

DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.201810014



求解二维 Allen-Cahn 方程的 两种 ADI 格式

吴龙渊, 汪精英, 翟术英

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 为了构建二维 Allen-Cahn 方程的高效数值格式, 利用算子分裂方法将原方程离散成非线性方程和二维热传导方程, 其中, 非线性方程有解析解, 二维热传导方程时间离散采用 Crank-Nicolson 格式, 空间离散分别采用二阶中心差分 and 四阶 Padé 逼近, 得到两个稳定的数值格式. 数值实验结果表明: 格式具有有效性; 能量呈现递减规律.

关键词: Allen-Cahn 方程; 算子分裂; 交替方向隐格式; 傅里叶分析; 极大值原理

中图分类号: O 241.8 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5013(2019)03-0412-09

Two ADI Schemes for Solving Two-Dimensional Allen-Cahn Equations

WU Longyuan, WANG Jingying, ZHAI Shuying

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Construct an efficient numerical scheme for the two-dimensional Allen-Cahn equation. The original equation is discretized into a nonlinear equation and a two-dimensional heat conduction equation by using the operator splitting method in which the nonlinear equation has an analytical solution. To the two-dimensional heat conduction equation, the time dispersion is in the Crank-Nicolson scheme, and the spatial discretization is obtained by using the second-order center difference and the fourth-order Padé approximation respectively, we two stable numerical schemes. Numerical experiments demonstrate the validity of the schemes and the law of energy diminution.

Keywords: Allen-Cahn equation; operator split; alternating direction implicit scheme; Fourier analysis; maximum principle

Allen-Cahn 方程是描述微观扩散理论中弯曲反相边界运动的一类方程^[1], 在材料流体动力学和反应扩散问题中有着广泛的应用, 如可浸液体中的粗化动力学^[2]、晶体生长^[3]、人群扩散现象^[4]、随机扰动^[5]和图像处理^[6-7]问题等. Du 等^[8]采用谱方法解决非局部 Allen-Cahn 问题. Lee 等^[9]利用半解析谱 (SAFS) 方法计算 Allen-Cahn 方程. Xiao 等^[10]分析 Allen-Cahn 方程有限元方法的稳定性. Zhai 等^[11]提出一种线性化高阶紧致差分方法, 并采用交替方向隐格式 (ADI) 格式减少计算量. Tang 等^[12]建立求解 Allen-Cahn 问题的隐/显格式, 并证明格式满足极大值原理. Aderogba 等^[13]采用显式非标准有限差分

收稿日期: 2018-10-27

通信作者: 翟术英 (1986-), 女, 副教授, 博士, 主要从事高阶差分格式的构造、分数阶高效数值算法的研究. E-mail: zhaishuying123456@163.com.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11701196); 华侨大学青年教师优秀青年科技创新人才项目 (ZQN YX502); 华侨大学研究生科研创新能力培养计划项目 (1511422010)

格式求解 Allen-Cahn 方程. Strachota 等^[14]利用有限体积方法求解 Allen-Cahn 方程并给出误差估计. 另外, Allen-Cahn 方程还可以采用重心插值配点法^[15]和配点法^[16]求解. 以上方法均从原问题出发, 直接建立数值逼近格式, 思想简单易于理解, 但在处理高维问题时, 所建立格式将变得十分复杂, 极大挑战理论分析和数值计算. 算子分裂方法是一种求解复杂问题的有效策略^[17], 此方法已经成功应用于求解 Allen-Cahn 方程. Zhai 等^[17-18]结合解析法和谱方法, 建立求解(分数阶)非局部 Allen-Cahn 方程的快速显式算子分裂方法, 参考文献[19-20]进一步推广此方法, 并给出严格的误差分析. 本文应用二阶中心差分 and 四阶 Padé 逼近, 给出两个新算子分裂格式, 并分别对其进行稳定性和极大值原理分析.

1 预备知识

考虑如下的二维 Allen-Cahn 方程

$$\left. \begin{aligned} u_t &= \Delta u - \frac{1}{\varepsilon^2} F'(u), & (x, y) \in \Omega, \quad t \in [0, T], \\ u(x, y, 0) &= u_0(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y, t) &= 0, & (x, y) \in \partial\Omega, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \right\} \tag{1}$$

式(1)中: $F'(u) = u(u^2 - 1)$; $\Omega = [a, b]^2$; ε 为描述相界厚度的一个参数; 当 $u_0 \in [-1, 1]$ 时, 有 $u \in [-1, 1]$, 即 Allen-Cahn 方程满足所谓的极值原理.

Allen-Cahn 方程的重要特征是将其视为 Lyapunov 能量泛函的 L_2 梯度流^[8], 即

$$E(u) = \int_a^b \int_a^b \left[\frac{1}{\varepsilon^2} F(u) + \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \right] dx dy. \tag{2}$$

能量泛函 $E(u)$ 关于时间 t 求导, 有

$$\frac{d}{dt} E(u) = \int_a^b \int_a^b \left[\frac{1}{\varepsilon^2} F'(u) u_t + \nabla u \cdot \nabla u_t \right] dx dy \leq 0. \tag{3}$$

由式(3)可知: 能量泛函 $E(u)$ 不会增加. 采用算子分裂方法^[17]计算问题(1), 将原始方程分裂为非线性方程和线性方程, 其解算子分别记为 S_A 和 S_B , 则问题(1)可通过以下二阶精度的 Strang 分裂格式^[17]进行求解, 即

$$u(t + \Delta t) = S_A \left(\frac{\Delta t}{2} \right) S_B(\Delta t) S_A \left(\frac{\Delta t}{2} \right) u(t) + O(\Delta t^2). \tag{4}$$

式(4)中: 非线性部分采用解析法求解; 线性部分采用有限差分法求解.

2 数值格式

令 x, y 方向取相同的空间节点数 M , 空间步长 $h = (b - a) / M$, 则 x 方向空间节点为 $x_i = a + ih, i = 0, 1, \dots, M$; y 方向空间节点为 $y_j = a + jh, j = 0, 1, \dots, M$. 取时间节点数为 N , 时间步长为 $\tau = T / N$, 时间节点表示为 $t_n = n\tau, n = 0, 1, 2, \dots, N$. 同时, 记 $u^n_{i,j} = u(x_i, y_j, t_n)$.

2.1 二维 Allen-Cahn 方程算子分裂方法的求解

根据算子分裂方法, 将二维 Allen-Cahn 方程分解为非线性方程 $S_A: u_t = -\frac{1}{\varepsilon^2} u(u^2 - 1)$ 和二维热传导方程 $S_B: u_t = \Delta u$. 在 $t \in [t_n, t_{n+\frac{1}{2}}]$ 前半段时间步长内, 通过算子 S_A 进行求解; 在 $t \in [t_n, t_{n+1}]$ 一个时间步长内完整利用算子 S_B 求解; 在后半步 $t \in [t_{n+\frac{1}{2}}, t_{n+1}]$, 重新利用算子 S_A 进行求解, 即

$$u(t + \Delta t) = S_A \left(\frac{\Delta t}{2} \right) S_B(\Delta t) S_A \left(\frac{\Delta t}{2} \right) u(t). \tag{5}$$

式(5)中: 非线性方程 S_A 求解格式为

$$u^{n+1} = \frac{u^n}{\sqrt{\exp(-2t/\varepsilon^2) + (u^n)^2 (1 - \exp(-2t/\varepsilon^2))}}. \tag{6}$$

2.2 二阶 ADI 格式与极大值原理

引入二阶中心差分算子 $\delta_x^2 u^n_{i,j} = \frac{u^n_{i-1,j} - 2u^n_{i,j} + u^n_{i+1,j}}{h^2}, \delta_y^2 u^n_{i,j} = \frac{u^n_{i,j-1} - 2u^n_{i,j} + u^n_{i,j+1}}{h^2}$, 则二维热传导方

程 $S_B:u_t=\Delta u$ 有如下 CN 格式,即

$$\frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^n}{\tau}=\frac{1}{2}\delta_x^2(u_{i,j}^{n+1}+u_{i,j}^n)+\frac{1}{2}\delta_y^2(u_{i,j}^{n+1}+u_{i,j}^n).$$

整理可得 $\left(1-\frac{\tau}{2}\delta_x^2-\frac{\tau}{2}\delta_y^2\right)u_{i,j}^{n+1}=\left(1+\frac{\tau}{2}\delta_x^2+\frac{\tau}{2}\delta_y^2\right)u_{i,j}^n$, 将其左右两边分别加上辅助项 $\frac{\tau^2}{4}\delta_x^2\times\delta_y^2u_{i,j}^{n+1}$ 和 $\frac{\tau^2}{4}\delta_x^2\delta_y^2u_{i,j}^n$, 有如下 ADI 格式,即

$$\left(1-\frac{\tau}{2}\delta_x^2\right)\left(1-\frac{\tau}{2}\delta_y^2\right)u_{i,j}^{n+1}=\left(1+\frac{\tau}{2}\delta_x^2\right)\left(1+\frac{\tau}{2}\delta_y^2\right)u_{i,j}^n, \tag{7}$$

精度为 $O(\tau^2+h^2)$.

定理 1 对任意的频率 ω_1,ω_2 和时间步长 τ , 差分格式(7)是无条件稳定的.

证明:令 $u_{i,j}^n=v^n(\omega_1,\omega_2)\exp(i\omega_1x_i+i\omega_2y_j)$, 其中, i 为虚数单位, 则有

$$\delta_y^2u_{i,j}^n=\frac{u_{i,j-1}^n-2u_{i,j}^n+u_{i,j+1}^n}{h^2}=-\frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\omega_2h}{2}\right)u_{i,j}^n. \tag{8}$$

同理, 有 $\delta_x^2u_{i,j}^n=-\frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\omega_1h}{2}\right)\cdot u_{i,j}^n$, 将其带入式(7)中, 并令 $r=\tau/(2h^2)$, 有

$$v^{n+1}=\frac{\left(1-4r\cdot\sin^2\left(\frac{\omega_1h}{2}\right)\right)\left(1-4r\cdot\sin^2\left(\frac{\omega_2h}{2}\right)\right)}{\left(1+4r\cdot\sin^2\left(\frac{\omega_1h}{2}\right)\right)\left(1+4r\cdot\sin^2\left(\frac{\omega_2h}{2}\right)\right)}v^n, \tag{9}$$

以及增长因子

$$G_1(\tau,n)=\frac{\left(1-4r\cdot\sin^2\left(\frac{\omega_1h}{2}\right)\right)\left(1-4r\cdot\sin^2\left(\frac{\omega_2h}{2}\right)\right)}{\left(1+4r\cdot\sin^2\left(\frac{\omega_1h}{2}\right)\right)\left(1+4r\cdot\sin^2\left(\frac{\omega_2h}{2}\right)\right)}. \tag{10}$$

因此, 当 $r>0$ 时, 则有 $|G_1(\tau,n)|\leq 1$ 成立, 差分格式(7)无条件稳定. 证明完毕.

因为 S_A 是精确求解, 所以整个算子分裂格式都是稳定的. 根据式(5)~(7), 得到方法 S I. 即

$$S\text{ I}:\begin{cases} u^*=\frac{u^n}{\sqrt{\exp(-t/\epsilon^2)+(u^n)^2(1-\exp(-t/\epsilon^2))}}, \\ \left(1-\frac{\tau}{2}\delta_x^2\right)\left(1-\frac{\tau}{2}\delta_y^2\right)u^{**}=\left(1+\frac{\tau}{2}\delta_x^2\right)\left(1+\frac{\tau}{2}\delta_y^2\right)u^*, \\ u^{n+1}=\frac{u^{**}}{\sqrt{\exp(-t/\epsilon^2)+(u^{**})^2(1-\exp(-t/\epsilon^2))}}. \end{cases} \tag{11}$$

定理 2 如果初值满足 $|u_0|\leq 1$, 那么方法 S I 的解满足 $|u^n|\leq 1, n=1,2,3,\cdots,N$.

证明:假设 $|u^n|\leq 1$, 显然有 $1-(u^n)^2\geq 0$, 根据式(6), 有

$$|u^*|=\frac{|u^n|}{\sqrt{\exp(-t/\omega^2)+(u^n)^2(1-\exp(-t/\omega^2))}}=1. \tag{12}$$

令 $v^n=u_{i,j}^*\exp(-i\omega_1x_i-i\omega_2y_j)$, 将其带入式(9), 两边同乘 $\exp(i\omega_1x_i+i\omega_2y_j)$, 则有

$$u_{i,j}^{**}=\frac{\left(1-4r\cdot\sin^2\left(\frac{\omega_1h}{2}\right)\right)\left(1-4r\cdot\sin^2\left(\frac{\omega_2h}{2}\right)\right)}{\left(1+4r\cdot\sin^2\left(\frac{\omega_1h}{2}\right)\right)\left(1+4r\cdot\sin^2\left(\frac{\omega_2h}{2}\right)\right)}u_{i,j}^*. \tag{13}$$

由定理 1, 有 $|u_{i,j}^{**}|=|G_1(\tau,n)\cdot u_{i,j}^*|\leq |u_{i,j}^*|\leq 1$. 由式(12), 有 $|u^{n+1}|=|S_Au^{**}|\leq 1$. 由于 $|u_0|\leq 1$, 根据归纳假设, 可得 $|u^n|\leq 1, n=1,2,3,\cdots,N$.

2.3 四阶紧致 ADI 格式与极大值原理

为了提高格式(7)的 $O(\tau^2+h^2)$ 计算精度, 引入如下四阶 Padé 逼近格式, 即

$$\frac{\partial^2u(x_i,y_j,t_n)}{\partial y^2}=\frac{\delta_y^2u(x_i,y_j,t_n)}{1+\frac{h^2}{12}\frac{d^2}{dy^2}}+O(h^4), \quad \frac{\partial^2u(x_i,y_j,t_n)}{\partial x^2}=\frac{\delta_x^2u(x_i,y_j,t_n)}{1+\frac{h^2}{12}\frac{d^2}{dx^2}}+O(h^4). \tag{14}$$

令 $L_x=1+\frac{h^2}{12}\frac{d^2}{dx^2}, L_y=1+\frac{h^2}{12}\frac{d^2}{dy^2}$, 则方程 S_B 有如下 CN 格式, 即

$$\frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^n}{\tau}=\frac{1}{2}\left(\frac{\delta_x^2}{L_x}u_{i,j}^{n+1}+\frac{\delta_x^2}{L_x}u_{i,j}^n\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\delta_y^2}{L_y}u_{i,j}^{n+1}+\frac{\delta_y^2}{L_y}u_{i,j}^n\right). \tag{15}$$

将式(15)两边同时乘上算子 L_xL_y , 再分别加上 $\frac{\tau^2}{4}\delta_x^2\delta_y^2u_{i,j}^{n+1}$ 和 $\frac{\tau^2}{4}\delta_x^2\delta_y^2u_{i,j}^n$, 得到高阶紧 ADI 格式为

$$\left(L_x-\frac{\tau}{2}\delta_x^2\right)\left(L_y-\frac{\tau}{2}\delta_y^2\right)u_{i,j}^{n+1}=\left(L_x+\frac{\tau}{2}\delta_x^2\right)\left(L_y+\frac{\tau}{2}\delta_y^2\right)u_{i,j}^n, \tag{16}$$

精度为 $O(\tau^2+h^4)$.

定理 3 对任意的频率 ω_1, ω_2 和时间步长 τ , 差分格式(16)是无条件稳定的.

证明: 令 $u_{i,j}^n=v^n(\omega_1, \omega_2)\exp(i\omega_1x_i+i\omega_2y_j)$, 将其带入 L_y 算子中, 有

$$L_yu_{i,j}^n=\frac{u_{i,j-1}^n+10u_{i,j}^n+u_{i,j+1}^n}{12}=\left(1-\frac{1}{3}\sin^2\left(\frac{\omega_2h}{2}\right)\right)u_{i,j}^n. \tag{17}$$

同理, 有 $L_xu_{i,j}^n=\left(1-\frac{1}{3}\sin^2\left(\frac{\omega_1h}{2}\right)\right)u_{i,j}^n$.

将式(8), (17)带入式(16)中, 并令 $r=\tau/(2h^2)$, 有

$$v^{n+1}=\frac{\left(1-\frac{1}{3}\sin^2\left(\frac{\omega_1h}{2}\right)-4r\cdot\sin^2\left(\frac{\omega_1h}{2}\right)\right)\left(1-\frac{1}{3}\sin^2\left(\frac{\omega_2h}{2}\right)-4r\cdot\sin^2\left(\frac{\omega_2h}{2}\right)\right)}{\left(1-\frac{1}{3}\sin^2\left(\frac{\omega_1h}{2}\right)+4r\cdot\sin^2\left(\frac{\omega_1h}{2}\right)\right)\left(1-\frac{1}{3}\sin^2\left(\frac{\omega_2h}{2}\right)+4r\cdot\sin^2\left(\frac{\omega_2h}{2}\right)\right)}v^n, \tag{18}$$

可得到增长因子

$$G_2(\tau,n)=\frac{\left(1-\frac{1}{3}\sin^2\left(\frac{\omega_1h}{2}\right)-4r\cdot\sin^2\left(\frac{\omega_1h}{2}\right)\right)\left(1-\frac{1}{3}\sin^2\left(\frac{\omega_2h}{2}\right)-4r\cdot\sin^2\left(\frac{\omega_2h}{2}\right)\right)}{\left(1-\frac{1}{3}\sin^2\left(\frac{\omega_1h}{2}\right)+4r\cdot\sin^2\left(\frac{\omega_1h}{2}\right)\right)\left(1-\frac{1}{3}\sin^2\left(\frac{\omega_2h}{2}\right)+4r\cdot\sin^2\left(\frac{\omega_2h}{2}\right)\right)}. \tag{19}$$

当 $r>0, |G_2(\tau,n)|\leq 1$. 显然, 差分格式(16)无条件稳定. 证明完毕.

因为 S_A 是精确求解, 所以整个算子分裂格式都是稳定的. 由式(5), (6)和(16), 可得到方法 S II, 即

$$S\text{ II}:\begin{cases} u^*=\frac{u^n}{\sqrt{\exp(-t/\epsilon^2)+(u^n)^2(1-\exp(-t/\epsilon^2))}}, \\ \left(L_x-\frac{\tau}{2}\delta_x^2\right)\left(L_y-\frac{\tau}{2}\delta_y^2\right)u^{**}=\left(L_x+\frac{\tau}{2}\delta_x^2\right)\left(L_y+\frac{\tau}{2}\delta_y^2\right)u^*, \\ u^{n+1}=\frac{u^{**}}{\sqrt{\exp(-t/\epsilon^2)+(u^{**})^2(1-\exp(-t/\epsilon^2))}}. \end{cases} \tag{20}$$

定理 4 如果初值满足 $|u_0|\leq 1$, 那么方法 S II 的解满足 $|u^n|\leq 1, n=1, 2, 3, \cdots, N$.

证明: 假设 $|u^n|\leq 1$, 根据式(12)可知 $|u^*|\leq 1$, 令 $v^n=u_{i,j}^*\exp(-i\omega_1x_i+i\omega_2y_j)$, 将其带入方程(16)中, 两边同乘以 $\exp(i\omega_1x_i+i\omega_2y_j)$, 有

$$u_{i,j}^{**}=\frac{\left(1-\frac{1}{3}\sin^2\left(\frac{\omega_1h}{2}\right)-4r\cdot\sin^2\left(\frac{\omega_1h}{2}\right)\right)\left(1-\frac{1}{3}\sin^2\left(\frac{\omega_2h}{2}\right)-4r\cdot\sin^2\left(\frac{\omega_2h}{2}\right)\right)}{\left(1-\frac{1}{3}\sin^2\left(\frac{\omega_1h}{2}\right)+4r\cdot\sin^2\left(\frac{\omega_1h}{2}\right)\right)\left(1-\frac{1}{3}\sin^2\left(\frac{\omega_2h}{2}\right)+4r\cdot\sin^2\left(\frac{\omega_2h}{2}\right)\right)}u_{i,j}^*. \tag{21}$$

由定理 3 可知, $|u_{i,j}^{**}|=|G_2(\tau,n)\cdot u_{i,j}^*|\leq |u_{i,j}^*|\leq 1$. 根据式(12), 有 $|S_Au^{**}|\leq 1$, 即 $|u^{n+1}|\leq 1$. 又因为 $|u_0|\leq 1$, 由归纳假设可知, 对任意 $n=1, 2, \cdots, N$ 有不等式 $|u^n|\leq 1$ 成立. 证明完毕.

3 数值算例

3.1 算例一

由于没有真解, 令 $e_{i,j}^n=u_{i,j}^n-\hat{u}_{i,j}^n$, 其中, $u_{i,j}^n$ 表示 x, y 方向空间剖分均取 M 时, 相应位置函数 u 的值; $\hat{u}_{i,j}^n$ 表示 x, y 方向空间剖分均取 $2M$ 时, 相应位置函数 u 的值. 定义方法 S I, S II 的最大误差 Err_∞ 及

L_2 误差 Err_2 分别为: $\text{Err}_\infty(\tau,h)=\max_{1\leq i\leq M, 1\leq j\leq M}|e_{i,j}^n|, \text{Err}_2(\tau,h)=h\sqrt{\sum_{i,j=1}^Me_{i,j}^n{}^2}$.

假设 $\text{Err}_\infty(\tau, h) = O(\tau^p + h^q)$, 当 τ 取充分小值时, 得到 $\text{Err}_\infty(\tau, h) = c_1 h^q$, 且有

$$q \approx \log_2 \left(\frac{\text{Err}_\infty(\tau, 2h)}{\text{Err}_\infty(\tau, h)} \right) \approx \log_2 \left(\frac{\text{Err}_2(\tau, 2h)}{\text{Err}_2(\tau, h)} \right).$$

当 h 取充分小值时, 可得到 $\text{Err}_\infty(\tau, h) = c_2 \tau^p$, 且有

$$p \approx \log_2 \left(\frac{\text{Err}_\infty(2\tau, h)}{\text{Err}_\infty(\tau, h)} \right) \approx \log_2 \left(\frac{\text{Err}_2(2\tau, h)}{\text{Err}_2(\tau, h)} \right).$$

$u_0(x, y) = 0.5(\sin(\pi \cdot x) + \sin(\pi \cdot y))$, $(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1)$, 验证空间收敛阶, 将时间剖分固定 $N = 20\,000$, 根方法 S I, S II 的计算, $\epsilon = 0.1, T = 1, N = 20\,000$ 下的空间收敛阶, 如表 1 所示. 表 1 中: Rate 为验证收敛阶. 由表 1 可知: 随着网格剖分变细, 方法 S I 和 S II 的收敛率分别接近预期的二阶和四阶精度; 在保证相同空间误差的前提下, 方法 S II 所需的空间剖分要小于方法 S I 所需的空间剖分.

表 1 $\epsilon = 0.1, T = 1, N = 20\,000$ 下的空间收敛阶

Tab. 1 Spatial convergence order of different schemes ($\epsilon = 0.1, T = 1, N = 20\,000$)

N	S I				S II			
	Err _∞	Rate	Err ₂	Rate	Err _∞	Rate	Err ₂	Rate
250	8.18×10^{-3}	—	4.57×10^{-3}	—	7.09×10^{-4}	—	2.79×10^{-4}	—
500	1.95×10^{-3}	2.07	1.09×10^{-3}	2.07	4.13×10^{-5}	4.10	1.65×10^{-5}	4.08
1 000	4.84×10^{-4}	2.01	2.71×10^{-4}	2.03	2.53×10^{-6}	4.03	1.02×10^{-6}	4.02
2 000	1.21×10^{-4}	2.00	6.75×10^{-5}	2.00	1.58×10^{-7}	4.01	6.33×10^{-8}	4.01
4 000	3.03×10^{-5}	2.00	1.69×10^{-5}	2.00	9.85×10^{-9}	4.00	3.95×10^{-9}	4.00

将空间剖分固定 $M = 50$, 分别根据方法 S I 和方法 S II 计算, $\epsilon = 0.1, T = 1, M = 50$ 下的时间收敛阶, 如表 2 所示. 由表 2 可知: 随着网格剖分变细, Err_∞ 及 Err_2 均减小, 且收敛精度逐渐接近预期的二阶精度; 在相同情况下, 两种格式的误差近似相等, 符合预计情况.

表 2 $\epsilon = 0.1, T = 1, M = 50$ 下的时间收敛阶

Tab. 2 Time convergence order of different schemes ($\epsilon = 0.1, T = 1, M = 50$)

N	S I				S II			
	Err _∞	Rate	Err ₂	Rate	Err _∞	Rate	Err ₂	Rate
250	9.57×10^{-1}	—	3.41×10^{-1}	—	1.12	—	4.09×10^{-1}	—
500	1.21×10^{-3}	9.63	4.87×10^{-4}	9.45	1.21×10^{-3}	9.85	4.87×10^{-4}	9.71
1 000	3.02×10^{-4}	2.00	1.22×10^{-4}	2.00	3.03×10^{-4}	2.00	1.22×10^{-4}	2.00
2 000	7.55×10^{-5}	2.00	3.05×10^{-5}	2.00	7.57×10^{-5}	2.00	3.05×10^{-5}	2.00
4 000	1.89×10^{-5}	2.00	7.62×10^{-6}	2.00	1.89×10^{-5}	2.00	7.62×10^{-6}	2.00

3.2 算例二

定义能量函数 $E(u)$ 为

$$E^h(u^n) = \frac{h^2}{4\epsilon^2} \sum_{i,j=0}^M [(u_{i,j}^n)^2 - 1]^2 + \frac{h^2}{2} \sum_{j=0}^M \sum_{i=1}^{M-1} \left[\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2h} \right]^2 + \frac{h^2}{2} \sum_{i=0}^M \sum_{j=1}^{M-1} \left[\frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2h} \right]^2.$$

取定义域在 $(-1, 1) \times (-1, 1)$ 上的初值为

$$u_0(x, y) = (x^2 - 1)(y^2 - 1)(\sin(\pi \cdot x) + \sin(\pi \cdot y)),$$

其相应的参数为 $\epsilon = 0.07, T = 2.5, N = 500, M = 16, 32$.

当方法 S I 和方法 S II 在空间剖分 $M = 16, 32$ 时, 量泛函 $E(u)$ 与时间 t 的关系, 如图 1 所示. 图 1 中: $\epsilon = 0.07, T = 2.5, N = 500$. 由图 1 可以知道: 随着时间 t 的增大, 能量泛函 $E(u)$ 逐渐减少, 并到达亚稳态, 在短时间内随时间 t 保持不变, 之后, 能量泛函 $E(u)$ 开始减小, 并最终到达一个固定不变值, 即稳态.

当方法 S I 和 S II 取不同空间剖分时, $u(0.5, y, t)$ 的数值图像, 如图 2 所示. 由图 2 可知: 对同一方法, 随着 M 的增大, 图像越稳定, 误差越小; 对同一格式, 随着 M 的增大, 图像会越来越稳定, 更早到达稳态; 对不同格式, 在 M 相同的情况下, 方法 S II 要提前达到稳态. 在 M 不同情况下, 方法 S II, $M = 16$ 图像要比 S I,

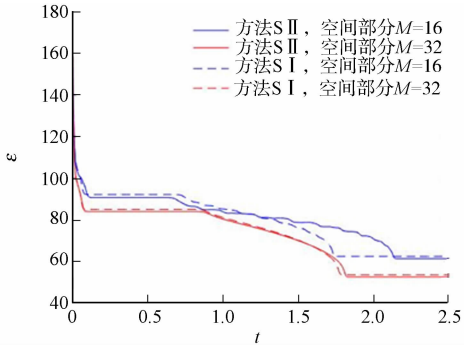


图 1 能量随时间的变化
Fig. 1 Energy variation with time

$M=32$ 的图像提前达到稳态,说明在保证精度前提下,方法 S II 所需的空間剖分更小,优于方法 S I .

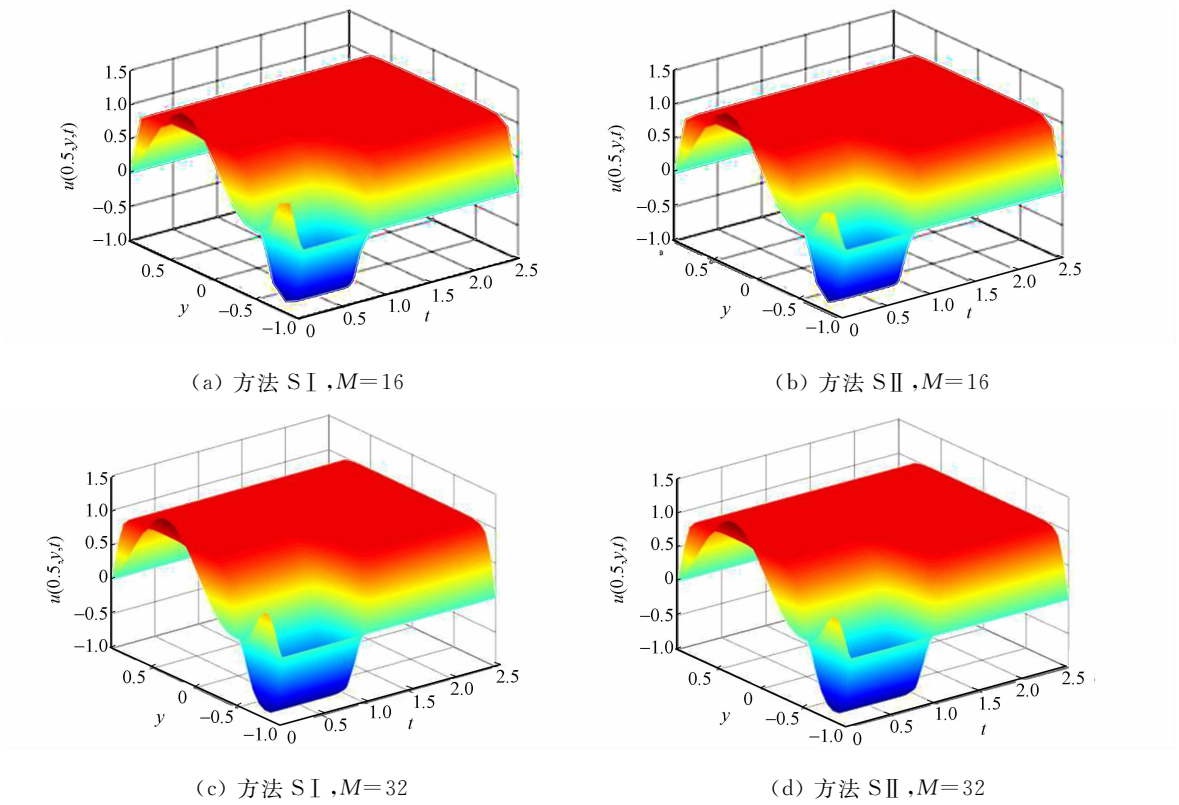


图 2 $u(0.5, y, t)$ 在不同方法,不同空间剖分下的数值图像

Fig. 2 Numerical solution of $u(0.5, y, t)$ with different schemes and different way

方程在 t 不同处的数值图像,如图 3~6 所示.由图 3~6 及图 1 可知:当 $t=0.5$ 时,数值解均处于亚

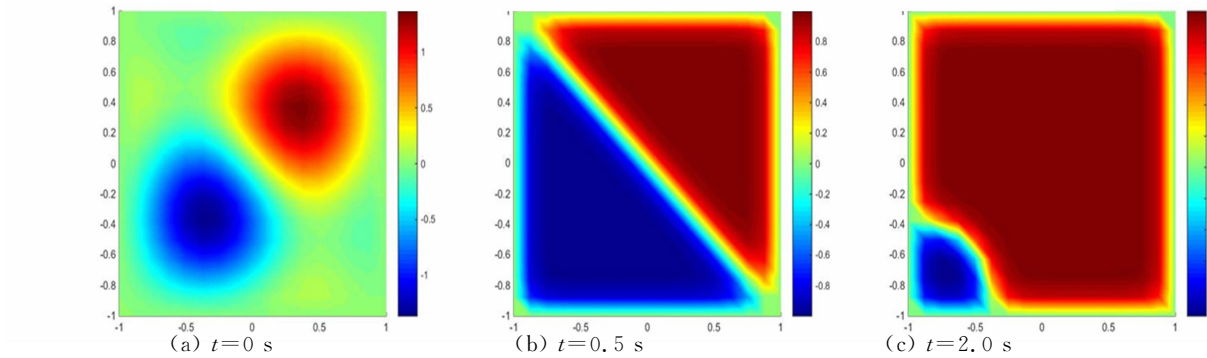


图 3 方法 S I 在 t 不同处的数值图像($M=16$)

Fig. 3 Numerical solution of scheme S I at different time ($M=16$)

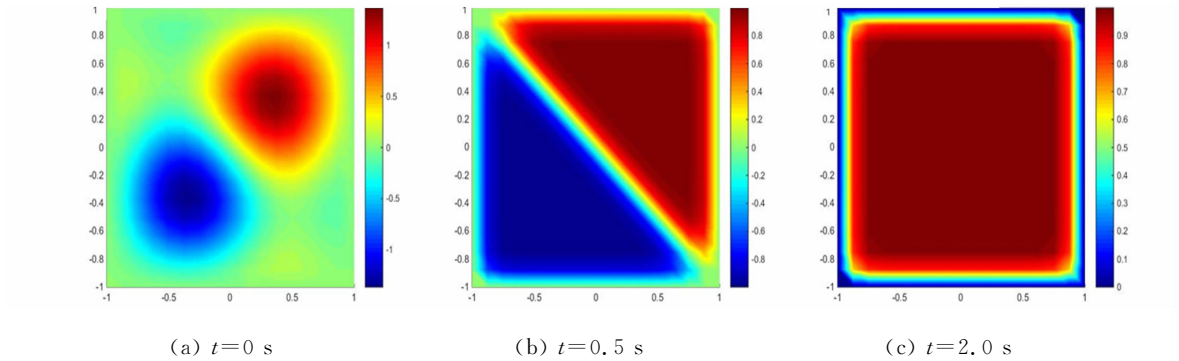


图 4 方法 S II 在 t 不同处的数值图像($M=16$)

Fig. 4 Numerical solution of scheme S II at different time ($M=16$)

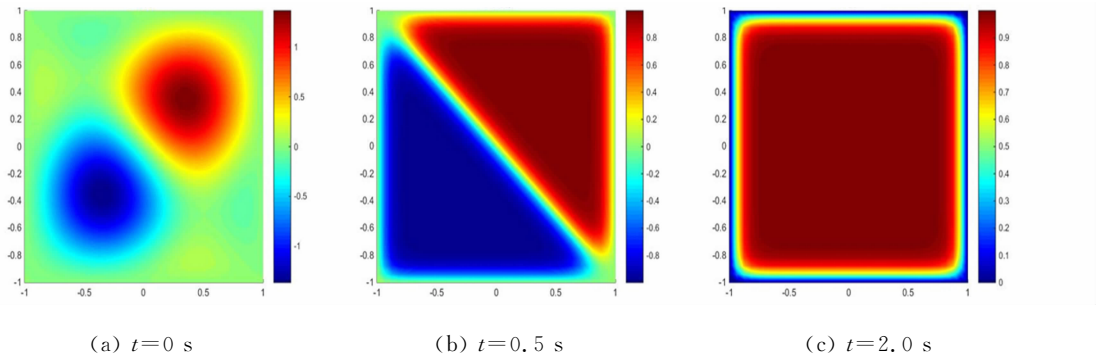


图 5 方法 S I 在 t 不同处的数值图像($M=32$)

Fig. 5 Numerical solution of scheme S I at different time ($M=32$)

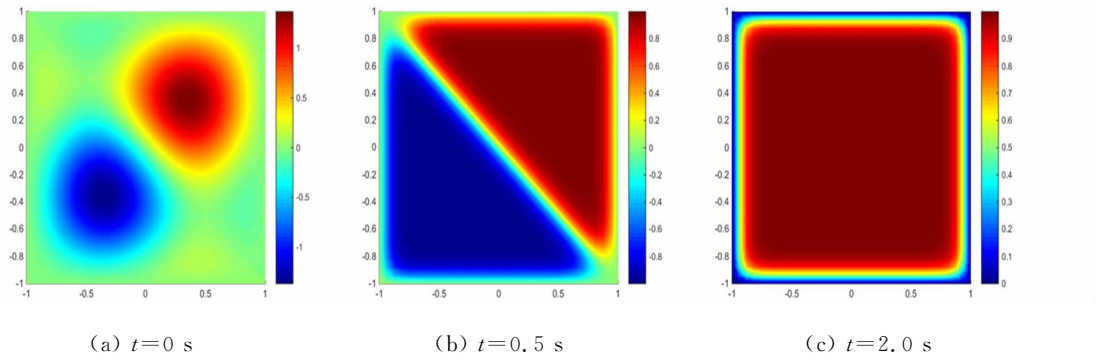


图 6 方法 S II 在 t 不同处的数值图像($M=32$)

Fig. 6 Numerical solution of scheme S II at different time ($M=32$)

稳态; $t=2$ 时,除方法 S I, $M=16$ 的数值解未达到稳态,其他数值解均已达到稳态,这说明方法 S I 需要更细的空间剖分才能保证相应精度. 因此,在实际计算时,应选择方法 S II 处理问题减小计算机负担.

3.3 算例三

用方法 S II 进行计算,取定义域在 $(-1,1) \times (-1,1)$ 上的初值 $u_0(x,y)=u_0^1(x,y)u_0^2(x,y)$, 即有

$$u_0^1(x,y)=\begin{cases} \tanh\left(\frac{3}{\epsilon}((x-0.5)^2+(y-0.4)^2-(0.25)^2)\right), & x>0.3, \\ \tanh\left(\frac{3}{\epsilon}((y-0.4)^2-(0.15)^2)\right), & -0.3\leq x\leq 0.3, \\ \tanh\left(\frac{3}{\epsilon}((x+0.5)^2+(y-0.4)^2-(0.25)^2)\right), & x<-0.3. \end{cases}$$
$$u_0^2(x,y)=\begin{cases} \tanh\left(\frac{3}{\epsilon}(x^2+(y-0.6)^2-(0.25)^2)\right), & y>0.4, \\ \tanh\left(\frac{3}{\epsilon}(x^2-(0.15)^2)\right), & -0.4\leq y\leq 0.4, \\ \tanh\left(\frac{3}{\epsilon}(x^2+(y+0.6)^2-(0.25)^2)\right), & y<-0.4. \end{cases}$$

在 ϵ 分别取 0.07 和 0.10 时,能量随着时间的变化结果,如图 7~10 所示.

由图 7 可知:能量泛函 $E(u)$ 满足能量的递减规律,且 ϵ 越大,方程达到稳态所需的时间就越短,通过图 8 的结果进一步说明了此现象.

对比图 9,10 可以知道:当 $t=0.2$ 时, $\epsilon=0.07$ 的数值解仍处于亚稳态;而当 $\epsilon=0.10$ 时,数值解已到达稳态. 这进一步说明 Allen-Cahn 方程达到稳态所需的时间与 ϵ 成反比,与前面的结论相符合.

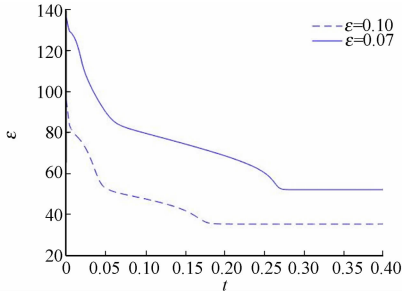


图 7 能量随时间变化图像

Fig. 7 Energy variation with time

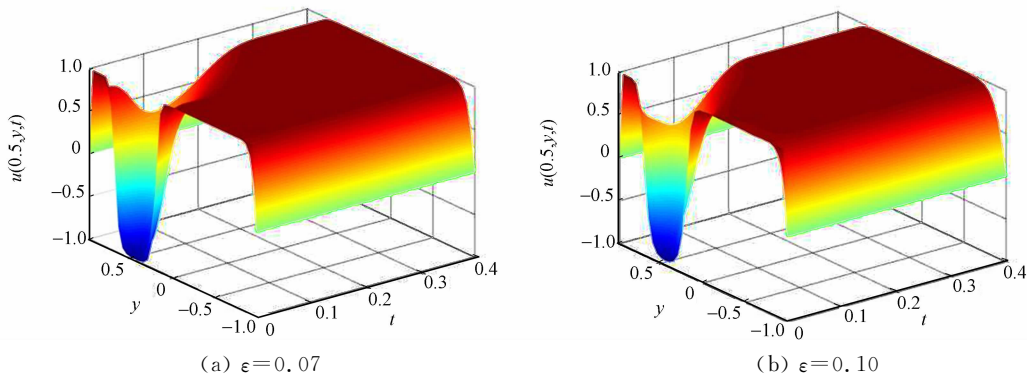


图 8 $u(0.5, y, t)$ 的数值图像
Fig. 8 Numerical solution of $u(0.5, y, t)$

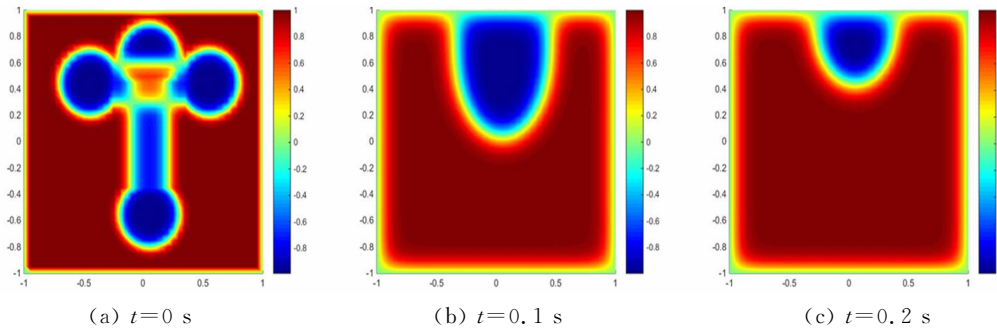


图 9 方程在不同 t 处的数值图像($\epsilon=0.07$)

Fig. 9 Numerical solution of equations at different t ($\epsilon=0.07$)

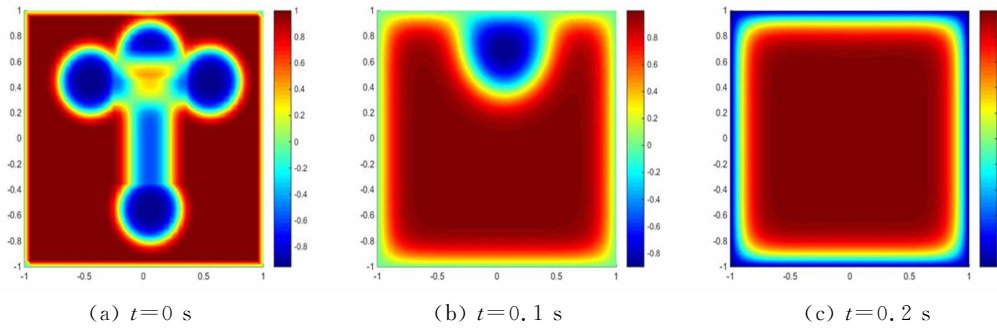


图 10 方程在不同 t 处的数值图像($\epsilon=0.10$)

Fig. 10 Numerical solution of equations at different t ($\epsilon=0.10$)

4 结束语

采用二阶中心差分和四阶 Padé 逼近, 提出二维 Allen-Cahn 方程的两种新的算子分裂格式, 并给出了稳定性和极大值原理的分析, 数值实验结果与理论分析一致, 方法 S II 要优于方法 S I, 且适用于不连续初值的情况.

参考文献:

[1] ALLEN S M, CAHN J W. A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening[J]. Acta Metallurgica, 1979, 27: 1085-1095. DOI: 10. 1016/0001-6160(79)90196-2.

[2] YANG Xiaofeng, ZHAO Jia, HE Xiaoming. Linear, second order and unconditionally energy stable schemes for the viscous Cahn-Hilliard equation with hyperbolic relaxation using the invariant energy quadratization method[J]. J Comput Appl Math, 2018, 343: 80-97. DOI: 10. 1016/j. cam. 2018. 04. 027.

[3] WHEELER A A, BOETTINGER W J, MCFADDEN G B. Phase-field model for isothermal phase transitions in binary alloys[J]. Phys Rev Appl, 1992, 45(10): 7424-7439. DOI: 10. 1103/PhysRevA. 45. 7424.

- [4] COHEN D S, MURRAY J D. A generalized diffusion model for growth and dispersal in a population[J]. *J Math Biol*, 1981, 12(2): 237-249. DOI: 10.1007/BF00276132.
- [5] HEIDA M, RÖGER M. Large deviation principle for a stochastic Allen-Cahn equation[J]. *J Theor Probab*, 2018, 31(1): 364-401. DOI: 10.1007/s10959-016-0711-7.
- [6] BENES M, CHALUPECKY V, MIKULA K. Geometrical image segmentation by the Allen-Cahn equation[J]. *Appl Numer Math*, 2004, 51: 187-205. DOI: 10.1016/j.apnum.2004.05.001.
- [7] DOBROSOTSKAYA J A, BERTOZZI A L. A wavelet-laplace variational technique for image deconvolution and inpainting[J]. *IEEE T Image Process*, 2008, 17(5): 657-663. DOI: 10.1109/TIP.2008.919367.
- [8] DU Qiang, JIANG Yang. Asymptotically compatible fourier spectral approximations of nonlocal Allen-Cahn equations[J]. *Siam J Numer Anal*, 2016, 54(3): 1899-1919. DOI: 10.1137/15M1039857.
- [9] LEE H G, LEE J Y. A semi-analytical fourier spectral method for the Allen-Cahn equation[J]. *Comput Math Appl*, 2014, 68(3): 174-184. DOI: 10.1016/j.camwa.2014.05.015.
- [10] XIAO Xufeng, FENG Xinlong, YUAN Jinyun. The stabilized semi-implicit finite element method for the surface Allen-Cahn equation[J]. *Discrete Cont Dyn-B*, 2017, 22(7): 2857-2877. DOI: 10.3934/dcdsb.2017154.
- [11] ZHAI Shuying, FENG Xinlong, HE Yinnian. Numerical simulation of the three dimensional Allen-Cahn equation by the high-order compact ADI method[J]. *Comput Phys Commun*, 2014, 185(10): 2449-2455. DOI: 10.1016/j.cpc.2014.05.017.
- [12] TANG Tao, YANG Jiang. Implicit-explicit scheme for the Allen-Cahn equation preserves the maximum principle [J]. *J Comput Math*, 2016, 34(5): 471-481. DOI: 10.4208/jcm.1603-m2014-0017.
- [13] ADEROGBA A A, CHAPWANYA M. An explicit nonstandard finite difference scheme for the Allen-Cahn equation[J]. *J Differ Equ Appl*, 2015, 21(10): 875-886. DOI: 10.1080/10236198.2015.1055737.
- [14] STRACHOTA P, BENE M. Error estimate of the finite volume scheme for the Allen-Cahn equation[J]. *BIT*, 2018, 58(2): 489-507. DOI: 10.1007/s10543-017-0687-4.
- [15] 翁志峰, 姚泽丰, 赖淑琴. 重心插值配点法直接求解 Allen-Cahn 方程[J]. *华侨大学学报(自然科学版)*, 2019, 40(1): 133-140. DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.201806043.
- [16] 庄清渠, 王金平. 四阶常微分方程的 Birkhoff 配点法[J]. *华侨大学学报(自然科学版)*, 2018, 39(2): 306-311. DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.201707005.
- [17] ZHAI Shuying, WENG Zhifeng, FENG Xinlong. Fast explicit operator splitting method and time-step adaptivity for fractional non-local Allen-Cahn model[J]. *Appl Math Model*, 2016, 40(2): 1315-1324. DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.201806043.
- [18] ZHAI Shuying, WENG Zhifeng, FENG Xinlong. Investigations on several numerical methods for the non-local Allen-Cahn equation[J]. *Int J Heat Mass Tran*, 2015, 87: 111-118. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.03.071.
- [19] WENG Zhifeng, TANG Longkun. Analysis of the operator splitting scheme for the Allen-Cahn equation[J]. *Numer Heat Tr B-Fund*, 2016, 70(5): 472-483. DOI: 10.1080/10407790.2016.1215714.
- [20] WENG Zhifeng, ZHUANG Qingqu. Numerical approximation of the conservative Allen-Cahn equation by operator splitting method[J]. *Math Method Appl Sci*, 2017, 40(12): 4462-4480. DOI: 10.1002/mma.4317.

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 黄心中)