

DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.201808032



上半平面的带权 Bergman 投影 与 Bloch 空间

李西振, 陈行堤, 王洁

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 研究上半平面带权 Bergman 投影的范数估计. 结果表明: 带权 Bergman 投影算子 P_α 将 $L^\infty(\Pi)$ 空间映射到上半平面 Bloch 空间, 且满足不等式 $\|P_\alpha f\|_{B(\Pi)} \leq C \|f\|_{L^\infty(\Pi)}$, 其中, C 为常数, 并给出 C 的精确值; 构造一个新的上半平面 Bergman 投影, 并给出它的一个范数估计.

关键词: 带权 Bergman 投影; Bloch 空间; 范数估计; 精确值

中图分类号: O 174. 55 文献标志码: A 文章编号: 1000-5013(2019)02-0277-04

Bloch Space and Norm of Bergman Projection on Upper Half Plane

LI Xizhen, CHEN Xingdi, WANG Jie

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: We study the estimate of the norm of weighted Bergman projection on the upper half plane. The results show that the weighted Bergman projection P_α maps the space $L^\infty(\Pi)$ into a Bloch space, satisfying that $\|P_\alpha f\|_{B(\Pi)} \leq C \|f\|_{L^\infty(\Pi)}$, where C is a sharp constant. Moreover, we construct one new Bergman projection operator, and we also obtain its norm estimate.

Keywords: weighted Bergman projection; Bloch space; norm estimate; sharp constant

1 预备知识

令 $\Pi = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ 表示上半平面, 当 $\alpha > -1$ 时, 上半平面 Π 上的带权 Lebesgue 测度可表示为 $dA_\alpha(z) = (\alpha + 1)(2\text{Im } z)^{\alpha+2} dA(z)$.

上式中: $dA(z) = \frac{1}{\pi} dx dy$.

如果对一个解析函数 f , 其 Bloch 范数满足 $\|f\|_{B(\Pi)} = \sup_{z \in \Pi} (\text{Im } z) |f'(z)| < \infty$, 则称 f 为上半平面 Π 上的一个 Bloch 函数, 上半平面 Bloch 函数全体构成的上半平面 Bloch 空间, 记为 $B(\Pi)$.

对于单位圆盘的情形, Bergman 投影算子 P_α 在单位圆盘 D 上的积分表达式为

$$P_\alpha f = (\alpha + 1) \int_D \frac{(1 - |w|^2)^\alpha f(w)}{(1 - \bar{z}w)^{\alpha+1}} dA(w), \quad z \in D, \quad f \in L^\infty(D).$$

收稿日期: 2018-08-23

通信作者: 陈行堤(1976-), 男, 教授, 博士, 主要从事函数论的研究. E-mail: chxtt@hqu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11471128); 福建省高校创新团队发展计划(2018 年度); 福建省泉州市高层次人才团队项目(2017ZT012); 华侨大学研究生科研创新能力培育计划资助项目(17013070008)

将单位圆盘上的有界函数 $L^\infty(D)$ 映到单位圆盘上的 Bloch 空间 $B(D)$. Zhu^[1] 证明了在 $\alpha=0$ 时, 有 $\|Pf\|_{B(D)} \leq C \|f\|_\infty$, 其中, C 为常数. Perälä^[2] 给出常数 C 的精确值为 $\frac{8}{\pi}$. Kalaj 等^[3] 推广了 Perälä 的结果, 给出了 n 维情形下 Bergman 投影算子 P_α 范数估计的精确上界, 然而所使用 $\|\cdot\|_{B(D)}$ 并非一个完备的范数. Perälä^[4] 给出一个完备的范数估计, 在一定意义上补充完善文献[2-3]的工作. 更多 Bergman 投影算子的相关内容可参考文献[5-6].

函数 $f \in L^\infty(\Pi)$ 的上半平面的 Bergman 投影算子^[7] 为

$$P_\alpha f(z) = i^{\alpha+1} \int_\Pi \frac{f(w)}{(z-\bar{w})^{\alpha+2}} dA_\alpha(w).$$

Bergman 投影算子工作多集中在该投影核的范数估计^[8-10], 文中研究侧重于上半平面 Bergman 空间与上半平面 Bloch 空间的联系, 同单位圆情形相似, 有

$$\|P_\alpha f\|_{B(\Pi)} \leq C \|f\|_{L^\infty(\Pi)},$$

并且给出了常数 C 的精确值. 通过复合单位圆盘到上半平面的共形映射 $\phi(z) = i \frac{1+z}{1-z}: D \rightarrow \Pi$, 得到一个不同的上半平面 Bergman 投影算子, 并给出一个范数估计.

引理 A^[2] Bergman 投影算子 P 将 $L^\infty(D)$ 空间有界的映到 Bloch 空间, 且满足不等式

$$\|Pf\|_{B(D)} \leq C \|f\|_{L^\infty(D)},$$

常数 C 的精确值为 $\frac{8}{\pi}$.

引理 B^[11] 假设 $a > -1, b > -1$ 且 $2a - b > 2$, 则有

$$\int_\Pi \frac{\operatorname{Im} w}{|z-\bar{w}|^{2a}} dA(w) = \frac{\Gamma(1+b)\Gamma(2a-b-2)}{2^{2a-2}\Gamma^2(a)} (\operatorname{Im} z)^{2+b-2a}.$$

引理 C^[11] 假设 $a \in \mathbf{R}$ 且 $b > -1$, 则有

$$\int_\Pi \frac{(\operatorname{Im} w)^b}{|z-\bar{w}|^{2a} |\bar{w}+i|^{2b-2a+4}} dA(w) = \frac{2^{2b-2a-2}}{1+b} |z+i|^{-2a} F\left[a, a; 2+b; \frac{|z-i|^2}{|z+i|^2}\right].$$

$F[a, b; c; x]$ 为超几何函数, $F[a, b; c; x] = \sum_{k=0}^\infty \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{k!}$, 其中, $(a)_0 = 1, (a)_k = a(a+1)\cdots(a+k-1), k \geq 1; \Gamma(s)$ 为欧拉函数, $\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt, s > 0$.

2 主要结果及证明

引理 1 设 $a > -1$, 则有

$$\int_\Pi \frac{(\operatorname{Im} w)^a}{|z-w|^{a+3}} dA(w) \asymp (\operatorname{Im} z)^{-1}.$$

证明 令 $b=\alpha, 2a=\alpha+3$, 由引理 B 可得

$$\int_\Pi \frac{(\operatorname{Im} w)^a}{|z-\bar{w}|^{a+3}} dA(w) = \frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(\alpha+3-\alpha-2)}{2^{\alpha+1}\Gamma^2\left(\frac{\alpha+3}{2}\right)} (\operatorname{Im} z)^{-1} = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{2^{\alpha+1}\Gamma^2\left(\frac{\alpha+3}{2}\right)} (\operatorname{Im} z)^{-1},$$

从而有

$$\int_\Pi \frac{(\operatorname{Im} w)^a}{|z-w|^{a+3}} dA(w) \asymp (\operatorname{Im} z)^{-1}.$$

引理 1 证毕.

定理 1 设 $-1 < \alpha < \infty, P_\alpha$ 为上半平面带权 Bergman 投影, 则 P_α 将上半平面 $L^\infty(\Pi)$ 有界映到上半平面 Bloch 空间 $B(\Pi)$, 且满足不等式 $\|P_\alpha f\|_{B(\Pi)} \leq C \|f\|_{L^\infty(\Pi)}$, 其中, C 为常数.

证明 假设 $g \in L^\infty(\Pi)$ 且 $f = P_\alpha g$, 则有

$$f(z) = i^{\alpha+2} (\alpha+1) \int_\Pi \frac{(\operatorname{Im} w)^\alpha g(w)}{(z-\bar{w})^{\alpha+2}} dA(w).$$

对上式等号两边微分, 可得 $f'(z) = -i^{\alpha+2}(\alpha+1)(\alpha+2) \int_{\Pi} \frac{(\operatorname{Im} w)^{\alpha} g(w)}{(z-\bar{w})^{\alpha+3}} dA(w)$. 应用引理 1, 可得 $(\operatorname{Im} z) |f'| \asymp |g(z)|$, 也即 $f \in B(\Pi)$, 且有

$$\|P_{\alpha} f\|_{B(\Pi)} \leq C \|f\|_{L^{\infty}(\Pi)}.$$

引理 2 常数 C 的最佳值可表示为

$$C = \sup_{z \in \Pi} (\alpha+1)(\alpha+2) \int_{\Pi} \frac{(\operatorname{Im} z)(2\operatorname{Im} w)^{\alpha}}{|z-\bar{w}|^{\alpha+3}} dA(w).$$

证明 令 $f \in L^{\infty}(\Pi)$, 则

$$P_{\alpha} f(z) = i^{\alpha+2}(\alpha+1) \int_{\Pi} \frac{(\operatorname{Im} w)^{\alpha} f(w)}{(z-\bar{w})^{\alpha+2}} dA(w),$$

从而有

$$\|P_{\alpha} f\|_{B(\Pi)} = \sup_{z \in \Pi} (\operatorname{Im} z) |(P_{\alpha} f)'| = \sup_{z \in \Pi} (\alpha+2)(\alpha+1) \int_{\Pi} \frac{(2\operatorname{Im} w)^{\alpha} (\operatorname{Im} z) f(w)}{|z-\bar{w}|^{\alpha+3}} dA(w).$$

对任意 $\epsilon > 0$, 存在函数 $g_{\epsilon} \in L^{\infty}(\Pi)$, $\zeta \in \Pi$, 使得 $\|g_{\epsilon}\|_{\infty} < 1$ 且有 $(\operatorname{Im} z) |(P_{\alpha} g_{\epsilon})'| > C - \epsilon$.

对任意的 $z \in \Pi$, 令

$$f_z(w) = \frac{(\operatorname{Im} w)^{\alpha} |z-\bar{w}|^{\alpha+3}}{|\operatorname{Im} w|^{\alpha} (z-\bar{w})^{\alpha+3}}.$$

对任意的 $z \in \Pi$ 有 $\|f_z\|_{\infty} = 1$, 因此, 对于 $\|g_{\epsilon}\|_{\infty} < 1$, 有

$$\left| \int_{\Pi} \frac{(\operatorname{Im} w)^{\alpha} g(w) dA(w)}{(z-\bar{w})^{\alpha+3}} \right| \leq \left| \int_{\Pi} \frac{(\operatorname{Im} w)^{\alpha} f_z(w) dA(w)}{(z-\bar{w})^{\alpha+3}} \right| \leq \int_{\Pi} \frac{|\operatorname{Im} w|^{\alpha} dA(w)}{|z-\bar{w}|^{\alpha+3}},$$

从而有

$$(\operatorname{Im} \zeta) |(P_{\alpha} f_{\zeta})'(\zeta)| \geq (\operatorname{Im} \zeta) |(P_{\alpha} g_{\epsilon})'(\zeta)|.$$

引理 2 得证.

定理 2 常数 C 的最佳值为 $C = \frac{(\alpha+2)(\alpha+1)\Gamma(1+\alpha)}{2\Gamma^2\left(\frac{\alpha+3}{2}\right)}$.

证明 由引理 2 可知

$$C = \sup_{z \in \Pi} (\alpha+1)(\alpha+2) \int_{\Pi} \frac{(\operatorname{Im} z)(2\operatorname{Im} w)^{\alpha}}{|z-\bar{w}|^{\alpha+3}} dA(w).$$

令 $\alpha = b, \alpha+3 = 2a$, 应用引理 B, 可得

$$C = \frac{(\alpha+2)(\alpha+1)\Gamma(1+\alpha)}{2\Gamma^2\left(\frac{\alpha+3}{2}\right)}.$$

定理 2 证毕.

单位圆盘 D 上的 Bergman 投影算子为

$$P_{\alpha} f(z) = (\alpha+1) \int_D \frac{(1-|w|^2)^{\alpha} f(w)}{(1-z\bar{w})^{\alpha+2}} dA(w), \quad z \in D.$$

单位圆到上半平面的共形变换为 $\phi(z) = i \frac{1+z}{1-z}: D \rightarrow \Pi$, 从而对 $z, w \in D$ 有

$$\phi(z) - \overline{\phi(z)} = \frac{2i(1-z\bar{w})}{(1-z)(1-\bar{w})},$$

$$J_{\phi}(z) = \frac{4}{|1-w|^4}, \quad \operatorname{Im} \phi(z) = \frac{1-|w|^2}{|1-w|^2}.$$

令 $\zeta, \xi \in \Pi, z, w \in D$, 则有

$$\zeta = \phi(z) = i \frac{1+z}{1-z}, \quad \xi = \phi(w) = i \frac{1+w}{1-w},$$

$$F(\zeta) = f_{\phi(w)}(\phi(z)) = \int_D \frac{(1-|w|^2)^{\alpha} f(w)}{(1-z\bar{w})^{\alpha+2}} dA(w) =$$

$$\int_{\Pi} \frac{(1-|\phi^{-1}(\xi)|^2)^{\alpha} f(\phi^{-1}(\xi))}{(1-\phi^{-1}(\zeta)\overline{\phi^{-1}(\xi)})^{\alpha+2}} J_{\phi}(\xi) dA(\xi).$$

整理即可得到上半平面 Bergman 投影算子的另一种表达形式,即

$$F(\zeta) = i^{\alpha+2} \int_{\Pi} \frac{(\operatorname{Im} \xi)^{\alpha} f(\xi) (\zeta+i)^{\alpha+2}}{(\zeta-\xi)^{\alpha+2} (\xi+i)^{\alpha+2}} dA(\xi).$$

为了方便记 $F(z)=T_{\alpha} f(z)$, 其中, $f \in L^{\infty}(\Pi)$. 进而有定理 3.

定理 3 设 $\alpha>-1$, 有 $\|T_{\alpha}\| \leq \frac{1}{1+\alpha} F\left[\frac{\alpha+2}{2}, \frac{\alpha+2}{2}; 2+\alpha; 1\right]$.

证明 令 $b=\alpha, a=\frac{\alpha+2}{2}$, 注意到 $2b-2a+4=\alpha+3$, 应用引理 C 可得

$$\|T_{\alpha}\| \leq \frac{1}{1+\alpha} F\left[\frac{\alpha+2}{2}, \frac{\alpha+2}{2}; 2+\alpha; \left|\frac{z-i}{z+i}\right|^2\right],$$

又对于 $z \in \Pi$, 令 $\zeta=\psi(z)=\frac{i-z}{i+z}$, 则有 $\zeta \in D$. 令 $|\zeta|=r \in (0,1)$, 对于 $\frac{\alpha+2}{2}>0, 2+\alpha>0$, 由于超几何函数

$F\left[\frac{\alpha+2}{2}, \frac{\alpha+2}{2}; 2+\alpha; r^2\right]$ 在区间 $(0,1)$ 是单调递增的, 因此有

$$\|T_{\alpha}\|_{\infty} \leq \frac{1}{1+\alpha} F\left[\frac{\alpha+2}{2}, \frac{\alpha+2}{2}; 2+\alpha; 1\right].$$

定理 3 证毕.

参考文献:

[1] ZHU Kehe. Operator theory in function spaces[M]. New York: American Mathematical Soc, 2007: 101-132.

[2] PERÄLÄ A. On the optimal constant for the Bergman projection onto the Bloch space[J]. Ann Acad Sci Fenn Math, 2012, 37(1): 245-249. DOI: 10. 5186/aasfm. 2012. 3722.

[3] KALAJ D, MARKOVIC M. Norm of the Bergman projection[J]. Math Scand, 2012(1): 143-160. DOI: 10. 7146/math. scand. a-18007.

[4] PERÄLÄ A. Bloch space and the norm of the Bergman projection[J]. Ann Acad Sci Fenn Math, 2013, 38(2): 849-853. DOI: 10. 5186/aasfm. 2013. 3850.

[5] HEDENMALM H, KORENBLUM B, ZHU K. Theory of Bergman spaces[M]. [S. l.]: Springer Science and Business Media, 2012: 1-27

[6] ZHU Kehe. A sharp norm estimate of the Bergman projection on L^p spaces[J]. Contemp Math, 2006, 404: 199-205. DOI: 10. 1090/conm/404/07644.

[7] DOSTANIC M. Integral operators induced by Bergman type kernels in the half plane[J]. Asymptot Anal, 2010, 67(3): 217-228. DOI: 10. 3233/ASY-2010-0979.

[8] LIU Congwen. Norm estimates for the Bergman projection and the Cauchy; Szegő projection over the siegel upper half-space[J]. arXivConstr approx, 2018, 48(3): 385-413. DOI: 10. 1007/ s00365-01-9390-6.

[9] POMMERENKE C. Boundary behaviour of conformal mappings[M]. London-New York: Aspects of contemporary complex analysis, Academic Press, 1980: 313-331.

[10] SEIDEL J, WALSH L. On the derivatives of functions analytic in the unit circle and their radii of univalence and of p -valence[J]. Trans Amer Math Soc, 1942, 52(1): 128-216. DOI: 10. 2307/1990157.

[11] LIU Congwen, ZHOU L F. On the p -norm of an integral operator in the half plane[J]. Canad Math Bull, 2013, 56(3): 593-601. DOI: 10. 4153/cmb-2011-186-3.

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 黄心中)