

DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.201808001



# 含弹性索的绳牵引并联机构的 动力学和末端轨迹控制

郑亚青<sup>1,2</sup>

(1. 华侨大学 机电及自动化学院, 福建 厦门 361021;  
2. 拉瓦尔大学 机械工程系, 魁北克省 魁北克市 G1V 0A6)

**摘要:** 为了能为实际应用提供更多的机构选型及更有效地研究机构动力学和轨迹控制问题,以 2 索(一索为弹性索;另一索为普通无质量无弹性刚性索)牵引末端执行器实现 2 个方向平动运动的 2T 机构为例,研究其动力学和末端轨迹控制问题. 首先,在末端执行器运动方程的基础上,推导机构系统的逆动力学公式,给出机构动力学系统的状态空间表示及体现其具有微分平坦性的非正式表达;接着,利用非线性控制理论的线性化过程严格证明该微分平坦性,并获得微分平坦输出量和微分同胚于机构动力学系统的拥有 Brunovsky 正则形式的线性化和解耦化的等价系统;最后,通过针对该等价系统设计外环线性状态反馈控制器,实现末端执行器的渐近稳定轨迹跟踪,并进行实例控制仿真研究. 结果表明:控制仿真可实现末端轨迹渐近稳定跟踪,稳定之后的跟踪误差值为 0;但在稳定之前存在轨迹跟踪误差和振荡时间,这可通过优化反馈控制增益或修正反馈控制器来改善.

**关键词:** 绳牵引; 并联机构; 弹性索; 动力学; 微分平坦性; 轨迹控制

**中图分类号:** TP 24      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1000-5013(2018)06-0794-07

## Dynamics and End Trajectory Control of 2-Cable-Driven Parallel Mechanism With Elastic Cable

ZHENG Yaqing<sup>1,2</sup>

(1. College of Mechanical Engineering and Automation, Huaqiao University, Xiamen 361021, China;  
2. Department of Mechanical Engineering, Laval University, Quebec G1V 0A6, Canada)

**Abstract:** In order to provide more choices for mechanism types in practical applications as well as more efficiency to solve the problem of dynamics and trajectory control, a kind of 2T cable-driven parallel mechanism with one elastic cable and one massless rigid strut was presented which can make the end-effector implement 2 directional translations. At first the inverse dynamics formulation was derived based on the motion equations of the end-effector, and the state-space representation of dynamics system as well as the informal representation of its differential flatness was given. Then the proof of differential flatness was strictly proven by using the linearization of nonlinear control theory and the flat outputs were obtained. The linearized and decoupled system in Brunovsky canonical form diffeomorphic to the previous system was also achieved. An outer linearized feedback controller was designed to implement the asymptotically stable trajectory tracking of the end-effector. The results of control simulation have indicated that the asymptotical stability can be realized by control

**收稿日期:** 2018-08-01

**通信作者:** 郑亚青(1974-),女,副教授,博士,主要从事绳牵引并联机器人的研究. E-mail:yq.zheng@hqu.edu.cn.

**基金项目:** 福建省自然科学基金资助项目(Z1725057);福建省出国留学奖学金资助项目(2016 年度);福建省泉州市科学技术协会人才培养培育项目(Z1724087)

simulation and the tracking error was 0 after stability. However the tracking error and oscillation time before the stability should be improved by optimizing the control feedback gains or correcting feedback controller.

**Keywords:** wire-driven; parallel mechanism; elastic cable; dynamics; differential flatness; trajectory control

虽然,绳牵引并联机器人具有一些令人满意的特性,包括具有潜在的大工作空间,容易进行重组和使用,可实现高速运动 and 高质量负荷比<sup>[1]</sup>. 然而,绳牵引并联机器人也存有一些特别的缺陷,最主要的缺陷是绳索只能承受拉力,即绳索必须被绷紧以产生作用在末端执行器上的力和力矩. 但由于绳索的柔性有时不能被忽略(如在绳悬挂并联机器人等一些应用场合中),在弹性索、末端执行器和驱动器这 3 者的动力学之间存在非平凡耦合,机构系统的动力学和末端轨迹控制问题将变得非常复杂<sup>[2]</sup>. 为逐步解决此类问题,Gosselin 教授替代性地提出一种 2 索牵引的平面并联机构,在该机构里,每根绳索被看成是由一个无质量的刚性杆和一个线性弹簧组成. Zheng<sup>[3]</sup>证明该平面并联机构的若干个机构具有微分平坦性,并研究基于微分平坦性的末端执行器轨迹控制问题. 由于可简化其动力学和轨迹控制问题,该类型绳牵引并联机构在相应的实际应用中是合适的、有希望的. 具有  $n$  自由度的  $n$  根绳索牵引的并联机构(绳索为无质量、无弹性的直线索,机构类型包括 2T 机构,3T 机构,1R2T 机构和 3R3T 机构),其动力学方程具有微分平坦性<sup>[4]</sup>. 本文以 2 索(一索为弹性索;另一索为普通无质量、无弹性刚性索)牵引末端执行器实现 2 个方向平动运动的 2T 机构为例,研究其动力学和末端轨迹控制问题.

1 含有 1 弹性索的 2T 绳牵引并联机构的动力学方程

含有 1 弹性索的 2T 绳牵引并联机构的机构简图,以及末端执行器的受力分析,如图 1 所示. 图 1 中: $\tau_1, \tau_2$  分别为第一根绳索和第二根绳索的拉力值; $\rho_1, \rho_2$  分别为第一根绳索和第二根绳索的长度. 由图 1(a)可知:2 索并联机器人机构中,末端执行器被绳 1 和绳 2 牵引在  $xoy$  平面,沿  $x$  和  $y$  方向进行平动运动;绳 1 由一个无质量而长度为  $\rho_1$  的刚性索和一个长度为  $s_1$  而刚度为  $k$  的线性弹簧组成(绳拉力值  $\tau_1 = ks_1$ ,方向沿矢量  $PB_1$  的方向);绳 2 是无质量而长度为  $\rho_2$  的刚性索(绳拉力值  $\tau_2 = t_2$ ,方向沿矢量  $PB_2$  的方向). 由图 1(b)可知:末端执行器在 3 个力( $\tau_1, \tau_2$  和  $G$ )的作用下,在  $xoy$  平面内实现沿  $x$  和  $y$  方向的平动运动,包含位移、速度和加速度的变化,可表示为  $x, y, \dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y}$ .

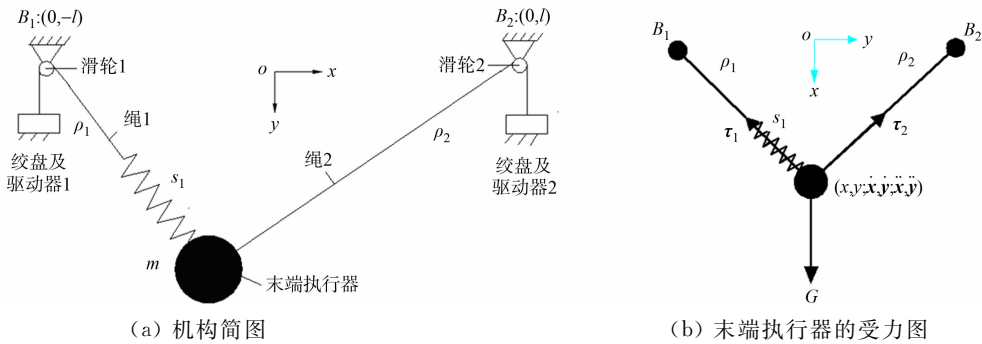


图 1 机构简图及末端执行器的受力分析

Fig. 1 Mechanism configuration and motion analysis of end-effector

绳 1 和绳 2 分别绕过滑轮 1 和滑轮 2 与各自的绞盘和驱动器相连,机器人控制系统将控制信号发送到驱动器后,使伺服电机的输出轴转动,并带动绞盘改变绳索的长度值或绳拉力值. 若伺服驱动器采用位置控制模式,则控制的是绳索长度值( $\rho_1$  和  $\rho_2$ );若伺服驱动器采用力矩控制模式,则控制的是绳索的绳拉力值( $\tau_1$  和  $\tau_2$ ). 图 1(b)的末端执行器的运动方程可表示为

$$\tau_1 = ks_1, \quad \tau_2 = t_2. \tag{1}$$

$$\tau_1 \begin{bmatrix} \frac{-x}{\sqrt{x^2 + (y+l)^2}} \\ \frac{-l-y}{\sqrt{x^2 + (y+l)^2}} \end{bmatrix} + \tau_2 \begin{bmatrix} \frac{-x}{\sqrt{x^2 + (y-l)^2}} \\ \frac{l-y}{\sqrt{x^2 + (y-l)^2}} \end{bmatrix} + m \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

$$s_1 + \rho_1 = \sqrt{x^2 + (y + l)^2}, \quad \rho_2 = \sqrt{x^2 + (y - l)^2}. \tag{3}$$

根据式(1)~(3),可得

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= \sqrt{x^2 + (y + l)^2} \cdot (1 + m(\ddot{x}l - \ddot{x}y - gl + gy + x\ddot{y})/(2kxl)), \\ \rho_2 &= \sqrt{x^2 + (y - l)^2}. \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= m \sqrt{x^2 + (y + l)^2} \cdot (\ddot{x}l - \ddot{x}y - gl + gy + x\ddot{y})/(-2xl), \\ \tau_2 &= m \sqrt{x^2 + (y - l)^2} \cdot (-\ddot{x}l + gl - \ddot{x}y + gy + x\ddot{y})/(2xl). \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

在给定末端执行器的期望运动 $(x, y, \dot{x}, \dot{y}; \ddot{x}, \ddot{y})$ 时,可获得唯一一组的绳索长度值 $(\rho_1, \rho_2)$ 、拉力值 $(\tau_1, \tau_2)$ 及线性弹簧的长度 $s_1$ . 即对于给定的一组 $(x, \dot{x}, \ddot{x}; y, \dot{y}, \ddot{y})$ ,由式(1)~(5)计算得到绳索的长度值 $(\rho_1, \rho_2)$ ,并将其转化成伺服电机的输出转角以控制末端执行器的运动控制,此时,2根绳索的拉力值 $(\tau_1, \tau_2)$ 将自动满足通过式(1)~(5)计算而得到的那些值;若采用控制伺服电机的驱动力矩(由 $\tau_1, \tau_2$ 值可换算得到)以实现末端执行器的运动控制. 此时,绳索的长度值 $(\rho_1, \rho_2)$ 将自动满足通过式(1)~(5)计算得到的那些值.

在末端执行器的轨迹控制中,需要研究机构的逆动力学问题. 逆动力学问题可描述为已知末端执行器的运动 $x, \dot{x}, \ddot{x}$ 和 $y, \dot{y}, \ddot{y}$ 的值,分别求绳索长度值 $(\rho_1, \rho_2)$ 和绳拉力值 $(\tau_1, \tau_2)$ .

2 机构动力学系统的状态空间表示及微分平坦性的非正式表达

设状态变量 $\mathbf{x} = (x, \dot{x}, y, \dot{y}) \in \mathbf{R}^4$ ,输入量 $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^2$ 和 $\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^2$ ,输出量 $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ ,状态方程用 $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ 表示,由式(1)~(3)可得

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 = \dot{x} \\ x_2 = \ddot{x} \\ x_3 = \dot{y} \\ x_4 = \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 = f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = x(2) \\ f_2(x(1), x(3), \tau_1, \tau_2) = f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \\ \frac{-x(1)}{m \sqrt{x(1)^2 + (x(3) + l)^2}} \tau_1 + \frac{-x(1)}{m \sqrt{x(1)^2 + (x(3) - l)^2}} \tau_2 + g \\ x_3 = f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = x(4) \\ f_4(x(1), x(3), \tau_1, \tau_2) = f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \left( \frac{-x(2)}{m} - \frac{l}{m} \right) \times \\ \frac{\tau_1}{\sqrt{x(1)^2 + (x(3) + l)^2}} + \left( \frac{-x(2)}{m} + \frac{l}{m} \right) \cdot \frac{\tau_2}{\sqrt{x(1)^2 + (x(3) - l)^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 = f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ f_2(x(1), x(3), \tau_1, \tau_2) = f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = a_1(x(1), x(3)) \tau_1 + a_2(x(1), x(3)) \tau_2 + g \\ x_3 = f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ f_4(x(1), x(3), \tau_1, \tau_2) = f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = b_1(x(1), x(3)) \tau_1 + b_2(x(1), x(3)) \tau_2 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

由式(4),(5)和 $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ ,可得

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \phi_1(\mathbf{x}) \\ \phi_2(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \end{bmatrix}, \quad s_1 = \sqrt{x^2 + (y + l)^2} - \phi_1(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}), \\ \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \psi_1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \\ \psi_2(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(\mathbf{x}) \\ h_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

取平坦输出为 $\mathbf{y}$ ,将式(7)中的各个式子用 $\mathbf{y}$ 及其有限阶导数进行表达,可得

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} \phi_1(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) \\ \phi_2(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}) \end{bmatrix} &= \boldsymbol{\phi}(\mathbf{y}, \ddot{\mathbf{y}}), \quad s_1 = \Phi(\mathbf{y}, \ddot{\mathbf{y}}), \quad \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \psi_1(\mathbf{y}, \ddot{\mathbf{y}}) \\ \psi_2(\mathbf{y}, \ddot{\mathbf{y}}) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{y}, \ddot{\mathbf{y}}), \\ \mathbf{x} &= (\theta_1(\mathbf{y}), \theta_2(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}), \theta_3(\mathbf{y}), \theta_4(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}))^T = \boldsymbol{\theta}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}). \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

式(8)即为机构动力学系统具有微分平坦性的非正式表达<sup>[4-6]</sup>.

### 3 机构动力学系统具有微分平坦性的证明

利用非线性控制理论的线性化过程,证明机构动力学系统具有微分平坦性,并推导出微分平坦输出量,以及与机构动力学系统微分同胚的等价系统(具有 Brunovsky 正则形式的线性化和解耦化的系统)<sup>[7-9]</sup>,具体有如下 3 个主要步骤.

1) 输出函数关于状态量  $\mathbf{x}$  的 Lie 导数,输出函数及 Lie 导数关于输入量  $\mathbf{u}$  的偏微分表达,即

$$\begin{aligned} L_i^0 h(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= h(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x(1) \\ x(3) \end{pmatrix}; \\ L_i^1 h(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \frac{\partial L_i^0 h(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{\partial \begin{pmatrix} x(1) \\ x(3) \end{pmatrix}}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ f_2 \\ x_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}; \\ L_i^2 h(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \frac{\partial L_i^1 h(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{\partial \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ f_2 \\ x_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_4 \end{bmatrix}; \\ L_i^3 h(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \frac{\partial L_i^2 h(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \left[ x_1 \frac{\partial f_2}{\partial x(1)} + x_3 \frac{\partial f_2}{\partial x(3)}, x_1 \frac{\partial f_4}{\partial x(1)} + x_3 \frac{\partial f_4}{\partial x(3)} \right]^T; \\ \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(\mathbf{x})}{\partial x(1)} & \frac{\partial h_1(\mathbf{x})}{\partial x(2)} & \frac{\partial h_1(\mathbf{x})}{\partial x(3)} & \frac{\partial h_1(\mathbf{x})}{\partial x(4)} \\ \frac{\partial h_2(\mathbf{x})}{\partial x(1)} & \frac{\partial h_2(\mathbf{x})}{\partial x(2)} & \frac{\partial h_2(\mathbf{x})}{\partial x(3)} & \frac{\partial h_2(\mathbf{x})}{\partial x(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}(L_i^0 h(\mathbf{x}, \mathbf{u})) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \begin{bmatrix} x(1) \\ x(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}(L_i^1 h(\mathbf{x}, \mathbf{u})) = \frac{\partial \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}(L_i^2 h(\mathbf{x}, \mathbf{u})) &= \frac{\partial (f_2, f_4)^T}{\partial \mathbf{u}} \neq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

2) 寻找机构系统状态方程的微分同胚表达. 设微分同胚为  $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \varphi(\mathbf{x})$ , 其中,  $\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^4, \eta =$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^4, \text{ 据文献[7-9]的步骤求解. 如 } \xi_1 = \varphi_1(\mathbf{x}) = L_i^{-1} h(\mathbf{x}) = L_i^0 h(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x(1) \\ x(3) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \xi_2 = \varphi_2(\mathbf{x}) = \\ L_i^{-1} h(\mathbf{x}) = L_i h(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}, \text{ 即 } \xi = [x \quad y \quad \dot{x} \quad \dot{y}]; \eta_1 = \varphi_{2+1}(\mathbf{x}) = \varphi_3(\mathbf{x}) = L_i^2 x(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix}, \\ \eta_2 = \varphi_{3+1}(\mathbf{x}) = L_i^3 x(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \frac{\partial f_2}{\partial x(1)} + x_3 \frac{\partial f_2}{\partial x(3)} \\ x_1 \frac{\partial f_4}{\partial x(1)} + x_3 \frac{\partial f_4}{\partial x(3)} \end{bmatrix}, \text{ 即 } \eta = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ x_1 \frac{\partial f_2}{\partial x(1)} + x_3 \frac{\partial f_2}{\partial x(3)} \\ x_1 \frac{\partial f_4}{\partial x(1)} + x_3 \frac{\partial f_4}{\partial x(3)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

用新坐标  $\xi$  表示的新系统为  $\xi_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, y = \xi_1, \xi_i = \xi_2, \xi_r = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_4 \end{bmatrix} = M(\xi, \eta_1, u), \xi_2 = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}, M(\xi, \eta_1, u) = L_i^2 x(\Phi^{-1}(\xi, \eta_1), u) = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = v, q \in \mathbf{R}^{n-r} (= \mathbf{R}^2), q_K(\xi, \eta_1) = L_i \Phi_{r+K}(\Phi^{-1}(\xi, \eta_1)), n=4, r=2, 1 \leq K \leq r.$

$M(\xi, \eta_1, u) = v(*)$ , 若方程  $(*)$  是可解的, 则  $\xi_r = v, L_i^2 h(\mathbf{x}, u) = v, v = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \tau_1 + a_2 \tau_2 + g \\ b_1 \tau_1 + b_2 \tau_2 \end{bmatrix}$  有

解析解. 由于  $L_f^2 h(x_0, u_0) \neq 0$ , 则  $u = \Phi(x, v)$  或  $v = L_f^2 h(x, \Phi(x, v))$ .

3) 微分平坦输出量的确定. 若考虑  $y = \xi_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  作为微分平坦输出, 则  $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4, v = \begin{pmatrix} v_1 = \ddot{x} \\ v_2 = \ddot{y} \end{pmatrix}$ , 存在有用 Brunovsky 正则形式表示的线性化和解耦化的系统<sup>[10-12]</sup>, 即

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A \cdot \xi + B \cdot v, \\ \left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \\ y &= c \cdot \xi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

4 通过外环线性状态反馈实现末端执行器的渐近稳定轨迹跟踪

$v_1$  和  $v_2$  的选择为  $\begin{cases} v_1 = \ddot{x}_d - \alpha_1(\dot{x} - \dot{x}_d) - \alpha_0(x - x_d), \\ v_2 = \ddot{y}_d - \beta_1(\dot{y} - \dot{y}_d) - \beta_0(y - y_d). \end{cases}$  其中,  $\alpha_0$  和  $\alpha_1$  为控制增益. 由于  $\begin{cases} v_1 = \ddot{x}, \\ v_2 = \ddot{y}, \end{cases}$  末端

执行器的轨迹跟踪误差系统为  $\begin{cases} \ddot{e}_1 + \alpha_1 \dot{e}_1 + \alpha_0 e_1 = 0, \\ \ddot{e}_2 + \beta_1 \dot{e}_2 + \beta_0 e_2 = 0. \end{cases}$  轨迹跟踪误差系统的控制框图, 如图 2 所示. 图 2 中:  $x_d, y_d$  分别为期望轨迹的  $x, y$  坐标值.

为保证误差系统的稳定性,  $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$  应满足  $\begin{cases} \alpha_1 \geq 2\sqrt{\alpha_0} > 0, \\ \beta_1 \geq 2\sqrt{\beta_0} > 0. \end{cases}$  为达到优化控制效果, 可

通过线性二次优化(LQR) 求解代数 Riccati 方程以获得合适的控制增益值, 或者通过极点配置来获得<sup>[13-14]</sup>.

1)  $\xi$ (微分平坦输出  $y$  和它的有限阶导数) 可通过一个状态反馈被定义成新的状态变量; 新的状态变量  $\xi$  的准静态状态反馈, 导致一个精确线性状态空间线性化和解耦化的系统, 即  $\dot{\xi} = A \cdot \xi + B \cdot v$ , 其中,  $(A, B)$  为 Brunovsky 对.

2) 渐近稳定跟踪行为通过一个外环线性状态反馈达到, 实时状态变量  $\xi$  应该可被测量, 而且反馈增益应该可被实时调整.

5 实例控制仿真分析

针对图 1 的 2 索并联机构选择一组机构参数, 即末端执行器的质量  $m = 1 \text{ kg}$ , 线性弹簧的刚度  $k = 1.571 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $l = 10 \text{ m}$ ,  $\alpha_0 = 4, \alpha_1 = 10, \beta_0 = 4, \beta_1 = 10$ . 选择一个直线作为末端执行器的期望轨迹, 即  $x_d = 10 \text{ m}, y_d = (5 - 0.5 \times t) \text{ m}, t = 0 \sim 20 \text{ s}$ . 根据文中推导出的理论结果, 在 Matlab 编程中获得控制仿真结果, 如图 3~6 所示<sup>[15]</sup>. 图 3~6 中:  $t$  为时间;  $x, y$  分别为  $x, y$  方向;  $x_s, y_s$  分别为实际轨迹的  $x, y$  坐标值;  $e$  为误差值;  $e_x, e_y$  分别为  $x, y$  方向上的误差值.

由图 3, 6 可知: 末端执行器的期望轨迹和实际轨迹沿  $x$  方向的误差值较小(小于  $0.5 \text{ m}$ ), 而沿  $y$  方向的误差值较大(在  $5 \text{ m}$  以内), 但二者均在  $t = 10 \text{ s}$  以后为 0, 即基于微分平坦性的末端轨迹跟踪可实现渐近稳定跟踪, 稳定之后跟踪误差值为 0; 但在稳定之前, 存在轨迹跟踪误差和振荡时间, 这可通过用

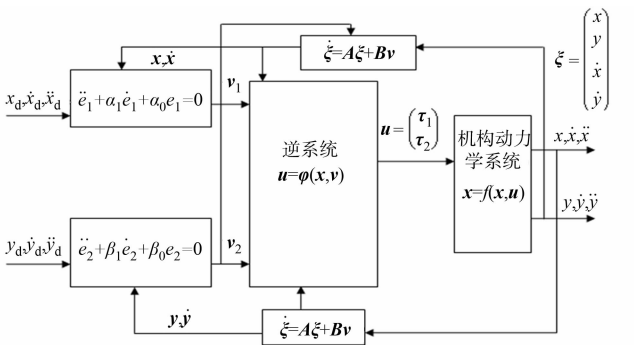


图 2 轨迹跟踪误差系统控制框图  
Fig. 2 Trajectory tracking error system control block diagram

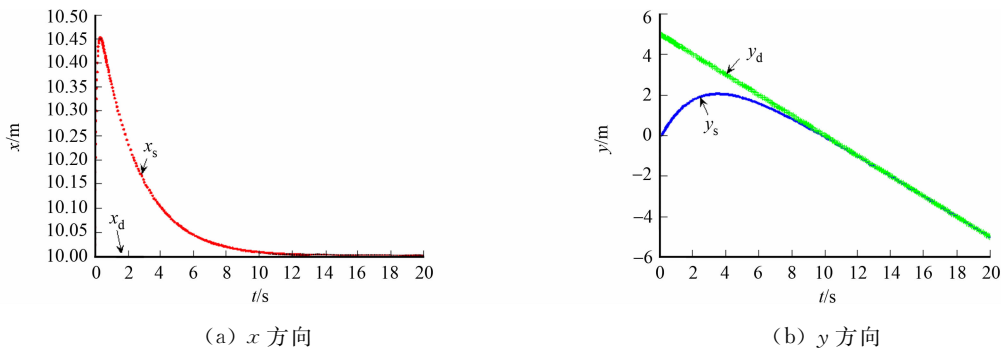


图 3 期望轨迹和实际轨迹沿  $x, y$  方向的坐标值随时间变化

Fig. 3 Coordinate values of desired trajectory and actual trajectory along  $x, y$  directions change with time

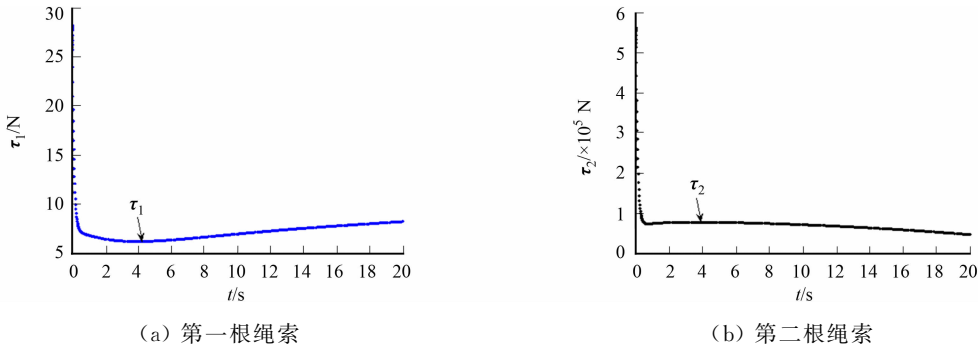


图 4 不同绳索的拉力值随时间变化

Fig. 4 Tension value of different cables changes with time

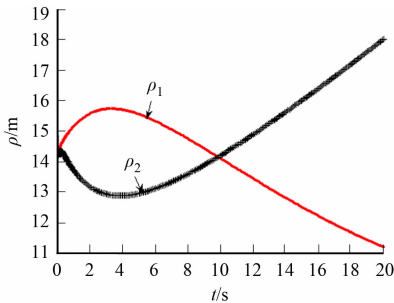


图 5 2 根绳索的长度随时间变化  
Fig. 5 Length of 2 cables with time

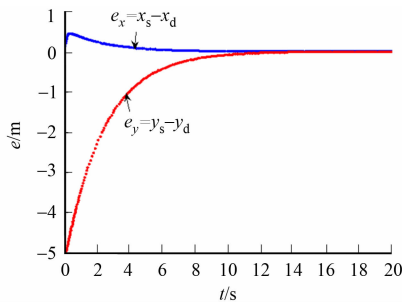


图 6 不同轨迹沿  $x, y$  方向的误差值随时间变化  
Fig. 6 Errors value between different trajectories along  $x, y$  directions changes with time

线性二次优化(LQR) 求解代数 Riccati 方程或通过极点配置以获得更优增益值来改善,若优化控制增益尚无法满足控制目标要求,可修正反馈控制律.由图 3,6 还可知:如何优化控制增益以满足既定的末端执行器运动及其精度要求是机构能否得到实际应用的重要问题;此外,对某一组给定的控制增益,确定末端执行器的动力学工作空间(在驱动器满足一定的输入条件,如绳拉力介于一定的正值范围内,末端执行器所能达到的运动范围),以及其运动精度同样是一个值得深入研究的问题.

由图 4 可知:绳 1 的拉力值远小于绳 2 的拉力值,即在轨迹跟踪控制过程中,绳 1 远比绳 2 软.

## 6 结论

1) 仅有一根绳索具有线性弹性,而其他绳索满足无质量、无弹性的情况,该绳牵引并联机构是一种特殊的机构.可利用非线性控制理论的线性化过程严格证明该类型机构系统具有微分平坦性,并获得微分平坦输出量和微分同胚于机构动力学系统拥有 Brunovsky 正则形式的线性化和解耦化的等价系统.

2) 可通过针对该等价系统设计外环线性状态反馈控制器实现末端执行器的渐近稳定轨迹跟踪,可通过用线性二次优化(LQR) 求解代数 Riccati 方程以获得合适的控制增益值或者通过极点配置来获得更优增益值,以及修正反馈控制器以达到优化控制效果.

## 参考文献:

- [1] TANG Xiaoqiang. An overview of the development for cable-driven parallel manipulator[J]. *Advances in Mechanical Engineering*, 2014(1): 1-9. DOI:10. 1155/2014/823028.
- [2] LEE T, LEOK M, MCCLAMROCH N H. Computational dynamics of a 3D elastic string pendulum attached to a rigid body and an inertially fixed reel mechanism[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2011, 64(1/2): 97-115.
- [3] ZHENG Yaqing. Dynamics and flatness-based control of cable-driven parallel mechanisms with elastic cables[R]. Quebec: Laval University, 2018: 1-90.
- [4] 江晓玲, 郑亚青. 不完全约束绳牵引并联机器人的微分平坦性分析[J]. *机械设计与研究*, 2010, 26(3): 19-22. DOI: 10. 13952/j. cnki. jofmdr. 2010. 03. 029.
- [5] 于兰, 郑亚青. 3 种构型的 6 自由度绳牵引门式起重机器人的运动学位置逆解分析[J]. *华侨大学学报(自然科学版)*, 2012, 33(2): 125-128. DOI:10. 11830/ISSN. 1000-5013. 2012. 02. 0125.
- [6] 郑亚青. 大型造船门式绳牵引并联起重机器人的机构设计与运动学位置逆解分析[J]. *华侨大学学报(自然科学版)*, 2009, 30(4): 366-370. DOI:10. 11830/ISSN. 1000-5013. 2009. 04. 0366.
- [7] ISIDORI A. *Nonlinear control systems*[M]. 3rd ed. London: Springer-Verlag, 1995: 1-549.
- [8] RUDOLPH J, ROTHFUSS R, POMET J B. A generalized controller form for linearization by quasi-static feedback [C]// *IFAC System Structure and Control*. Nantes: [s. n. ], 1995: 139-144. DOI:10. 1016/S1474-6670(17)45451-6.
- [9] ZHENG Yaqing. Feedback linearization control of a wire-driven parallel support system in wind tunnels[C]// *Proceedings of Sixth International Conference on Intelligent System Design and Applications*. Jinan: IEEE Press, 2006: 9-13. DOI:10. 1109/ISDA. 2006. 27.
- [10] RUDOLPH J. Well-formed dynamics under quasi-static state feedback[M]. [S. l. ]; Banach Center Publications, 1995: 349-360.
- [11] FLIESS M. Some remarks on the Brunovsky canonical form[J]. *Kybernetika (Praha)*, 1993, 29(5): 417-422.
- [12] BRUNOVSKÝ P. A classification of linear controllable systems[J]. *Kybernetika (Praha)*, 1970, 6(3): 173-188.
- [13] MILLER D E, ROSSI M. Simultaneous stabilization with near optimal LQR performance[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(10): 1543-1555. DOI:10. 1109/CDC. 2000. 914217.
- [14] TUNA S E. LQR-based coupling gain for synchronization of linear systems[J]. *Mathematics*, 2008(1): 1-8.
- [15] 苏金明, 阮沈勇. *MATLAB 实用教程*[M]. 2 版. 北京: 电子工业出版社, 2008: 1-381.

(编辑: 李宝川      责任编辑: 陈志贤      英文审校: 崔长彩)