

DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.201807052



# 时变二次规划的高精度数值算法

李泽昕, 徐凤, 张孟玄, 郭东生

(华侨大学 信息科学与工程学院, 福建 厦门 361021)

**摘要:** 提出一种用于求解时变二次规划问题的高精度数值算法. 首先, 给出求解时变二次规划问题的连续模型; 然后, 采用新型泰勒差分公式将连续模型离散, 得到具有高计算精度的数值算法; 最后, 通过理论分析和仿真实验表明该数值算法的优越性和有效性, 并将所提出的数值算法应用于一个五连杆机械臂的运动控制中. 研究表明: 所提算法的计算稳态误差与采样间隔  $\tau$  具有  $O(\tau^4)$  的关系, 该数值算法既可以有效地求解时变二次规划问题, 又能有效地应用于机械臂的运动控制.

**关键词:** 时变二次规划; 数值算法; 泰勒差分公式; 机械臂; 运动控制

**中图分类号:** TP 183      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1000-5013(2019)03-0405-07

## Numerical Algorithm With High Computational Precision for Time-Varying Quadratic Program

LI Zexin, XU Feng, ZHANG Mengxuan, GUO Dongsheng

(College of Information Science and Engineering, Huaqiao University, Xiamen 361021, China)

**Abstract:** A high precision numerical algorithm is proposed to solve the problem of time-varying quadratic program. Firstly, the continuous-time model for time-varying quadratic program is given. Secondly, the numerical algorithm with a high computational precision is then derived by employing a new Taylor difference formula to discretize the above continuous-time model. Finally, the theoretical analysis and simulational experiments further indicate the superiority and effectiveness of the proposed numerical algorithm, and the proposed algorithm is applied to the motion control of a five-link robot manipulator. The results show that the calculated steady-state error of the proposed algorithm has a relationship of  $O(\tau^4)$  with the sampling interval  $\tau$ , this numerical algorithm can both effectively solve the time-varying quadratic programming problem and apply to the motion control of the manipulator.

**Keywords:** time-varying quadratic program; numerical algorithm; Taylor difference formula; robot manipulator; motion control

二次规划为许多学科和工程领域的发展做出了重要贡献<sup>[1-7]</sup>. 近年来, 如何有效求解时变二次规划问题是一个研究热点. 对于时变二次规划问题, 许多学者设计了相应的求解方法<sup>[6-13]</sup>, 如谢清等<sup>[9]</sup>展示的数值算法, Zhang 等<sup>[12]</sup>展示的原对偶神经网络模型, Zhang 等<sup>[13]</sup>提出的新型神经网络模型. 为了能够在硬件系统(如数字电路)上实现连续时间计算模型, Liao 等<sup>[8]</sup>给出基于欧拉差分公式<sup>[14]</sup>和泰勒差分公

**收稿日期:** 2018-07-29

**通信作者:** 郭东生(1987-), 男, 副教授, 博士, 主要从事数值算法、神经网络和机器人的研究. E-mail: gdongsh@hqu.edu.cn.

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(61603143); 福建省自然科学基金资助项目(2016J01307); 华侨大学中青年教师资助计划项目(ZQN-YX402); 高层次人才科研启动项目(15BS410); 华侨大学研究生科研创新能力培育计划资助项目(17013082041)

式<sup>[15]</sup>设计的数值算法,并表明前者具有 $O(\tau^2)$ 的误差变化规律,后者具有 $O(\tau^3)$ 的误差变化规律( $\tau$ 为采样间隔).然而,本文给出一种新型的泰勒差分公式<sup>[16-18]</sup>,并基于该公式的设计,开发出具有高计算精度的数值算法,用于求解时变二次规划问题.通过理论分析和仿真实验验证所提数值算法的优越性和有效性.考虑到机械臂的运动控制问题也可描述为时变二次规划问题<sup>[8,19-21]</sup>,为体现该算法的应用前景,同时,将该算法应用于一个五连杆机械臂中.

## 1 问题和算法描述

所研究的时变二次规划问题<sup>[8,13]</sup>为

$$\left. \begin{aligned} \min f(\mathbf{x}(t), t) &= \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t)/2 + \mathbf{p}^T(t)\mathbf{x}(t), \\ \text{s. t. } \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) &= \mathbf{b}(t). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式(1)中: $\mathbf{Q}(t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ;  $\mathbf{A}(t) \in \mathbf{R}^{m \times n}$  (行满秩);  $\mathbf{p}(t) \in \mathbf{R}^n$  和  $\mathbf{b}(t) \in \mathbf{R}^m$  分别为光滑时变的系数矩阵和向量;  $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$  是需要求解(1)而得到的未知向量.为保证 $\mathbf{x}(t)$ 的存在,仅考虑系数矩阵 $\mathbf{Q}(t)$ 在时间 $t \in [0, +\infty)$ 内是正定对称的情况.

在文献[13]中,上述时变二次规划问题(1)的求解可转化为时变线性方程的求解,即

$$\mathbf{C}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{d}(t) = \mathbf{0}. \quad (2)$$

式(2)中: $\mathbf{y}(t) = [\mathbf{x}^T(t), \mathbf{l}^T(t)]^T \in \mathbf{R}^{n+m}$ ,  $\mathbf{l}(t) \in \mathbf{R}^m$  为拉格朗日乘子向量,系数矩阵 $\mathbf{C}(t)$ 和向量 $\mathbf{d}(t)$ 分别

$$\text{定义为 } \mathbf{C}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(t) & \mathbf{A}^T(t) \\ \mathbf{A}(t) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{(n+m) \times (n+m)}, \mathbf{d}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(t) \\ -\mathbf{b}(t) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n+m}.$$

为求解时变线性方程(2)及时变二次规划问题(1),文献[13]给出的连续模型为

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = -\mathbf{C}^{-1}(t)\dot{\mathbf{C}}(t)\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}^{-1}(t)\dot{\mathbf{d}}(t) - \gamma\mathbf{C}^{-1}(t)(\mathbf{C}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{d}(t)). \quad (3)$$

式(3)中: $\dot{\mathbf{y}}(t)$ 为状态向量 $\mathbf{y}(t)$ 的时间导数; $\mathbf{C}^{-1}(t)$ 为矩阵 $\mathbf{C}(t)$ 的逆矩阵;设计参数 $\gamma > 0 \in \mathbf{R}$ 用来调节模型的收敛率.对于模型(3),给定一个随机产生的初始状态,其状态向量 $\mathbf{y}(t)$ 会收敛到式(2)的理论解中,而该解的前 $n$ 个元素将组成时变二次规划问题(1)的最优解<sup>[13]</sup>.

为了能够在硬件系统(如数字电路)上实现连续时间计算模型,采用欧拉差分公式<sup>[14]</sup>对式(3)进行离散,文献[8]给出的数值算法为

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k - \tau\mathbf{C}_k^{-1}\dot{\mathbf{C}}_k\mathbf{y}_k - \tau\mathbf{C}_k^{-1}\dot{\mathbf{d}}_k - h\mathbf{C}_k^{-1}(\mathbf{C}_k\mathbf{y}_k + \mathbf{d}_k). \quad (4)$$

式(4)中: $\tau > 0 \in \mathbf{R}$ 为采样间隔; $h = \tau\gamma > 0 \in \mathbf{R}$ 为步长;迭代次数 $k = 0, 1, 2, \dots$ ,且 $\mathbf{y}_k = \mathbf{y}(t_k = k\tau)$ ,  $\mathbf{C}_k^{-1} = \mathbf{C}^{-1}(t_k = k\tau)$ ,  $\dot{\mathbf{C}}_k = \dot{\mathbf{C}}(t_k = k\tau)$ ,  $\mathbf{C}_k = \mathbf{C}(t_k = k\tau)$ ,  $\mathbf{d}_k = \mathbf{d}(t_k = k\tau)$ ,  $\dot{\mathbf{d}}_k = \dot{\mathbf{d}}(t_k = k\tau)$ .对于算法(4),固定 $h$ 的数值不变,当 $\tau$ 的数值减小10倍,其计算稳态误差可减小100倍,即算法(4)的计算稳态误差具有 $O(\tau^2)$ 的变化规律<sup>[8]</sup>.

不同于欧拉差分公式,文献[8]进一步给出了一种泰勒差分公式<sup>[15]</sup>,并采用此差分公式进行离散公式(3),从而得到的数值算法为

$$\mathbf{y}_{k+1} = 1.5\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_{k-1} + 0.5\mathbf{y}_{k-2} - \tau\mathbf{C}_k^{-1}\dot{\mathbf{C}}_k\mathbf{y}_k - \tau\mathbf{C}_k^{-1}\dot{\mathbf{d}}_k - h\mathbf{C}_k^{-1}(\mathbf{C}_k\mathbf{y}_k + \mathbf{d}_k). \quad (5)$$

对于算法(5),固定 $h$ 的数值不变,当 $\tau$ 的数值减小10倍,其计算稳态误差可减小1000倍,即算法(5)的计算稳态误差具有 $O(\tau^3)$ 的变化规律<sup>[6]</sup>.

## 2 高精度数值算法及其理论分析

基于一种新型泰勒差分公式<sup>[16-18]</sup>设计一个具有高计算精度的数值算法,用于求解时变二次规划问题(1).新型泰勒差分公式具体描述为

$$\dot{\mathbf{y}}_k \approx (24\mathbf{y}_{k+1} - 5\mathbf{y}_k - 12\mathbf{y}_{k-1} - 6\mathbf{y}_{k-2} - 4\mathbf{y}_{k-3} + 3\mathbf{y}_{k-4})/(48\tau). \quad (6)$$

对于差分公式(6),其具有 $O(\tau^3)$ 的截断误差<sup>[16-18]</sup>.采用该差分公式对模型(3)进行离散便可得到数值算法,即

$$\mathbf{y}_{k+1} = \frac{5}{24}\mathbf{y}_k + \frac{1}{2}\mathbf{y}_{k-1} + \frac{1}{4}\mathbf{y}_{k-2} + \frac{1}{6}\mathbf{y}_{k-3} - \frac{1}{8}\mathbf{y}_{k-4} - 2\tau\mathbf{C}_k^{-1}\dot{\mathbf{C}}_k\mathbf{y}_k - 2\tau\mathbf{C}_k^{-1}\dot{\mathbf{d}}_k - h\mathbf{C}_k^{-1}(\mathbf{C}_k\mathbf{y}_k + \mathbf{d}_k). \quad (7)$$

式(7)便是文中提出用以求解(1)的高精度数值算法. 对于算法(7),其迭代计算需要5个初始值,即 $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$ 和 $\mathbf{y}_4$ . 结合算法(4),给定一个初始值 $\mathbf{y}_0$ ,其余的4个初始值通过如下公式计算,即

$$\begin{cases} \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_0 - \tau\mathbf{C}_0^{-1}\dot{\mathbf{C}}_0\mathbf{y}_0 - \tau\mathbf{C}_0^{-1}\dot{\mathbf{d}}_0 - h\mathbf{C}_0^{-1}(\mathbf{C}_0\mathbf{y}_0 + \mathbf{d}_0), \\ \mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_1 - \tau\mathbf{C}_1^{-1}\dot{\mathbf{C}}_1\mathbf{y}_1 - \tau\mathbf{C}_1^{-1}\dot{\mathbf{d}}_1 - h\mathbf{C}_1^{-1}(\mathbf{C}_1\mathbf{y}_1 + \mathbf{d}_1), \\ \mathbf{y}_3 = \mathbf{y}_2 - \tau\mathbf{C}_2^{-1}\dot{\mathbf{C}}_2\mathbf{y}_2 - \tau\mathbf{C}_2^{-1}\dot{\mathbf{d}}_2 - h\mathbf{C}_2^{-1}(\mathbf{C}_2\mathbf{y}_2 + \mathbf{d}_2), \\ \mathbf{y}_4 = \mathbf{y}_3 - \tau\mathbf{C}_3^{-1}\dot{\mathbf{C}}_3\mathbf{y}_3 - \tau\mathbf{C}_3^{-1}\dot{\mathbf{d}}_3 - h\mathbf{C}_3^{-1}(\mathbf{C}_3\mathbf{y}_3 + \mathbf{d}_3). \end{cases}$$

对于所提出的数值算法(7),可定义误差函数为

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{C}_k\mathbf{y}_k + \mathbf{d}_k \in \mathbf{R}^{n+m}.$$

显然,若 $\mathbf{e}_k = 0$ ,则 $\mathbf{C}_k\mathbf{y}_k + \mathbf{d}_k = 0$ ,且 $\mathbf{y}_k$ 的前 $n$ 个元素 $(\mathbf{x}_k)$ 组成时变二次规划问题(1)的最优解<sup>[8]</sup>. 因此,经过一定次数的迭代计算后,数值算法(7)的计算误差 $\|\mathbf{e}_k\|_2$ ( $\|\cdot\|_2$ 为向量的二范数)将会变得足够小,此时的状态向量 $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k = k\tau)$ 即为问题(1)的最优解. 如下的理论结果可进一步保证数值算法(7)的计算性能.

**命题1** 所提出的数值算法(7)是一个以截断误差为 $O(\tau^4)$ 的收敛方法.

证明:对于数值算法(7),其特征多项式为

$$\rho(\theta) = \theta^5 - \frac{5}{24}\theta^4 - \frac{1}{2}\theta^3 - \frac{1}{4}\theta^2 - \frac{1}{6}\theta + \frac{1}{8}.$$

当求解 $\rho(\theta) = 0$ 时,有如下计算结果: $\theta_1 = 1, \theta_2 = 0.3833, \theta_3 = -0.7627, \theta_4 = -0.2062 + 0.6206i, \theta_5 = -0.2062 - 0.6206i$ .

显然,有一个根在单位圆上,其余的根都在单位圆内. 根据文献[22],数值算法(7)是零稳定的. 考虑泰勒差分公式(6),有

$$\dot{\mathbf{y}}_k = (24\mathbf{y}_{k+1} - 5\mathbf{y}_k - 12\mathbf{y}_{k-1} - 6\mathbf{y}_{k-2} - 4\mathbf{y}_{k-3} + 3\mathbf{y}_{k-4})/(48\tau) + O(\tau^3). \quad (8)$$

基于上述分析,采用式(8)对模型(3)进行离散,可得

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{k+1} = & \frac{5}{24}\mathbf{y}_k + \frac{1}{2}\mathbf{y}_{k-1} + \frac{1}{4}\mathbf{y}_{k-2} + \frac{1}{6}\mathbf{y}_{k-3} - \frac{1}{8}\mathbf{y}_{k-4} - \\ & 2\tau\mathbf{C}_k^{-1}\dot{\mathbf{C}}_k\mathbf{y}_k - 2\tau\mathbf{C}_k^{-1}\dot{\mathbf{d}}_k - h\mathbf{C}_k^{-1}(\mathbf{C}_k\mathbf{y}_k + \mathbf{d}_k) + O(\tau^4). \end{aligned}$$

去掉上式中的 $O(\tau^4)$ ,即为所提出的数值算法(7),这表明该算法具有4阶的一致性.

综上所述,数值算法(7)具有零稳定和一致性<sup>[22]</sup>. 因此,所提出的数值算法(7)是一个收敛方法,且其截断误差为 $O(\tau^4)$ ,证毕.

**命题2** 对于一个可求解的时变二次规划问题(1),所提数值算法(7)的计算稳态误差具有 $O(\tau^4)$ 的变化规律.

证明:由节1求解(1)可等价于时变线性方程(2)的求解. 因此,定义 $\mathbf{y}_k^* \in \mathbf{R}^{n+m}$ ,且其满足 $\mathbf{C}_k\mathbf{y}_k^* + \mathbf{d}_k = 0$ . 由定理1的证明可得,当 $k$ 足够大时,有 $\mathbf{y}_k = \mathbf{y}_k^* + O(\tau^4)$ ,进而可得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_k\|_2 = & \|\mathbf{C}_k\mathbf{y}_k + \mathbf{d}_k\|_2 = \|\mathbf{C}_k(\mathbf{y}_k^* + O(\tau^4)) + \mathbf{d}_k\|_2 = \\ & \|\mathbf{C}_k\mathbf{y}_k^* + \mathbf{d}_k + O(\tau^4)\|_2 = O(\tau^4). \end{aligned}$$

上式即为计算稳态误差 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}_k\|_2 = O(\tau^4)$ . 所提数值算法(7)对应的计算稳态误差具有 $O(\tau^4)$ 的变化规律,证毕.

### 3 数值实验验证

通过对比性的数值实验验证所提数值算法的优越性和有效性. 对于时变二次规划问题(1),系数矩阵和向量选择分别为

$$Q(t) = \begin{bmatrix} 2\sin t + 4 & \cos t \\ \cos t & \sin t + 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2 \times 2}, \quad A(t) = [\cos 3t \quad \sin 3t] \in \mathbf{R}^{1 \times 2},$$

$$p(t) = [\sin 3t \quad \cos 3t]^T \in \mathbf{R}^2, \quad b(t) = \cos t \in \mathbf{R}.$$

当  $\tau=0.01$  和  $h=0.4$  时,采用所提出的数值算法(7)求解时变二次规划问题(1),其计算结果,如图1所示.图1中: $k$ 为迭代次数; $\mathbf{x}_k$ 为不同迭代次数下的取值; $\|\mathbf{e}_k\|_2$ 为计算误差.

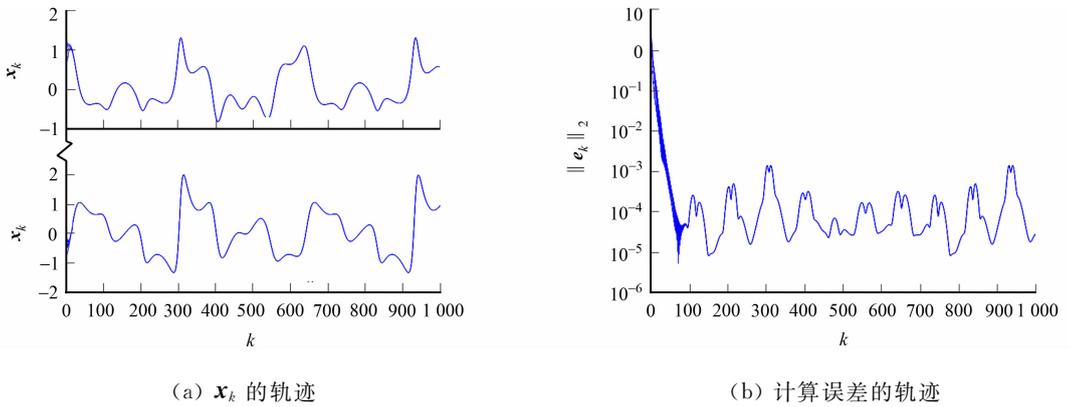


图1 采用数值算法(7)求解时变二次规划问题(1)的实验结果( $\tau=0.01$ ,  $h=0.4$ )

Fig.1 Numerical results of using numerical algorithm (7) for solving time-varying quadratic program (1) ( $\tau=0.01$ ,  $h=0.4$ )

由图1(a)可知:从5个不同的初始状态出发,由数值算法计算得到的  $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k = k\tau)$  轨迹都收敛到同一个时变轨迹.由图1(b)可知:计算误差  $\|\mathbf{e}_k\|_2 = \|\mathbf{C}_k \mathbf{y}_k + \mathbf{d}_k\|_2$  快速减小,并且维持在一个小的数值范围内,其计算稳态误差的数量级为  $10^{-3}$ .这说明算法产生的  $\mathbf{x}_k$  将会收敛到时变线性矩阵向量方程(2)的理论解,也说明时变二次规划问题(1)的最优解.这些数值结果能很好地证明所提数值算法(7)的有效性.

当  $\tau=0.001$  和  $h=0.4$  时,采用所提出的数值算法(7)求解时变二次规划问题(1),其计算结果如图2所示.

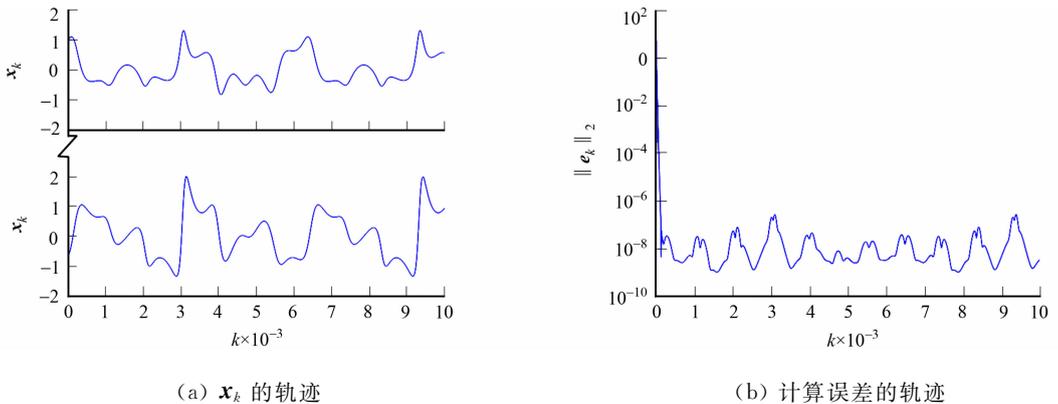


图2 采用数值算法(7)求解时变二次规划问题(1)的实验结果( $\tau=0.001$ ,  $h=0.4$ )

Fig.2 Numerical results of using numerical algorithm (7) for solving time-varying quadratic program (1) ( $\tau=0.001$ ,  $h=0.4$ )

由图2(a)可知:由数值算法计算得到的  $\mathbf{x}_k$  轨迹都收敛到同一个轨迹.由图2(b)可知:算法的计算误差快速减小并维持在一个更小的数值范围内,且其计算稳态误差数量级为  $10^{-7}$ .显然,这些数值结果再次表明所提数值算法(7)能有效地求解时变二次规划问题(1).值得指出的是,对比图1(b),2(b)可知:当  $\tau$  的数值减小(从0.01到0.001)时,算法的计算稳态误差也随之减小(从  $10^{-3}$ 到  $10^{-7}$ ).因此,所提数值算法的计算性能可以通过减小  $\tau$  得到有效提高.

采用不同数值的  $h$  和  $\tau$  对数值算法(4),(5)和(7)进行对比性的数值实验,结果如表1所示.表1中: $e(t)$ 为稳态误差.

由表1可知:固定  $\tau$  的数值不变,采用不同的  $h$ ,3种数值算法的计算性能都会有所不同,即相应的

计算稳态误差有所差异; 而通过适当增加  $h$  的数值, 算法的计算性能均可得到一定的提高. 特别地, 固定  $h$  的数值不变, 当  $\tau$  的数值减小 10 倍, 有如下 3 种情况.

表 1 不同的  $h$  和  $\tau$  值下, 采用数值算法 (4), (5) 和 (7) 求解时变二次规划问题 (1) 的计算稳态误差

Tab. 1 Computational steady-state residual errors of using numerical algorithms (4), (5) and (7) under different values of  $h$  and  $\tau$  for solving time-varying quadratic program (1)

算法	$h$	$e(t)$			变化规律
		$\tau=0.01$	$\tau=0.001$	$\tau=0.0001$	
数值算法 (4)	0.2	$5.005 \times 10^{-2}$	$5.787 \times 10^{-4}$	$4.019 \times 10^{-6}$	$O(\tau^2)$
	0.3	$3.687 \times 10^{-2}$	$4.015 \times 10^{-4}$	$4.003 \times 10^{-6}$	
	0.4	$2.733 \times 10^{-2}$	$2.694 \times 10^{-4}$	$3.014 \times 10^{-6}$	
	0.5	$2.383 \times 10^{-2}$	$2.294 \times 10^{-4}$	$2.411 \times 10^{-6}$	
	0.6	$2.017 \times 10^{-2}$	$1.951 \times 10^{-4}$	$1.890 \times 10^{-6}$	
数值算法 (5)	0.2	$1.570 \times 10^{-2}$	$2.019 \times 10^{-5}$	$2.122 \times 10^{-8}$	$O(\tau^3)$
	0.3	$1.188 \times 10^{-2}$	$1.441 \times 10^{-5}$	$1.446 \times 10^{-8}$	
	0.4	$9.037 \times 10^{-3}$	$1.052 \times 10^{-5}$	$1.039 \times 10^{-8}$	
	0.5	$7.997 \times 10^{-3}$	$8.037 \times 10^{-6}$	$7.542 \times 10^{-9}$	
	0.6	$6.821 \times 10^{-3}$	$6.836 \times 10^{-6}$	$6.918 \times 10^{-9}$	
数值算法 (7)	0.2	$1.902 \times 10^{-3}$	$4.621 \times 10^{-7}$	$3.417 \times 10^{-11}$	$O(\tau^4)$
	0.3	$1.631 \times 10^{-3}$	$3.080 \times 10^{-7}$	$4.702 \times 10^{-11}$	
	0.4	$1.363 \times 10^{-3}$	$2.716 \times 10^{-7}$	$2.714 \times 10^{-11}$	
	0.5	$1.263 \times 10^{-3}$	$1.913 \times 10^{-7}$	$1.997 \times 10^{-11}$	
	0.6	$1.104 \times 10^{-3}$	$1.753 \times 10^{-7}$	$1.772 \times 10^{-11}$	

- 1) 算法 (4) 的计算稳态误差可减小 100 倍, 即其计算稳态误差具有  $O(\tau^2)$  的变化规律<sup>[6]</sup>.
- 2) 算法 (5) 的计算稳态误差可减小 1 000 倍, 即其计算稳态误差具有  $O(\tau^3)$  的变化规律<sup>[6]</sup>.
- 3) 算法 (7) 的计算稳态误差可减小 10 000 倍, 即其计算稳态误差具有  $O(\tau^4)$  的变化规律.

显然, 对比算法 (4), (5), 通过减小  $\tau$  的数值, 所提算法 (7) 的计算性能可以得到更为有效的提高. 并且, 在相同的  $h$  和  $\tau$  的条件下, 算法 (7) 的计算精度均优于另外两种算法的计算精度. 总的来说, 上述对比性实验结果很好地表明所提数值算法的优越性和有效性.

### 4 机械臂应用研究

机械臂的运动控制是近年来的研究热点之一<sup>[8,15,19-21,23]</sup>. 基于节 2, 3 的理论分析和数值实验, 将所提数值算法 (7) 应用于机械臂的运动控制中, 以体现其应用前景.

一般而言, 机械臂的运动控制问题可描述为, 给定机械臂末端执行器的运动轨迹  $\mathbf{r}_d(t) \in \mathbf{R}^m$ , 如何有效地求解得到机械臂的关节角度向量  $\boldsymbol{\theta}(t) \in \mathbf{R}^n$ . 已有的研究成果<sup>[8,19-21]</sup> 表明, 可通过求解如下的二次规划问题以实现机械臂运动控制的目的. 即

$$\left. \begin{aligned} \min \quad & \dot{\boldsymbol{\theta}}^T(t) \dot{\boldsymbol{\theta}}(t) / 2 + 4(\boldsymbol{\theta}(t) - \boldsymbol{\theta}(0))^T \dot{\boldsymbol{\theta}}(t), \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}(t)) \dot{\boldsymbol{\theta}}(t) = \dot{\mathbf{r}}_d(t). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式 (9) 中:  $\dot{\boldsymbol{\theta}}(t)$  为关节速度向量;  $\boldsymbol{\theta}(0)$  为关节角度初始值;  $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}(t)) \in \mathbf{R}^{m \times n}$  为机械臂的雅克比矩阵;  $\dot{\mathbf{r}}_d(t)$  为  $\mathbf{r}_d(t)$  的时间导数. 对于上述时变二次规划问题 (9), 可利用所提出的数值算法 (7) 进行求解, 从而实现机械臂的运动控制.

通过基于五连杆机械臂的仿真结果表明算法 (7) 的有效性和应用性, 五连杆机械臂的几何结构对应的雅克比矩阵<sup>[15]</sup> 描述为

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_2 - l_3 s_3 - l_4 s_4 - l_5 s_5, & -l_2 s_2 - l_3 s_3 - l_4 s_4 - \\ l_1 c_1 + l_2 c_2 + l_3 c_3 + l_4 c_4 + l_5 c_5, & l_2 c_2 + l_3 c_3 + l_4 c_4 + \\ l_5 s_5, & -l_3 s_3 - l_4 s_4 - l_5 s_5, & -l_4 s_4 - l_5 s_5, & -l_5 s_5 \\ l_5 c_5, & l_3 c_3 + l_4 c_4 + l_5 c_5, & l_4 c_4 + l_5 c_5, & l_5 c_5 \end{bmatrix}.$$

上式中:  $s_i = \sin \sum_{j=1}^i \theta_j$ ;  $c_i = \cos \sum_{j=1}^i \theta_j$ ;  $l_i$  为机械臂连杆的长度.

基于这样的机械臂完成不同的轨迹跟踪任务,对所提出的数值算法(7)进行计算机模拟仿真.仿真中,机械臂各连杆的长度均设置为 1 m,机械臂各关节角度的初始值均设置为  $15^\circ$ ,相应的结果如图 3,4 所示.图 3,4 中:  $x, y$  分别表示水平面的垂直和水平方向;  $E$  为机械臂末端执行器的跟踪误差.

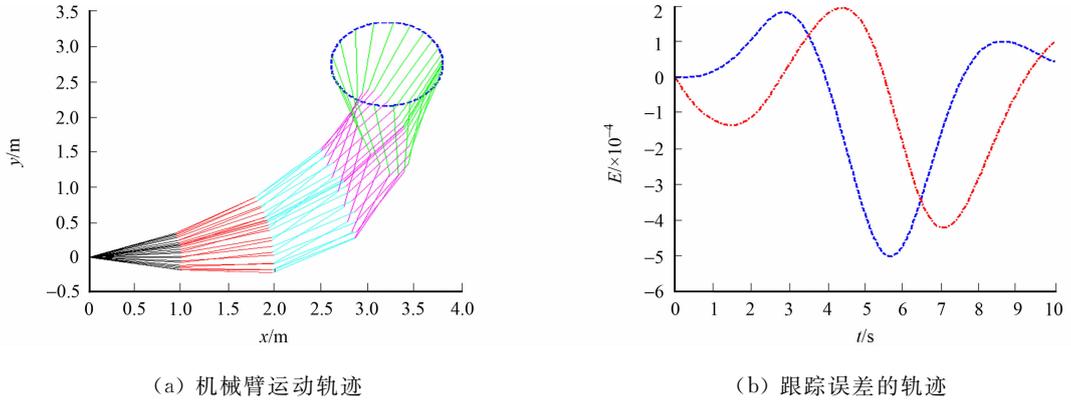


图 3 采用数值算法(7)使五连杆机械臂完成圆形轨迹跟踪的仿真结果( $\tau=0.01, h=0.4$ )

Fig. 3 Simulation results of using numerical algorithm (7) for five-link robot manipulator tracking circular path ( $\tau=0.01, h=0.4$ )

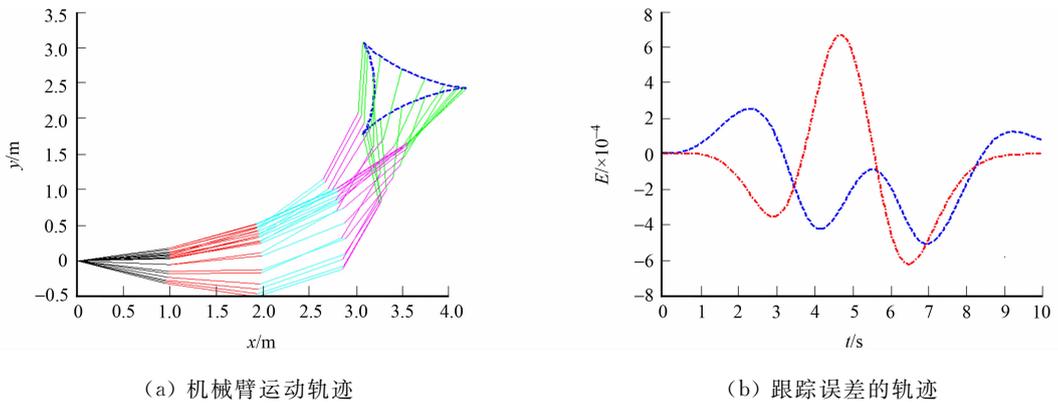


图 4 采用数值算法(7)使五连杆机械臂完成三尖瓣图形轨迹跟踪的仿真结果( $\tau=0.01, h=0.4$ )

Fig. 4 Simulation results of using numerical algorithm (7) for five-link robot manipulator tracking tricuspid path ( $\tau=0.01, h=0.4$ )

由图 3,4 可知:五连杆机械臂的末端执行器能很好地完成给定轨迹(即圆形和三尖瓣图形)的跟踪任务,且相应的跟踪误差都比较小(在  $10^{-4}$  的数量级).由此可知,这些仿真结果表明了所提数值算法(7)能有效地应用于机械臂的运动控制.

### 5 结束语

结合新型泰勒差分公式推导得到一种具有高计算精度的数值算法(7),以求解时变二次规划问题(1).理论分析和对比性数值实验证明算法(7)的优越性和有效性.理论分析和实验结果均表明算法(7)的计算稳态误差与采样间隔  $\tau$  具有  $O(\tau^4)$  的关系,且该算法可以有效地求解时变二次规划问题(1).基于五连杆机械臂的仿真结果,可进一步验证所提数值算法(7)的应用前景.

### 参考文献:

[1] NOCEDAL J, WRIGHT S J. Numerical optimization[M]. New York: Springer-Verlag, 1999.  
 [2] BOYD S, VANDENBERGHE L. Convex optimization[M]. New York: Cambridge University, 2004.  
 [3] 常雨芳, 王豪, 谢昊, 等. 采用矩阵建模方式的冷热电联供系统运行优化[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2018, 39(2): 233-239. DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.201703057.

- [4] 沈国浪,童欣,李占福.应用 GA-BP 神经网络优化平摆复合振动筛的振动参数[J].华侨大学学报(自然科学版),2018,39(4):509-513. DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.201803010.
- [5] GUO Dongsheng, LIN Xinjie, SU Zhaozhu, *et al.* Design and analysis of two discrete-time ZD algorithms for time-varying nonlinear minimization[J]. Numerical Algorithms, 2018, 77(1):23-36. DOI:10.1007/s11075-017-0302-4.
- [6] BAI Zhongzhi, TAO Min. On preconditioned and relaxed AVMM methods for quadratic programming problems with equality constraints[J]. Linear Algebra and its Applications, 2017, 516:264-285. DOI:10.1016/j.laa.2016.11.038.
- [7] JIN Long, LI Shuai. Nonconvex function activated zeroing neural network models for dynamic quadratic programming subject to equality and inequality constraints[J]. Neurocomputing, 2017, 267:107-113. DOI:10.1016/j.neucom.2017.05.017.
- [8] LIAO Bolin, ZHANG Yunong, JIN Long. Taylor  $O(h^3)$  discretization of ZNN models for dynamic equality-constrained quadratic programming with application to manipulators[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2016, 27(2):225-237. DOI:10.1109/TNNLS.2015.2435014.
- [9] 谢清,张雨浓,余晓填,等.面向冗余度机械臂QP问题求解的E47和94LVI数值算法[J].计算机工程与科学,2015,37(7):1405-1411.
- [10] 刘德友,牛九肖.求解一类新的二次规划问题的时滞投影神经网络方法[J].华侨大学学报(自然科学版),2013,34(2):230-235. DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.2013.02.0230.
- [11] 田朝薇,宋海洲.求非凸二次约束二次规划全局解的凸规划方法[J].华侨大学学报(自然科学版),2011,32(4):458-462. DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.2011.04.0458.
- [12] ZHANG Yunong, WU Fangting, Xiao Zhengli, *et al.* Performance analysis of LVI-based PDNN applied to real-time solution of time-varying quadratic programming[C]//International Joint Conference on Neural Networks. Beijing: IEEE Press, 2016:3155-3160. DOI:10.1109/IJCNN.2014.6889453.
- [13] ZHANG Yunong, LI Zhan. Zhang neural network for online solution of time-varying convex quadratic program subject to time-varying linear-equality constraints[J]. Physics Letters A, 2009, 373(18):1639-1643.
- [14] MATHEWS J H, FINK F D. Numerical methods using MATLAB[M]. New Jersey: Prentice Hall, 2004.
- [15] ZHANG Yunong, JIN Long, GUO Dongsheng, *et al.* Taylor-type 1-step-ahead numerical differentiation rule for first-order derivative approximation and ZNN discretization[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2015, 273:29-40. DOI:10.1016/j.cam.2014.05.027.
- [16] GUO Dongsheng, NIE Zhuoyun, YAN Laicheng. Novel discrete-time Zhang neural network for time-varying matrix inversion[J]. IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics Systems, 2017, 47(8):2301-2310. DOI:10.1109/TSMC.2017.2656941.
- [17] GUO Dongsheng, XU Feng, LI Zexin, *et al.* Design, verification, and application of new discrete-time recurrent neural network for dynamic nonlinear equations solving[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2018, 14(9):3936-3945. DOI:10.1109/TII.2017.2787729.
- [18] GUO Dongsheng, YAN Laicheng, NIE Zhouyun. Design, analysis, and representation of novel five-step dtzd algorithm for time-varying nonlinear optimization[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2018, 29(9):4248-4260. DOI:10.1109/TNNLS.2017.2761443.
- [19] ZHANG Yunong, ZHANG Zhijun. Repetitive motion planning and control of redundant robot manipulators[M]. New York: Springer-Verlag, 2013.
- [20] ZHANG Yunong, JIN Long. Robot manipulator redundancy resolution[M]. Hoboken: Wiley, 2017.
- [21] JIN Long, LI Shuai, YU Jiguo, *et al.* Robot manipulator control using neural networks: A survey[J]. Neurocomputing, 2018, 28:23-34. DOI:10.1016/j.neucom.2018.01.002.
- [22] GRIFFITHS D F, HIGHAM D J. Numerical methods for ordinary differential equations: Initial value problems [M]. England: Springer, 2010.
- [23] 余乐,李庆,郑力新,等.六自由度机械臂运动轨迹自动生成方法仿真与实现[J].华侨大学学报(自然科学版),2018,39(3):355-359. DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.201706082.

(编辑:李宝川 责任编辑:黄晓楠 英文审校:吴逢铁)