

DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.201711007



# 应用 Pareto 分布的 POT 模型分析 车辆荷载效应极大值

张晋豪<sup>1,2</sup>, 刘均利<sup>1,3</sup>, 余文成<sup>1,3</sup>, 王雷<sup>1</sup>

(1. 桂林理工大学 广西岩土力学与工程重点实验室, 广西 桂林 541004;

2. 中交四航工程研究院有限公司, 广东 广州 510230;

3. 桂林理工大学 土木与建筑工程学院, 广西 桂林 541004)

**摘要:** 为精确模拟汽车荷载效应样本分布的尾部形状,利用基于 Pareto 分布的超越阈值(POT)模型计算样本频率分布函数;然后,采用尾极值指数检验法检验样本的厚尾性,采用峰度法检验样本的尖峰性和计算样本阈值;最后,基于经典极值理论计算汽车荷载效应极大值分布和设计标准值.对某大桥 111 d 的动态称量(WIM)车辆荷载效应进行极值估计,结果表明:跨径小于等于 16 m 的车辆荷载效应符合尖峰厚尾分布,适合采用文中方法计算车辆荷载效应极值.

**关键词:** 桥梁工程;汽车荷载;厚尾分布;超越阈值模型

中图分类号: O 10

文献标志码: A

文章编号: 1000-5013(2018)05-0649-05

## Calculation of Extreme Value of Vehicle Load Effect by POT Model Using Pareto Distribution

ZHANG Jinhao<sup>1,2</sup>, LIU Junli<sup>1,3</sup>, YU Wencheng<sup>1,3</sup>, WANG Lei<sup>1</sup>

(1. Guangxi Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering,

Guilin University of Technology, Guilin 541004, China;

2. CCCC Fourth Harbor Engineering Institute Company Limited, Guangdong 510230, China

3. College of Civil Engineering and Architecture, Guilin University of Technology, Guilin 541004, China)

**Abstract:** To accurately simulate the tail shape of vehicle load effect distribution, the peaks over threshold (POT) model based on Pareto distribution was used to fit the frequency distribution of the vehicle load effect sample first. And then, the tail extremum index method was adopted to test the fat-tailed traits of the vehicle load effect sample, and the Kurtosis coefficient method was used to test the Kurtosis traits and the threshold of the vehicle load effect sample, respectively. Finally, the maximum value distribution and design standard value of vehicle load effect were calculated based on classical extreme value theory. The proposed method was used to estimate the maximum load effect of the weigh in motion (WIM) vehicle in 111 d of a bridge. The results show that the vehicle load effect of 16 m is consistent with the peak and fat-tailed distribution. The proposed method is suitable to calculate the extreme value of vehicle load.

**Keywords:** bridge engineering; vehicle load; fat-tailed distribution; peaks over threshold model

汽车荷载是公路桥梁所承受的主要可变荷载,是影响结构安全性和耐久性的重要因素.收集实际车流量荷载相关数据,分析并拟合其荷载效应分布,是有效进行桥梁设计与维护的重要基础工作.国内外

收稿日期: 2017-11-02

通信作者: 刘均利(1978-),男,副教授,博士,主要从事桥梁拓宽改建、车辆荷载模型的研究. E-mail: liujunli175@qq.com.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51468013);广西科学研究与技术开发计划项目(14151012)

学者对车辆荷载模型进行了深入研究,主要可分为两类方法:一类是基于车辆样本随机变量假定的拟合经验外推<sup>[1-2]</sup>,即假定车辆荷载效应的尾部符合正态分布,在正态概率纸上延伸,但对尾部数据的选择没有明确,外推结果离散性较大;另一类是基于经典极值理论的最大值外推,这种做法的关键是获得车辆荷载效应样本的底分布,而寻找能够完全描述基础样本特性的底分布是很难实现的.韩大建等<sup>[2]</sup>对工程结构所承受的各类作用极值分析方法进行比较研究,得出最大值分布仅与截口分布的尾部形状有关,而与其中央的形状无关.汽车荷载效应样本有典型的厚尾特性<sup>[3-4]</sup>,即与正态分布相比,密度曲线尾部更厚,曲线下降更慢,极值出现概率更多,常用的分布函数如正态分布、Gamma 分布和 Weibull 分布等可以较好地描述样本的整体分布,但对于尾部数据则难以准确拟合.超越阈值(POT)模型是基于渐进极值理论的一种极值预测方法,基于广义 Pareto 分布的参数模型,不考虑样本的整体分布,以超越某一阈值的尾部数据作为研究对象,对统计推断有很好的效果<sup>[5-7]</sup>.本文利用某桥 111 d 的动态称量(WIM)数据,通过 MATLAB 编程,计算跨径为 6~30 m 桥梁的汽车荷载效应样本,运用 POT 模型对荷载效应样本尾部的分布进行拟合,采用极值理论计算车辆荷载效应基准期标准值.

1 车辆荷载效应日最大值样本

采用杆系有限元程序计算跨径( $L$ )为 6~8 m 桥梁的跨中最大弯矩,取日最大值组成跨中弯矩日最大值样本.计算样本值的累计频率,并将样本绘制在极值 I 型概率纸上,如图 1 所示.图 1 中: $M$  为弯矩; $p$  为累计概率.由图 1 可知:样本频率曲线分为两段,左边一段近似直线,包含 99 个样本数据,右边一段为曲线,包含 12 个样本数据,说明只有左边 99 个样本符合极值 I 型分布,样本整体不符合极值 I 型分布,即样本不满足同分布要求.因此,不能用极值 I 型分布函数拟合日最大值样本分布<sup>[8]</sup>.

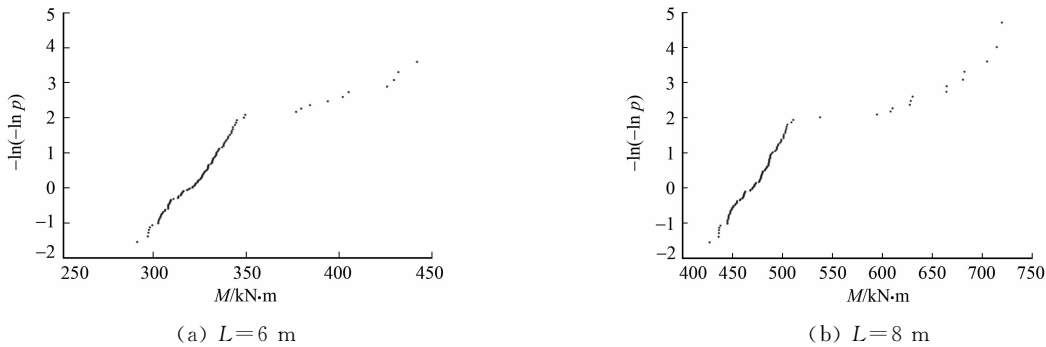


图 1 不同跨径车辆荷载效应日极大值样本

Fig. 1 Daily maximal values of vehicle load effect for different spans

2 POT 模型

POT 模型只研究样本尾部数据,不需要对其整体概率分布形式作假设,也不受其整体分布的影响. Pickands<sup>[9]</sup>通过研究发现,对于同一独立同分布的样本,设定充分大的阈值,样本超出阈值的量的极限分布即为广义 Pareto 分布(简称 GPD 分布).

假定  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是独立同分布的随机变量,并且都服从  $F(x)$  分布,  $x_f$  是它的右端点,它可能有限也可能无限.  $u$  表示某一充分大的阈值,设超过  $u$  的样本个数为  $N$ . 若  $x_i > u$ , 称  $x_i$  为超阈值,  $y_i = x_i - u$  称为超出量. 随机变量  $x_i$  的超过阈值  $u$  的超出分布为条件超额分布函数,即有

$$F_u(y) = P(X - u \leq y \mid X > u) = \frac{F(u + y) - F(u)}{1 - F(u)}. \tag{1}$$

通过对式(1)变换,得到超过阈值的样本的分布函数为

$$F(x) = [1 - F(u)] \times F_u(y) + F(u), \quad x > u, \quad 0 \leq y \leq x_f - u. \tag{2}$$

当阈值  $u$  足够大时,超出量  $y_i$  服从 GPD 分布<sup>[9]</sup>,即

$$F_{\epsilon, \beta}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\zeta}{\beta}y\right)^{-1/\zeta}, & \zeta \neq 0; \\ 1 - \exp(-y/\sigma), & \zeta = 0. \end{cases} \tag{3}$$

式(3)中: $\beta$  是尺度参数; $\zeta$  是形状参数. 当  $\zeta=0$  时,GPD 退化为指数分布;当  $\zeta>0$  时,GPD 为厚尾分布;当  $\zeta<0$  时,GPD 为截尾分布,截尾分布右侧有界,不能用于拟合车辆荷载效应的分布.

### 3 厚尾性检验方法

统计学上,假如一个随机变量的概率密度函数是以指数函数的速度衰减至零,就认为是薄尾分布,如正态分布;如果是幂函数的速度衰减至零,则称其为厚尾分布. 只有当车辆荷载效应样本满足厚尾分布时,才能用 GPD 分布拟合. 常用的厚尾分布检测方法主要有 QQ 图法和尾极值指数检验法. QQ 图法准确性依赖于使用人员的经验和知识水平,主观性较强,文中采用尾极值指数检验法<sup>[10]</sup>.

设独立同分布样本序列为  $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$ . 样本的顺序统计量满足  $X_{1,n} \leq X_{2,n} \leq X_{3,n} \leq \cdots \leq X_{n,n}$ . 那么,样本的 Monent 型估计量的表达式为

$$\hat{r}_n = M_n^1 + 1 - \{1 - M_n^2/M_n^1\}^{-1}/2, \tag{4}$$

$$M_n^j = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} (\lg X_{n-m,n} - \lg X_{n-m-i,n})^j, \quad j = 1, 2. \tag{5}$$

$m$  的取值根据  $n$  确定,取  $m=n/10$  并取整. 如果尾极值指数  $r=0$ ,则样本属于薄尾分布;如果  $r>0$ ,则样本符合厚尾分布.

假设  $H_0: r=0$ ,则对立假设  $H_1: r>0$ ,在  $H_0$  成立的条件下, $\sqrt{m}\hat{r} \simeq N(0,1)$ . 对于给定的显著水平  $\alpha$ , $H_0$  的拒绝域为 $\sqrt{m}\hat{r}>u_\alpha$ ,其中, $u_\alpha$  表示标准正态分布的单边临界值. 所以,判断厚尾薄尾分布的统计检验方法如下:在大样本情况下,对于给定的显著水平  $\alpha$ ,如果 $\sqrt{m}\hat{r}>u_\alpha$ ,认为样本属于厚尾分布;如果 $\sqrt{m}\hat{r}<u_\alpha$ ,则认为样本不属于厚尾分布.

取显著水平  $\alpha=0.01$ , $u_{0.01}=2.326\ 3$ ,对车辆荷载效应的样本数据进行厚尾性检验,计算结果如表 1 所示. 由表 1 可知:当桥梁跨径  $L\leq 16\text{ m}$  时,跨中弯矩样本属于厚尾分布;当  $L\geq 20\text{ m}$  时,样本不属于厚尾分布. 文献[5]用 QQ 图法判断,所有跨径的车辆荷载效应均符合厚尾分布,但在用 GPD 分布拟合车辆荷载效应时,当  $L\leq 16\text{ m}$  时,形状参数  $\zeta>0$ ,符合厚尾分布;当  $L\geq 20\text{ m}$  时,形状参数  $\zeta<0$ ,不符合厚尾分布. 说明用尾极值指数法检验更客观准确,也说明车辆荷载效应样本的厚尾特性与桥梁跨径有关.

表 1 厚尾性检验结果  
Tab. 1 Test result of fat tail

参数	L/m							
	6	8	10	13	16	20	25	30
$r$	3.192	2.930	2.614	2.697	2.493	1.949	1.788	1.928

### 4 尖峰特性检验方法

随机变量在样本数据均值附近的概率密度值大于正态分布的理论估计值,称之为尖峰特性. 利用正态分布系数条件判断样本是否符合尖峰特征<sup>[10]</sup>.

1) 计算样本峰度,即

$$K = \frac{E(X_i - \bar{X}_N)^4}{[E(X_i - \bar{X}_N)^2]^2}, \quad i = 1, 2, 3, \cdots, N. \tag{6}$$

2) 对峰度进行判断. 若  $K\geq 3$ ,认为符合尖峰特征. 样本的尖峰特性检验结果,如表 2 所示. 由表 2 可知:当桥梁跨径  $L\leq 16\text{ m}$  时, $K>3$ ,样本存在尖峰特性;当  $L\geq 20\text{ m}$  时, $K<3$ ,不具有尖峰特性. 说明车辆荷载效应样本的尖峰特性与桥梁跨径有关.

表 2 尖峰性检验结果  
Tab. 2 Test result of Kurtosis

参数	L/m							
	6	8	10	13	16	20	25	30
$r$	7.920	5.545	4.781	5.738	5.261	2.455	0.064	2.899

5 阈值  $u$  的选择

阈值的选择是建立 POT 模型的关键,选择过低会造成模型的渐进性得不到满足,产生偏差;选择过高,则会造成可利用的数据量太少,产生误差<sup>[6]</sup>.因此,需要综合平衡考虑这两个相互对立的因素.常用方法有最小 MSE 准则法<sup>[7]</sup>、Hill 图法<sup>[7]</sup>和峰度法<sup>[8]</sup>.由于最小 MSE 准则法、Hill 图法需要主观判断,文中采用峰度法,利用正态分布的峰度系数等于 3 的条件,确定阈值<sup>[8]</sup>.具体有如下 3 个计算步骤.

- 步骤 1 用式(6)计算样本峰度  $K$ .
- 步骤 2 判断峰度值,若得到  $K \geq 3$ ,则选取使  $|X_i - \bar{X}_N|$  最大的  $X_i$ ,将其从样本中删除.
- 步骤 3 重复步骤 1,2,直到  $K < 3$  为止,留下的样本中,最大值就为阈值.
- 利用 MATLAB 编写峰度法的相应程序,结合 SPSS 进行计算,确定阈值.分别对桥梁跨径为 6,8,10,13,16 m 的荷载效应进行计算,结果如表 3 所示.

表 3 跨径为 6~16 m 的阈值及峰度  
Tab. 3 Threshold and kurtosis for bridge with span from 6 m to 16 m

参数	L/m				
	6	8	10	13	16
$u/\text{kN} \cdot \text{m}$	342.36	501.32	706.63	1 088.58	1 512.72
$K$	2.993	2.998	2.997	2.995	2.992

6 模型参数估计与车辆标准值计算

根据表 3 确定的阈值,采用极大似然法,分别对跨径为 6~16 m 的车辆荷载效应样本的分布进行参数估计,结果如表 4 所示.根据表 4 中得到的参数,跨径为 6~16 m 的车辆荷载效应的截口分布如下:

- 1)  $L=6 \text{ m}$ .  $F(x)=1-0.282[1+0.005\ 2(x-342.36)]^{-5.6}, x>u, u=342.36$ ;
- 2)  $L=8 \text{ m}$ .  $F(x)=1-0.436[1+0.008\ 7(x-501.32)]^{-3.48}, x>u, u=501.32$ ;
- 3)  $L=10 \text{ m}$ .  $F(x)=1-0.410[1+0.003\ 3(x-706.63)]^{-5.5}, x>u, u=706.63$ ;
- 4)  $L=13 \text{ m}$ .  $F(x)=1-0.318[1+0.001\ 9(x-1\ 088.58)]^{-8.32}, x>u, u=1\ 088.58$ ;
- 5)  $L=16 \text{ m}$ .  $F(x)=1-0.227[1+0.001\ 5(x-1\ 512.72)]^{-11.4}, x>u, u=1\ 512.72$ .

表 4 6~16 m 跨径参数估计  
Tab. 4 Parameter estimation for bridge with span from 6 m to 16 m

项目	L/m				
	6	8	10	13	16
$\xi$	0.178 6	0.287 4	0.181 8	0.120 2	0.087 7
$\beta$	34.342 6	33.029 5	55.096 4	63.259 1	58.479 5

以荷载效应一天的最大值(其累计概率函数为  $F_1(x)$ )代表一年的最大值,根据极值理论设计基准期( $N$  年)内,车辆荷载效应最大值的累计概率函数为

$$F_N(x) = [F_1(x)]^N.$$

(7)

取概率分布函数的 95%分位点作为设计基准期内车辆荷载效应的标准值<sup>[11-13]</sup>,跨径为 6~16 m 的荷载效应标准值预测结果,如表 5 所示.

表 5 6~16 m 跨径荷载效应极值的预测结果  
Tab. 5 Extreme value estimation of load effect  
for bridge with span from 6 m to 16 m       $\text{kN} \cdot \text{m}$

N/a	L/m				
	6	8	10	13	16
5	580.70	724.48	1 140.70	1 480.97	1 817.95
10	637.38	798.70	1 237.86	1 560.70	1 878.84
20	701.56	889.22	1 351.81	1 647.39	1 943.55
50	799.56	1 040.76	1 523.65	1 773.69	2 035.38
100	885.13	1 184.93	1 674.07	1 878.93	2 109.93

7 GPD 分布计算结果与规范对比

将 GPD 分布的荷载计算结果与 JTG D60—2004《公路桥涵设计通用规范》<sup>[14]</sup>(简称 04 规范)和 JTG D60—2015《公路桥涵设计通用规范》<sup>[15]</sup>(简称 15 规范)规定的公路 I 级车辆荷载计算结果进行对

比,如表 6 所示。表 6 中: $M$  为荷载计算值。由表 6 可知:与 04 规范计算结果相比,GPD 计算数值明显偏大,且随着跨径的增大,差异更加明显;与 15 规范计算结果相比,当  $L\leq 13\text{ m}$  时,GPD 计算数值小于规范计算结果,当  $L\geq 13\text{ m}$  时,GPD 计算数值略大于规范计算结果。

8 结论

- 1) 车辆荷载弯矩效应样本的厚尾尖峰特性与桥梁跨径有关,当桥梁跨径  $L\leq 16\text{ m}$  时,车辆荷载弯矩效应样本符合厚尾尖峰特性;当桥梁跨径  $L\geq 20\text{ m}$  时,样本不具有厚尾尖峰特性。文中方法只适用于  $L\leq 16\text{ m}$  的小跨径桥梁;对于  $L\geq 20\text{ m}$  的桥梁,车辆荷载效应不具备厚尾特性,不建议采用文中方法。
- 2) 基于广义 Pareto 分布(GPD 分布)的 POT 模型能较好地拟合车辆荷载效应样本分布的尾部,且能反映车辆荷载效应的厚尾特点。
- 3) 与现行 JTG D60—2015《公路桥涵设计通用规范》规定的公路 I 级车辆荷载的计算结果对比,当  $L\leq 13\text{ m}$  时,规范值与实际相比偏大;当  $L\geq 13\text{ m}$  时,规范值与实际相比略微偏小。

参考文献:

[1] 袁伟璋,黄海云,张俊平,等. POT 模型的车辆荷载极值预测及荷载效应[J]. 河南科技大学学报(自然科学版), 2016,37(4):36-41. DOI:10.15926/j.cnki.issn1672-6871.2016.04.008.

[2] 韩大建,杜江. 工程结构作用极值分析方法研究[J]. 建筑科学与工程学报,2008,25(2):68-71,126. DOI:10.3321/j.issn:1673-2049.2008.02.011.

[3] 张豪杰. 基于平衡更新过程的高速公路桥梁车辆荷载效应[J]. 交通世界(运输·车辆),2015,33(11):59-61. DOI:10.16248/j.cnki.cn11-3723/u.2016.33.019.

[4] 胡志明,徐全亮. 基于实测轴载的高速公路货车随机车辆荷载模拟[J]. 公路交通科技(应用技术版),2016(6):306-308.

[5] 李植淮,李春前,孙健康,等. 基于 GPD 模型的车辆荷载效应极值估计[J]. 工程力学 2012,29(增刊 1):166-171. DOI:10.6052/j.issn.1000-4750.2011.11.S037.

[6] 苏怀智,王锋,刘红萍. 基于 POT 模型建立大坝服役性态预警指标[J]. 水利学报,2012,43(8):974-978. DOI:10.13243/j.cnki.slxb.2012.08.014.

[7] HILL B M. A simple general approach to inference about the tail of a distribution[J]. Annals of Statistics,1975,3(5):1163-1173. DOI:10.1214/aos/1176343247.

[8] 史道济. 实用极值统计方法[M]. 天津:天津科学技术出版社,2005.

[9] PICKANDS J. Statistical inference using extreme order statistics[J]. Annals of Statistics,1975,3(1):119-131. DOI:10.1214/aos/1176343003.

[10] 边宽江,程波,王蕾蕾. 收益分布尖峰厚尾问题的统计检验[J]. 统计与决策,2009(7):83-85. DOI:10.13546/j.cnki.tjyj.2009.07.064.

[11] CAERS J,MAES M A. Identifying tails bounds and end-points of random variables [J]. Structure Safety,1998,20(5):1-23. DOI:10.1016/S0167-4730(97)00036-2.

[12] ASHKAR F,TATSAMBON C N. Revisiting some estimation methods for the generalized Pareto distribution[J]. Journal of Hydrology,2007,346(3):136-143. DOI:10.1016/j.jhydrol.2007.09.007.

[13] CASTILLO J D,DAOUDI J. Estimation of the generalized Pareto distribution[J]. Statistics and Probability Letters,2009,79(5):684-688. DOI:10.1016/j.spl.2008.10.021.

[14] 中交公路规划设计院有限公司. 公路桥涵设计通用规范: JTG D60—2004[S]. 北京:人民交通出版社,2004.

[15] 中交公路规划设计院有限公司. 公路桥涵设计通用规范: JTG D60—2015[S]. 北京:人民交通出版社,2015.