

DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.201804058



梁挠曲线方程的精确推导

刘海波^{1,2}, 刘玉丽³, 石祥锋²

(1. 北京科技大学 土木与环境工程学院, 北京 100083;

2. 华北科技学院 建筑工程学院, 北京 101601;

3. 华北科技学院 理学院, 北京 101601)

摘要: 采用数学工具,在不忽略任何高阶微量的基础上,修改原有近似的挠曲线方程,推导出更精确、更符合实际的方程式.通过有限元法验证该方程的可靠性,结果表明:传统的计算方法误差较大,且误差随着梁的跨度、横截面、荷载大小、抗弯刚度变化而变化;文中方法得到的误差较小.

关键词: 挠曲线; 挠度; 弯矩; 曲率; 有限元法

中图分类号: TU 311.1

文献标志码: A

文章编号: 1000-5013(2018)06-0840-04

Precise Derivation of Beam Deflection Equation

LIU Haibo^{1,2}, LIU Yuli³, SHI Xiangfeng²

(1. School of Civil and Environmental Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China;

2. Architectural Engineering College, China Institute of Science and Technology, Beijing 101601, China;

3. College of Science, North China Institute of Science and Technology, Beijing 101601, China)

Abstract: Using mathematical tools, without neglecting any high-order infinitesimals, the existed approximate deflection equation is modified, a more accurate and realistic equation is derived. The reliability of the equation is verified by finite element method. The results show that the traditional calculation error is obvious, the error varies for different the beam spans, cross sections, the values of the load and bending stiffness, the error of presented method is small.

Keywords: deflection curve; deflection; bending moment; curvature; finite element method

结构设计最主要的原则是安全性,结构的安全性由其组成的各个构件(如梁、柱)体现,构件的安全主要包括强度和刚度^[1-2].设计者往往会重视强度的设计,而对刚度的关注度不足.传统的刚度公式是在忽略一些因素基础上得到的近似公式,因此,国内学者做了一些改进研究.刘明超等^[3]推导了拉氏变换求解梁的挠曲线方程;李自林^[4]推导了用积分法求变截面梁的挠曲线方程;何斌等^[5]用直接定义法推导梁的挠曲线微分方程.这些新方程在某种程度上提高了计算精度,但也存在忽略一些高阶微量的情况^[6-8].基于此,本文在不忽略任何高阶微量的基础上,对梁的挠曲线方程进行精确推导.

1 梁刚度设计的理论基础

刚度设计主要考虑挠度和转角两部分.传统力学教材中给出了受弯构件挠曲线方程式^[9-11],即

$$f''(x) = -M(x)/(EI_z). \quad (1)$$

收稿日期: 2018-04-18

通信作者: 刘海波(1978-),男,副教授,主要从事岩土力学的研究. E-mail: lhb97@126.com.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51178185);中央高校基本科研业务费资助项目(3142014019)

式(1)中: $f(x)$ 为挠曲线方程; $M(x)$ 弯矩; E 为弹性模量; I_z 为惯性矩.

积分一次,得转角方程^[12]为

$$EI_z\theta = EI_zf(x)' = \int -M(x)dx + C. \tag{2}$$

式(2)中: θ 为转角, C 为常数项.

在式(2)的基础上,再积分一次,得挠度方程^[13-14]为

$$EI_zf(x) = \iint -M(x)dx dx + Cx + D. \tag{3}$$

式(3)中: D 为常数项.

传统方法在推导转角方程和挠度方程时忽略了很多因素^[15-16],这种近似虽然可以满足工程精度的要求^[17-18],但仍有必要对最接近真实情况的方程进行研究.

2 精确推导过程

悬臂梁受弯变形示意图,如图 1 所示.由图 1 可知:一矩形截面悬臂梁 AB 左端为固定端约束,右端悬挑;右端受一个垂直向下的荷载 F 作用;水平向右为 X 轴正向,垂直向下为 Y 轴正向.为了说明问题,任取一个形心为 C 的截面,在外荷载作用下,梁的挠曲线如图 1 虚线所示, C 从原来位置移动到 C' 位置,截面转过的角度为 θ ,挠度为 y .

挠曲线是 x 的函数,可以写成 $y=f(x)$.由几何关系及导数定义可知, $f'(x)=\tan \theta$ 或 $\theta=\arctan f'(x)$.又知曲率 $\frac{1}{\rho}$ 与抗弯刚度及弯矩 M 的关系,则有

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}. \tag{4}$$

式(4)中: ρ 为曲率半径.

在非纯弯曲情况下,弯矩和曲率随 x 的变化而变化,因此,弯矩和曲率都是 x 的函数,式(4)可以写成一般函数表达式,即

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EI_z}. \tag{5}$$

从几何上考虑,曲线上任一点的曲率公式为

$$\frac{1}{\rho(x)} = \pm \frac{f''(x)}{[1 + f'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}. \tag{6}$$

对 $f'(x)=\tan \theta$ 左右两次各求一次导,可得 $f''(x)=\sec^2 \theta$.将其代入式(6),并考虑式(5),有

$$\frac{1}{\rho(x)} = \pm \frac{\sec^2 \theta}{(1 + \tan^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{M(x)}{EI_z}. \tag{7}$$

因为 $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$,故式(7)可以简化为

$$\frac{1}{\sec \theta} = \pm \frac{M(x)}{EI_z}. \tag{8}$$

即 $\cos \theta = \pm \frac{M(x)}{EI_z}$.对 $f'(x)=\tan \theta$ 进行积分,可得 $f(x) = \int \tan \theta d\theta$.经过数学变换,式(8)等价于

$$f(x) = - \int \frac{1}{\cos \theta} d\cos \theta. \tag{9}$$

积分的结果为

$$f(x) = - \ln \cos \theta + C. \tag{10}$$

把 $\cos \theta = \pm \frac{M(x)}{EI_z}$ 代入式(10),可得

$$f(x) = - \ln \left[\pm \frac{M(x)}{EI_z} \right] + C. \tag{11}$$

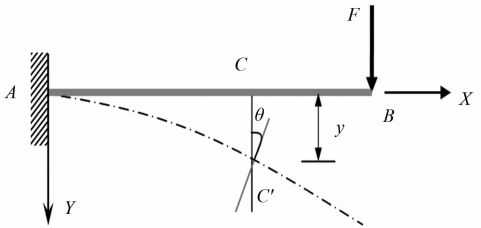


图 1 悬臂梁受弯变形示意图

Fig. 1 Bending deformation of cantilever beam

式(11)中:当弯矩 $M(x)$ 为负值时,正负号取负号;当 $M(x)$ 为正值时,取正号。

式(11)就是精确的挠曲线方程表达式,结合几何关系和导数定义可以求出转角,把 x 位置代入式(11)就可以求出任意位置的挠度。式(11)相对于传统求转角和挠度的式(2),(3)而言,不仅仅去掉了双重积分,成功地简化了公式,而且推导过程中没有忽略高阶微量项,故结果更接近真实情况。

3 有限元分析

为了进一步验证方程的可靠性,采用有限元方法对传统公式和文中公式进行对比分析。

利用有限元软件 ANSYS 建立有限元模型,如图 2 所示。边界条件为模型左侧完全约束,右侧杆状结构可看作一个悬臂梁。为了便于阐述,以期达到较大变形,采用矩形截面钢梁进行对比分析。悬臂梁的几何及物理力学参数如下:梁宽 b 为 0.3 m;梁宽 h 为 0.6 m;弹性模量 E 为 210 GPa;泊松比 ν 为 0.3;梁长 L 为 6 m;计算得到的惯性矩 I_z 为 0.005 4 m⁴;右端垂直轴线集中荷载 F 为 1 000 kN。梁最右端受到一个垂直梁轴线的集中荷载。

选择轴对称矩形悬臂梁,为了节省计算资源,采用二维模型进行计算。程序中,对适合梁的 Beam 3 单元进行模拟,并定义了相关实常数,划分网格后加载求解。梁变形后的位移图,如图 3 所示。关键各节点运动矢量图,如图 4 所示。该梁的弯矩图,如图 5 所示。有限元计算的各节点挠度值,如表 1 所示。

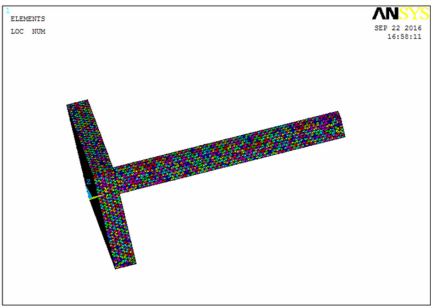


图 2 悬臂梁有限元模型

Fig. 2 Finite element model of cantilever beam

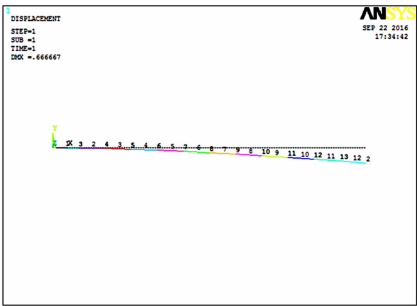


图 3 梁变形后位移图

Fig. 3 Displacement after beam deformation

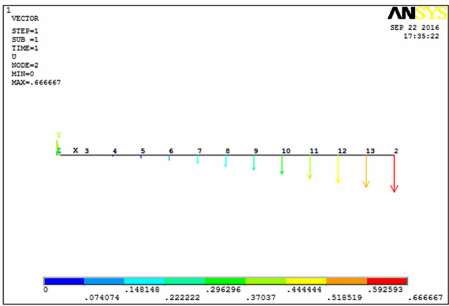


图 4 关键各节点运动矢量图

Fig. 4 Motion vector diagram of key nodes

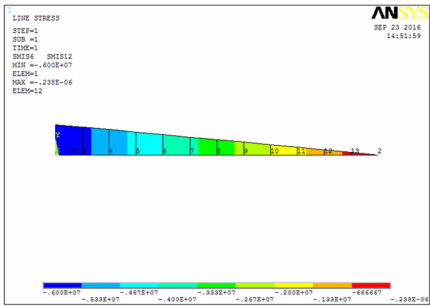


图 5 梁的弯矩图

Fig. 5 Beam bending moment diagram

表 1 有限元计算的各节点挠度值

Tab. 1 Each node deflection value by finite element calculation

| | | | | | | | |
|------|----------|----------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|----------|
| 节点号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 挠度/m | 0 | 0.666 67 | $0.675\ 15\times 10^{-2}$ | $0.262\ 35\times 10^{-1}$ | $0.572\ 92\times 10^{-1}$ | $0.987\ 65\times 10^{-1}$ | 0.149 50 |
| 节点号 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | |
| 挠度/m | 0.208 33 | 0.274 11 | 0.345 68 | 0.421 88 | 0.501 54 | 0.583 53 | |

由图 3,4 和表 1 可知:最大挠度发生在节点编号为 2 的位置,最大挠度为 0.666 67 m。由图 5 可知:最大弯矩为 6 000 kN·m,发生在 1 节点位置,这个结果和理论计算结果完全一致,足以说明有限元计算的可靠性。采用传统方法,利用式(3)计算各个节点的挠度,最大误差接近 10%,且误差随着 x 的变化而变化;而采用文中方法,利用式(11)计算的结果和有限元计算结果非常接近,最大误差不到 3%,最小误差不到 1%。为节省篇幅,具体计算过程不再赘述。

上述分析以悬臂梁为例,其他形式的梁经文中方法计算后,发现都与悬臂梁呈现一样的规律,且当梁的跨度越大、横截面积越小、抗弯刚度越小时,传统计算方法的误差越大。

4 结论

- 1) 经过精确推导,得到了挠曲线计算公式,该公式计算不需要计算二重积分,外形简单,便于计算。
- 2) 通过有限元方法和室内实验分别验证了传统公式和文中公式的精确度,发现利用文中公式计算出的结果精确度高,误差较小。
- 3) 梁在弯曲变形过程中,严格从数学角度上分析,轴向(对于梁来说一般指水平方向)也会有一定微小的变形,该部分研究将会在后续继续开展。

参考文献:

- [1] 王文静,衣启青.带腰绳臂架的挠曲线分析[J].中国工程机械学报,2013,11(1):46-50. DOI:10.3969/j.issn.1672-5581.2013.01.009.
- [2] 喻晓今.挠曲线复位的微分方程解法求梁的位移[J].华东地质学院学报,2003,26(3):271-273. DOI:10.3969/j.issn.1674-3504.2003.03.014.
- [3] 刘明超,丁晓燕.拉氏变换求解梁的挠曲线方程[J].力学与实践,2012,34(2):78-80. DOI:10.6052/1000-0992-20120219.
- [4] 李自林.用积分法求变截面梁的挠曲线方程[J].河北煤炭建筑工程学院学报,1996(3):69-72.
- [5] 何斌,唐静静,范钦珊.直接定义法推导梁的挠曲线微分方程[J].力学与实践,2009,31(4):78-79.
- [6] 刘巍,张永顺.GMF 双层膜几何非线性变形模型及实验研究[J].大连理工大学学报,2007,41(1):34-38. DOI:10.3321/j.issn.1000-8608.2007.01.008.
- [7] 刘正兴,孙雁,王国庆.计算固体力学[M].上海:上海交通大学出版社,2000.
- [8] 朱定国.基于最小二乘法的 LabVIEW 拟合桥梁挠曲线研究[J].城市道桥与防洪,2011(12):139-142. DOI:10.3969/j.issn.1009-7716.2011.12.054.
- [9] 张劲夫.两端固定的等截面梁在均布载荷作用下的挠曲线[J].力学与实践,2018,40(1):96-97.
- [10] 沈建华,高轩能,周期源.滑移对薄壁 U 型钢混凝土组合梁挠度的影响[J].华侨大学学报(自然科学版),2009,30(5):557-562. DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.2009.05.0557.
- [11] 金泊含,王立彬,王鸿,等.基于挠度理论的三塔四跨悬索桥静力特性分析[J].南京林业大学学报(自然科学版),2016,40(3):143-148. DOI:10.3969/j.issn.1000-2006.2016.03.024.
- [12] 吴晓.静不定梁在热状态下的弯曲[J].空间结构,2017,23(2):84-89. DOI:10.13849/j.issn.1006-6578.2017.02.084.
- [13] TIMMERS R,LENER G. Collapse mechanisms and load-deflection curves of unstiffened and stiffened plated structures from bridge design[J]. Thin-Walled Structures,2016,106:448-458. DOI:10.1016/j.tws.2016.05.020.
- [14] 杨小森,闫维明,陈彦江,等.基于倾角仪的桥梁挠度测试方法研究[J].土木工程学报,2010(增刊2):106-111. DOI:10.15951/j.tmgcxb.2010.s2.011.
- [15] 王帅,田磊,李捷,等.中小跨径桥梁结构挠度监测技术试验研究[J].青岛理工大学学报,2014,35(4):40-45. DOI:10.3969/j.issn.1673-4602.2014.04.008.
- [16] 王全凤,刘凤谊,杨勇新,等.HRB500 级钢筋混凝土简支梁受弯试验[J].华侨大学学报(自然科学版),2007,28(3):300-303. DOI:10.3969/j.issn.1000-5013.2007.03.020.
- [17] PATEL B N,PANDIT D,SRINIVASAN S M. A simplified moment-curvature based approach for large deflection analysis of micro-beams using the consistent couple stress theory[J]. European Journal of Mechanics-A/Solids,2017,66:45-54.
- [18] 张欣禹.桥梁挠度测试仪检测结果分析[J].世界桥梁,2012,40(3):42-45.

(责任编辑:黄晓楠 英文审校:方德平)