 1000-5013. 201810077

拟共形映照的参数表示

林珍连

（华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021）

摘要： 假设 $f^{\mu(z)}(z)$ 表示全平面到自身保持 $0,1,\infty$ 不动以 $\mu(z)$ 为复特征的拟共形映照，Ahlfors 给出此类拟共形映照的一种参数表示式，文中给出此类映照的另一种参数表示式. 作为它的应用，给出上半平面到自身保持 $0,1,\infty$ 不动的拟共形映照的参数表示式.

关键词： 拟共形映照；参数表示；复特征；复平面

中图分类号： O 174. 55　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000-5013(2019)05-0691-03

Parametric Representation of Quasiconformal Mappings

LIN Zhenlian

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Suppose $f^{\mu(z)}(z)$ is a quasiconformal mapping of complex plane on itself with the dilatation $\mu(z)$ keeping 0, 1, ∞ fixed, Ahlfors gave one kind of parametric representation for this quasiconformal mapping. This paper will give another form of parametric representation for this kind of mapping. As its application, an parameter representation for quasiconformal mapping of upper-half plane onto itself keeping 0, 1, ∞ fixed is also given.

Keywords: quasiconformal mapping; parametric representation; complex dilation; complex plane

1　预备知识

设 $w=f(z)$ 是平面区域 D 到区域 G 的保向同胚映照，则称 $w=f(z)$ 是平面区域 D 到区域 G 的拟共形映照. 若 $f(z)$ 满足以下 2 个条件：1) 在区域 D 上，$f(z)$ 在几乎所有水平线上和几乎所有铅直线上是绝对连续的(ACL)；2) 几乎到处 $|f_{\bar{z}}(z)|\leqslant k|f_z(z)|$，$0<k<1$，称 $\mu(z)=\dfrac{f_{\bar{z}}(z)}{f_z(z)}$ 为 $w=f(z)$ 的复特征. 用 $f^{\mu(z)}(z)$ 表示复特征为 $\mu(z)$ 的拟共形映照. 拟共形映照参数表示问题是拟共形映照理论中十分重要的内容. 夏道行[1]首先对这一问题进行研究. 之后，一些学者对这部分内容进行深入研究，并用它解决拟共形映照的模数的估计和面积偏差估计的极值问题[2-10]. Ahlfors[2]讨论了全平面到自身保持 $0,1,\infty$ 不动的拟共形映照对参数的依赖问题，证明了定理 A.

定理 A[2]　假设 $\mu(z,t+s)=\mu(z,t)+sv(z,t)+s\varepsilon(z,t)$，其中，$\mu(z,t),v(z,t),\varepsilon(z,t)\in L^{\infty}$，$\|\mu(z,t)\|_{\infty}<1$ 且 $\|\varepsilon(z,t)\|_{\infty}\to 0$，$s\to 0$，$f^{\mu(z)}(z)$ 是全平面到自身保持 $0,1,\infty$ 不动的复特征为 $\mu(z)$ 拟共形映照，那么，在全平面的一切致密子集上一致地成立 $f^{\mu(z,t+s)}(\zeta)=f^{\mu(z,t)}(\zeta)+sF(\zeta,t)+\circ(s)$，$s\to 0$. 其中，

$$F(\zeta,t)=-\frac{1}{\pi}\iint v(z,t)R(f^{\mu(z,t)}(z),f^{\mu(z,t)}(\zeta))(f_z^{\mu(z,t)}(z))^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\tag{1}$$

收稿日期： 2018-10-29

通信作者： 林珍连(1970-)，副教授，主要从事函数论的研究. E-mail：zhenlian@hqu.edu.cn.

基金项目： 国家自然科学基金资助项目(11471128)；福建省自然科学基金资助项目(2019J01066)

$$R(z,\zeta)=\frac{1}{z-\zeta}-\frac{\zeta}{z-1}+\frac{\zeta-1}{z}=\frac{\zeta(\zeta-1)}{z(z-1)(z-\zeta)}. \tag{2}$$

下文给出定理 A 中式(1),(2)的另一种表示形式,作为应用,将给出上半平面到自身保持 0,1,∞不动的拟共形映照的参数表示式.

2 主要定理和证明

定理 1 设 $\mu(z,t)$是定义在$|z|<+\infty$,$0\leqslant t\leqslant 1$ 的复值可测函数,满足 $\mu(z,t+s)=\mu(z,t)+sv(z,t)+\circ(s)$,$s\to 0$. 其中,$\mu(z,t)$,$v(z,t)\in L^{\infty}$,$\|\mu(z,t)\|_{\infty}<1$,则全平面到自身保持 0,1,∞不动的拟共形映照 $w=f^{\mu(z,t)}(z,t)$在全平面的一切致密子集上一致地成立$\dfrac{\partial w}{\partial t}=F(w,t)$,$w=f^{\mu(z,t)}(z,t)$. 其中,

$$F(w,t)=-\frac{w(w-1)}{\pi}\iint\limits_{\omega平面}\frac{v((f^{\mu})^{-1}(\omega,t),t)\exp(-2\mathrm{i}\cdot\arg(f^{\mu})_{\omega}^{-1}(\omega,t))}{1-|\mu((f^{\mu})^{-1}(\omega,t),t)|^{2}}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\tau,$$

$$\omega=f^{\mu}(\zeta,t)=\sigma+\mathrm{i}\tau.$$

证明:Ahlfors[2]给出在 $t=0$ 时,$w=f^{\mu(z,t)}(z,t)$ 的 t 导数公式,若 $\mu(z,t)=tv(z)+\circ(t)$,$t\to 0$,则在全平面的一切致密子集上一致地成立,即

$$\left.\frac{\partial f(z,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=F(z,0),$$

或

$$f(z,t)=z+tF(z,0)+\circ(t),\qquad t\to 0. \tag{3}$$

其中

$$F(z,0)=-\frac{1}{\pi}\iint R(z,\zeta)v(\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,\qquad \zeta=\xi+\mathrm{i}\eta. \tag{4}$$

假定

$$\mu(z,t+s)=\mu(z,t)+sv(z,t)+\circ(s),\qquad s\to 0. \tag{5}$$

式(5)中:$\mu(z,t)$,$v(z,t)\in L^{\infty}$;$\|\mu(z,t)\|_{\infty}<1$. 令 $w=f(z,t)=f^{\mu}(z,t)$,考虑 $f^{\mu(z,t+s)}(z,t+s)=f^{\lambda}\circ f^{\mu(z,t)}(z,t)$,则

$$\begin{aligned}\lambda(f^{\mu}(z,t),t,s)&=\frac{\mu(z,t+s)-\mu(z,t)}{1-\overline{\mu(z,t)}\mu(z,t+s)}\times\frac{f^{\mu(z,t)}(z,t)}{\overline{f^{\mu(z,t)}}_{\bar z}(z,t)}\\&=\frac{\mu(z,t+s)-\mu(z,t)}{1-\overline{\mu(z,t)}\mu(z,t+s)}\exp(2\mathrm{i}\cdot\arg f_{z}^{\mu(z,t)}(z,t))\\&=s\frac{v(z,t)}{1-|\mu(z,t)|^{2}}\exp(2\mathrm{i}\cdot\arg f_{z}^{\mu(z,t)}(z,t))+\circ(s),\qquad s\to 0,\end{aligned}$$

或

$$\lambda(w,t,s)=s\frac{v((f^{\mu})^{-1}(w,t),t)}{1-|\mu((f^{\mu})^{-1}(w,t),t)|^{2}}\exp(-2\mathrm{i}\cdot\arg(f^{\mu})_{w}^{-1}(w,t))+\circ(s),\qquad s\to 0. \tag{6}$$

由式(3)及式(5)可得

$$f^{\lambda}(w,t,s)=f^{\mu}((f^{\mu})^{-1}(w,t),t+s)=w+sF(w,t)+\circ(s),\qquad s\to 0,$$

即

$$f^{\mu}(z,t+s)=f^{\mu}(z,t)+sF(f^{\mu}(z,t),t)+\circ(s),\qquad s\to 0,$$

或

$$\frac{\partial w}{\partial t}=F(w,t),\qquad w=f^{\mu(z,t)}(z,t).$$

由式(4)及式(6)可得

$$F(w,t)=-\frac{w(w-1)}{\pi}\iint\limits_{\omega平面}\frac{\dfrac{v((f^{\mu})^{-1}(\omega,t),t)}{1-|\mu((f^{\mu})^{-1}(\omega,t),t)|^{2}}\exp(-2\mathrm{i}\arg(f^{\mu})_{\omega}^{-1}(\omega,t))}{\omega(\omega-1)(\omega-w)}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\tau, \tag{7}$$

而 $\omega=f^{\mu}(\zeta)=\sigma+\mathrm{i}\tau$.

定理 2 假设 $\mu(z,t)$是定义在 $\mathrm{Im}\,z>0$,$0\leqslant t\leqslant 1$ 的复值可测函数,满足条件 $\mu(z,t+s)=\mu(z,t)+sv(z,t)+\circ(s)$,$s\to 0$. 其中,$\mu(z,t)$,$v(z,t)\in L^{\infty}$,$\|\mu(z,t)\|_{\infty}<1$,则上半平面到自身保持 0,1,∞不动的拟共形映照 $w=f^{\mu(z,t)}(z,t)$在上半平面的一切致密子集上一致地成立

$$f^{\mu}(z,t+s)=f^{\mu}(z,t)+sF(f^{\mu}(z,t),t)+\circ(s),\qquad s\to 0, \tag{8}$$

或
$$\frac{\partial w}{\partial t}=F(w,t),\qquad w=f^{\mu(z,t)}(z,t),\tag{9}$$

$$F(w,t)=-\frac{w(w-1)}{\pi}\iint_{\operatorname{Im}\omega>0}\left[\frac{\varphi(\omega,t)}{\omega(\omega-1)(\omega-w)}+\frac{\overline{\varphi(\omega,t)}}{\bar{\omega}(\bar{\omega}-1)(\bar{\omega}-w)}\right]\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\tau,\tag{10}$$

$$\varphi(\omega,t)=\frac{v((f^{\mu})^{-1}(\omega,t),t)}{1-|\mu((f^{\mu})^{-1}(\omega,t),t)|^{2}}\exp(-2\mathrm{i}\arg(f^{\mu})_{\omega}^{-1}(\omega,t)),\qquad \operatorname{Im}\omega>0.\tag{11}$$

证明：因为 $w=f^{\mu(z,t)}(z,t)$ 可以连续延拓到实轴，定义 $w(z,t)=\begin{cases}f^{\mu(z,t)}(z,t),\ \operatorname{Im}z\geqslant 0,\\ \overline{f^{\mu(z,t)}(\bar{z},t)},\operatorname{Im}z<0.\end{cases}$ 则 $w(z,t)$ 的复特征 $\kappa(z,t)$ 为 $\kappa(z,t)=\begin{cases}\mu(z,t),\operatorname{Im}z\geqslant 0,\\ \overline{\mu(\bar{z},t)},\operatorname{Im}z<0.\end{cases}$ 它符合定理 1 的条件，所以可定义 $\psi(\omega,t)=\begin{cases}\varphi(\omega,t),\operatorname{Im}\omega\geqslant 0,\\ \overline{\varphi(\bar{\omega},t)},\operatorname{Im}\omega<0.\end{cases}$

根据定理 1 可知，式(8)和式(9)对

$$F(w,t)=-\frac{w(w-1)}{\pi}\iint_{\omega\text{平面}}\frac{\psi(\omega,t)}{\omega(\omega-1)(\omega-w)}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\tau$$

成立，进一步有

$$\begin{aligned}F(w,t)&=-\frac{w(w-1)}{\pi}\left[\iint_{\operatorname{Im}\omega>0}\frac{\varphi(\omega,t)}{\omega(\omega-1)(\omega-w)}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\tau+\iint_{\operatorname{Im}\omega<0}\frac{\overline{\varphi(\bar{\omega},t)}}{\omega(\omega-1)(\omega-w)}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\tau\right]\\&=-\frac{w(w-1)}{\pi}\iint_{\operatorname{Im}\omega>0}\left[\frac{\varphi(\omega,t)}{\omega(\omega-1)(\omega-w)}+\frac{\overline{\varphi(\omega,t)}}{\bar{\omega}(\bar{\omega}-1)(\bar{\omega}-w)}\right]\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

故命题得证.

根据上述的定理 2 可以得到其他区域的拟共形映照的参数表示式.

参考文献：

[1] 夏道行. 拟共形映照的参数表示[J]. 科学记录，1959(9)：323-329.

[2] AHLFORS L. Lectures on quasiconformal mappings[M]. New York：Van Nostrand，1966.

[3] GEHING F，REICH E. Area distortion of under quasiconformal mappings[J]. Ann Acad Sci Fenn Ser AI Math，1996(388)：1-14. DOI：10.5186/aasfm.1966.388.

[4] HE Chengqi. A parametric representation of quasiconformal extensions[J]. Chinese Science Bulletin，1980，25(9)：721-724.

[5] ASTALA K，IWANIEC T，MARTIN T. Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane[M]. Princeton：Princeton University Press，2009.

[6] ASTALA K，NESI V. Composites and quasiconformal mappings：New optimal bounds in two dimensions[J]. Calc Var Partial Differential Equations，2003，144(6)：2593-2601. DOI：10.1007/s00526-003-0145-9.

[7] ASTALA K. Area distortion of quasiconformal mappings[J]. Acta Math，1994，173(1)：37-60. DOI：10.1007/BF02392568.

[8] EREMENKO A，HAMILTON D H. On the area distortion by quasiconformal mapping[J]. Proc Amer Math Soc，1995，123(9)：2793-2797. DOI：10.1090/s0002-9939-1995-1283548-8.

[9] 林珍连. 上半平面某类调和拟共形映照的特征估计[J]. 华侨大学学报(自然科学版)，2016，37(1)：125-128. DOI：10.11830/ISSN.1000-5013.2016.01.0125.

[10] 林珍连. 某些调和单叶函数的稳定性及系数估计[J]. 华侨大学学报(自然科学版)，2009，30(6)：718-719. DOI：10.11830/issn.1000-5013.2009.06.0718.

(责任编辑：钱筠　　英文审校：黄心中)