第 39 卷 第 2 期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 39 No. 2
2018 年 3 月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Mar. 2018

DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.201704037

利用模函数估计拟共形映照的偏差函数

王朝祥

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 推广一个关于环形区域模函数 $\mu(r)$ 的不等式,对拟共形映照的偏差函数 $\lambda(K)$ 作出更精确的估计,得到 $\lambda(K)=\frac{1}{16}e^{\pi K}-\frac{1}{2}+\frac{5}{4}e^{-\pi K}-\frac{31}{8}e^{-3\pi K}+\frac{27}{2}e^{-5\pi K}-c(K)e^{-7\pi K}$,其中,$\frac{633}{16}<c(K)<\frac{321}{8}$.

关键词: 拟共形映照; 模函数; 偏差函数; 对称函数

中图分类号: O 174.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5013(2018)02-0312-05

Estimate of Quasiconformal Distortion Function by Module Function

WANG Chaoxiang

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: We extend an inequality for the module function $\mu(r)$ defined in a double ring domain, using this result, we obtain better estimate for quasiconformal distortion function $\lambda(K)$. We prove that $\lambda(K)=\frac{1}{16}e^{\pi K}-\frac{1}{2}+\frac{5}{4}e^{-\pi K}-\frac{31}{8}e^{-3\pi K}+\frac{27}{2}e^{-5\pi K}-c(K)e^{-7\pi K}$, where $\frac{633}{16}<c(K)<\frac{321}{8}$.

Keywords: quasiconformal mapping; module function; distortion function; symmetric function

1 问题的提出

若实值连续严格增加函数 $f(x)$ 对任意实数 x 和正数 t,总有 $\frac{1}{M}\leqslant\frac{f(x+t)-f(x)}{f(x)-f(x-t)}\leqslant M$ 成立,Beurling 等[1]证明 $f(x)$ 可延拓成上半平面到自身的 K-拟共形映照,K 仅与 M 有关. 另设 $f(z)$ 是上半平面到自身上满足 $f(\infty)=\infty$ 的 K-拟共形映照[2],则 $f(x)$ 对任意实数 x 和正数 t,有 $\frac{1}{\lambda}\leqslant\frac{f(x+t)-f(x)}{f(x)-f(x-t)}\leqslant\lambda$ 成立,λ 仅与 K 有关. 设 $\lambda(K)=\inf\lambda$,下确界是对所有该类 K-拟共形映照而取的. 对 $\lambda(K)$ 的精确估计是拟共形映照理论的重要课题,它与平面单叶调和映照的极值问题、多连通区域模的特征等有密切的联系,许多学者对此进行研究,也得到逐渐精确的结果[3-10]. 对每个 $K\in(1,\infty)$,Lehto 等[3]证明了 $\lambda(K)=\frac{1}{16}e^{\pi K}-\frac{1}{2}+\delta(K)$,其中,$0<\delta(K)<2e^{-\pi K}$. Anderson 等[4]证明上述表示式中有 $e^{-\pi K}<\delta(K)<2e^{-\pi K}$.

收稿日期: 2017-04-12

通信作者: 王朝祥 (1966-),男,副教授,主要从事函数论的研究. E-mail:wchaox@hqu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11471128); 福建省自然科学基金资助项目(2014J01013); 华侨大学中青年教师科研提升资助计划(ZQN-YX110)

Anderson 等[6]证明了$\frac{1}{16}e^{\pi K}-\frac{1}{2}+c_1(K)e^{-\pi K}<\lambda(K)<\frac{1}{16}e^{\pi K}-\frac{1}{2}+c_2(K)e^{-\pi K}$，其中，$c_1(K)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4e^{-2\pi K}+2}$，$c_2(K)=\frac{1}{4}(\frac{1}{4}+\frac{5e^{-4\pi K}+14e^{-2\pi K}+5}{e^{-6\pi K}+7e^{-4\pi K}+7e^{-2\pi K}+2})$. 黄心中[7]证明了$\frac{1}{16}e^{\pi K}-\frac{1}{2}+\frac{5}{4}e^{-\pi K}+c_1(K)e^{-3\pi K}<\lambda(K)<\frac{1}{16}e^{\pi K}-\frac{1}{2}+\frac{5}{4}e^{-\pi K}+c_2(K)e^{-3\pi K}$，其中，$c_1(K)=-4+\frac{4}{3}e^{-\pi K}+\frac{28}{3}e^{-2\pi K}+\cdots+\frac{2\,048}{3}e^{-16\pi K}$，$c_2(K)=-\frac{13}{4}+\frac{55}{4}e^{-2\pi K}+\frac{321}{16}e^{-4\pi K}+\cdots+\frac{1}{2}e^{-10\pi K}$. 本文将对 $\lambda(K)$的上下界作更精确的估计.

2　主要结果及证明

令 $\mu(r)$为 Grötzsch 极值环形区域模函数，即 $\mu(r)=\mathrm{mod}\ B_r$，$0<r<1$，$B=\{z\mid |z|<1\}$，$B_r=B\backslash[0,r]$. 根据文献[2]，$\mu(r)=\frac{\pi}{2}\frac{E(\sqrt{1-r^2})}{E(r)}$，其中，$E(r)=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-r^2x^2)}}$. 对 $K>1$，记 $\varphi_K(r)=\mu^{-1}(\frac{1}{K}\mu(r))$，则 $\lambda(K)=\left(\frac{\varphi_K(1/\sqrt{2})}{\varphi_{1/K}(1/\sqrt{2})}\right)^2$，这个等式将平面拟共形映照中的两个特殊函数 $\lambda(K)$与 $\varphi_K(r)$通过 $\mu(r)$联系起来. 首先，推广文献[7]中关于 $\mu(r)$的不等式，进而对 $\lambda(K)$作出更好的估计.

定理 1　设 $0<r<1$，令 $\mu(r)$表示极值环形区域 $B_r=B\backslash[0,r]$的模，其中，$B=\{z\mid |z|<1\}$，则

$$\frac{1}{8}\log\frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{1-r^2}}+\sqrt[8]{8\sqrt[4]{1-r^2}(1+\sqrt{1-r^2})}}{\sqrt{1+\sqrt[4]{1-r^2}}-\sqrt[8]{8\sqrt[4]{1-r^2}(1+\sqrt{1-r^2})}}<\mu(r)<$$
$$\frac{1}{8}\log\frac{2(1+\sqrt[4]{1-r^2}+\sqrt[4]{8\sqrt[4]{1-r^2}(1+\sqrt{1-r^2})})}{1+\sqrt[4]{1-r^2}-\sqrt[4]{8\sqrt[4]{1-r^2}(1+\sqrt{1-r^2})}}.$$

定理 2　对每个 $K\in(1,\infty)$，有

$$\lambda(K)=\frac{1}{16}e^{\pi K}-\frac{1}{2}+\frac{5}{4}e^{-\pi K}-\frac{31}{8}e^{-3\pi K}+\frac{27}{2}e^{-5\pi K}-c(K)e^{-7\pi K}.$$

式中：$\frac{633}{16}<c(K)<\frac{321}{8}$.

定理 1 的证明：$0<r<1$，令 $\alpha=\frac{1-\sqrt{1-r^2}}{r}$，$\beta=\frac{1}{\alpha}=\frac{1+\sqrt{1-r^2}}{r}$，记 $B=\{z\mid |z|<1\}$，$\Delta=\{z\mid |z|<\beta\}$，$B_r=B\backslash[0,r]$，$B_\alpha=B\backslash[-\alpha,\alpha]$，$B_\beta=\Delta\backslash[-1,1]$，又记 $\mu(r)=\mathrm{mod}\ B_r$.

共形映照 $w(z)=\frac{z-\alpha}{1-\alpha z}$将 B_r 映成 B_α，且 $w(0)=-\alpha$，$w(r)=\alpha$. 共形映照 $\zeta=\frac{1}{\alpha}z$ 将 B_α 映成 B_β，因此，有 $\mu(r)=\mathrm{mod}\ B_r=\mathrm{mod}\ B_\alpha=\mathrm{mod}\ B_\beta$.

共形映照 $f(z)=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$将圆环 $R_s=\{z\mid 1<|z|<s\}$映成长短轴分别为$\frac{1}{2}(s+\frac{1}{s})$，$\frac{1}{2}(s-\frac{1}{s})$的椭圆去掉线段$-1\leqslant u\leqslant 1$ 的区域 E_s. 因此，$\mathrm{mod}\ E_s=\mathrm{mod}\ R_s=\log s$.

若取 $s=4/r$，则 $B_\beta\subset E_s$，则由模的单调性可得 $\mu(r)<\mathrm{mod}\ E_s=\log(4/r)$.

若令 $s=\rho(\rho>1)$且$\frac{1}{2}(\rho+\frac{1}{\rho})=\beta$，则有 $E_s\subset B_\beta$，由模的单调性可知，$\mu(r)=\mathrm{mod}\ B_\beta>\mathrm{mod}\ E_s=\log\rho$，有

$$\log\rho<\mu(r)<\log(4/r). \tag{1}$$

式(1)中：ρ 满足条件 $1/2(\rho+1/\rho)=\beta$，$\rho>1$；$\beta=(1+\sqrt{1-r^2})/r$，$0<r<1$.

此外，$g(z)=-\frac{4z}{(1-z)^2}$将 B_r 映成复平面去掉从$-\frac{4r}{(1-r)^2}$到 0，以及从 1 到∞两条实直线段的区域，记$\frac{4r}{(1-r)^2}=R$，像区域的模为 $2\mu\left(\sqrt{\frac{R}{1+R}}\right)=2\mu\left(\frac{2\sqrt{r}}{1+r}\right)$，故 $\mu(r)=2\mu\left(\frac{2\sqrt{r}}{1+r}\right)$，从而有

$$\mu(r)=\frac{1}{2}\mu\left(\frac{1}{r^2}(1-\sqrt{1-r^2})^2\right)=\frac{1}{2}\mu\left(\frac{1-\sqrt{1-r^2}}{1+\sqrt{1-r^2}}\right). \tag{2}$$

构造递推数列$\{r_n\}$:$r_0=r(0<r<1)$,$r_{n+1}=\frac{1-\sqrt{1-r_n^2}}{1+\sqrt{1-r_n^2}}$. 记 $s=\sqrt[4]{1-r_n^2}$,于是 $r_{n+1}=\frac{1-s^2}{1+s^2}$,$\sqrt{1-r_{n+1}^2}=\sqrt{1-\left(\frac{1-s^2}{1+s^2}\right)^2}=\frac{2s}{1+s^2}$,故

$$r_{n+2}=\frac{1-\sqrt{1-r_{n+1}^2}}{1+\sqrt{1-r_{n+1}^2}}=\frac{1-\frac{2s}{1+s^2}}{1+\frac{2s}{1+s^2}}=\left(\frac{1-s}{1+s}\right)^2=\left(\frac{1-\sqrt[4]{1-r_n^2}}{1+\sqrt[4]{1-r_n^2}}\right)^2,$$

$$r_{n+4}=\left(\frac{1-\sqrt[4]{1-r_{n+2}^2}}{1+\sqrt[4]{1-r_{n+2}^2}}\right)^2=\left(\frac{1-\sqrt[4]{1-(\frac{1-s}{1+s})^4}}{1+\sqrt[4]{1-(\frac{1-s}{1+s})^4}}\right)^2=\left(\frac{1+s-\sqrt[4]{(1+s)^4-(1-s)^4}}{1+s+\sqrt[4]{(1+s)^4-(1-s)^4}}\right)^2=$$

$$\left(\frac{1+s-\sqrt[4]{8s(1+s^2)}}{1+s+\sqrt[4]{8s(1+s^2)}}\right)^2=\left(\frac{1+\sqrt[4]{1-r_n^2}-\sqrt[4]{8\sqrt[4]{1-r_n^2}(1+\sqrt{1-r_n^2})}}{1+\sqrt[4]{1-r_n^2}+\sqrt[4]{8\sqrt[4]{1-r_n^2}(1+\sqrt{1-r_n^2})}}\right)^2.$$

从而,有

$$r_2=\left(\frac{1-\sqrt[4]{1-r^2}}{1+\sqrt[4]{1-r^2}}\right)^2,\qquad r_4=\left(\frac{1+\sqrt[4]{1-r^2}-\sqrt[4]{8\sqrt[4]{1-r^2}(1+\sqrt{1-r^2})}}{1+\sqrt[4]{1-r^2}+\sqrt[4]{8\sqrt[4]{1-r^2}(1+\sqrt{1-r^2})}}\right)^2.$$

取 $\beta=\frac{1}{r_3}(1+\sqrt{1-r_3^2})$,令$\frac{1}{2}(\rho+\frac{1}{\rho})=\beta$,且 $\rho>1$. 注意到 $r_3=\frac{1-\sqrt{1-r_2^2}}{1+\sqrt{1-r_2^2}}$,于是 $\rho+\frac{1}{\rho}=\frac{2}{r_3}(1+\sqrt{1-r_3^2})=\frac{2(1+\sqrt[4]{1-r_2^2})}{1-\sqrt[4]{1-r_2^2}}$,因此,$\rho=\frac{1+\sqrt[8]{1-r_2^2}}{1-\sqrt[8]{1-r_2^2}}=\frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{1-r^2}}+\sqrt[8]{8\sqrt[4]{1-r^2}(1+\sqrt{1-r^2})}}{\sqrt{1+\sqrt[4]{1-r^2}}-\sqrt[8]{8\sqrt[4]{1-r^2}(1+\sqrt{1-r^2})}}$.

由于 $\mu(r)=\frac{1}{2}\mu\left(\frac{1-\sqrt{1-r^2}}{1+\sqrt{1-r^2}}\right)$,故 $\mu(r)=\frac{1}{2}\mu(r_1)=\frac{1}{2^2}\mu(r_2)=\frac{1}{2^3}\mu(r_3)=\frac{1}{2^4}\mu(r_4)$,由式(1)可得

$$\mu(r)=\frac{1}{2^4}\mu(r_4)<\frac{1}{2^4}\log\frac{4}{r_4}=\frac{1}{2^4}\log 4\left(\frac{1+\sqrt[4]{1-r^2}+\sqrt[4]{8\sqrt[4]{1-r^2}(1+\sqrt{1-r^2})}}{1+\sqrt[4]{1-r^2}-\sqrt[4]{8\sqrt[4]{1-r^2}(1+\sqrt{1-r^2})}}\right)^2=$$

$$\frac{1}{8}\log\frac{2(1+\sqrt[4]{1-r^2}+\sqrt[4]{8\sqrt[4]{1-r^2}(1+\sqrt{1-r^2})})}{1+\sqrt[4]{1-r^2}-\sqrt[4]{8\sqrt[4]{1-r^2}(1+\sqrt{1-r^2})}}.$$

同样,由式(1)有

$$\mu(r)=\frac{1}{2^3}\mu(r_3)>\frac{1}{2^3}\log\rho=\frac{1}{8}\log\frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{1-r^2}}+\sqrt[8]{8\sqrt[4]{1-r^2}(1+\sqrt{1-r^2})}}{\sqrt{1+\sqrt[4]{1-r^2}}-\sqrt[8]{8\sqrt[4]{1-r^2}(1+\sqrt{1-r^2})}}.$$

故有

$$\log\frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{1-r^2}}+\sqrt[8]{8\sqrt[4]{1-r^2}(1+\sqrt{1-r^2})}}{\sqrt{1+\sqrt[4]{1-r^2}}-\sqrt[8]{8\sqrt[4]{1-r^2}(1+\sqrt{1-r^2})}}<8\mu(r)<$$

$$\log\frac{2(1+\sqrt[4]{1-r^2}+\sqrt[4]{8\sqrt[4]{1-r^2}(1+\sqrt{1-r^2})})}{1+\sqrt[4]{1-r^2}-\sqrt[4]{8\sqrt[4]{1-r^2}(1+\sqrt{1-r^2})}}.$$

定理1证毕.

定理2的证明:对 $K>1$,取 $r=\mu^{-1}(\frac{1}{2}\pi K)$,则 $\lambda(K)=\frac{1}{r^2}-1$. 由定理1,有

$$\mu(r)=\frac{1}{2}\pi K<\frac{1}{8}\log\frac{2(1+\sqrt[4]{1-r^2}+\sqrt[4]{8\sqrt[4]{1-r^2}(1+\sqrt{1-r^2})})}{1+\sqrt[4]{1-r^2}-\sqrt[4]{8\sqrt[4]{1-r^2}(1+\sqrt{1-r^2})}}.$$

因此，$\dfrac{1+\sqrt[4]{1-r^2}-\sqrt[4]{8\sqrt[4]{1-r^2}(1+\sqrt{1-r^2})}}{1+\sqrt[4]{1-r^2}+\sqrt[4]{8\sqrt[4]{1-r^2}(1+\sqrt{1-r^2})}}<2\mathrm{e}^{-4\pi K}$，于是有 $\dfrac{\sqrt[4]{8\sqrt[4]{1-r^2}(1+\sqrt{1-r^2})}}{1+\sqrt[4]{1-r^2}}>\dfrac{1-2\mathrm{e}^{-4\pi K}}{1+2\mathrm{e}^{-4\pi K}}$，从而$\dfrac{8\sqrt[4]{1-r^2}(1+\sqrt{1-r^2})}{(1+\sqrt[4]{1-r^2})^4}>(\dfrac{1-2\mathrm{e}^{-4\pi K}}{1+2\mathrm{e}^{-4\pi K}})^4$. 再设 $t=\mathrm{e}^{-\pi K}(0<t<\dfrac{1}{23})$，$s=\dfrac{1-\sqrt[4]{1-r^2}}{1+\sqrt[4]{1-r^2}}(0<s<1)$，于是，$1-s^4=\dfrac{8\sqrt[4]{1-r^2}(1+\sqrt{1-r^2})}{(1+\sqrt[4]{1-r^2})^4}$，则 $1-s^4>(\dfrac{1-2t^4}{1+2t^4})^4$，$s<\sqrt[4]{1-(\dfrac{1-2t^4}{1+2t^4})^4}=\dfrac{2t\sqrt[4]{1+4t^8}}{1+2t^4}<\dfrac{2t(1+t^8)}{1+2t^4}$. 记 $p=\dfrac{2t(1+t^8)}{1+2t^4}$，则 $\sqrt[4]{1-r^2}>\dfrac{1-p}{1+p}$，得到 $r^2<1-(\dfrac{1-p}{1+p})^4$，从而

$$\lambda(K)=\frac{1}{r^2}-1>\frac{(1-p)^4}{(1+p)^4-(1-p)^4}=\frac{(1-p)^4}{8p(1+p^2)}=$$
$$\frac{(1-2t+2t^4-2t^9)^4}{16t(1+2t^4)(1+t^8)(1+4t^2+4t^4+4t^8+8t^{10}+4t^{18})}.$$

注意到 $0<t=\mathrm{e}^{-\pi K}<1/23$，因此，有$(1-2t+2t^4-2t^9)^4>1-8t+24t^2-32t^3+24t^4-48t^5+96t^6-64t^7+24t^8-104t^9$ 及$(1+2t^4)(1+t^8)(1+4t^2+4t^4+4t^8+8t^{10}+4t^{18})<1+4t^2+6t^4+8t^6+14t^8$，又 $1-8t+24t^2-32t^3+24t^4-48t^5+96t^6-64t^7+24t^8-104t^9-(1-8t+20t^2-62t^4+216t^6-642t^8)(1+4t^2+6t^4+8t^6+14t^8)=8t^9+1\,488t^{10}+2\,992t^{12}+2\,112t^{14}+8\,988t^{16}>0$，从而

$$\frac{(1-2t+2t^4-2t^9)^4}{16t(1+2t^4)(1+t^8)(1+4t^2+4t^4+4t^8+8t^{10}+4t^{18})}>$$
$$\frac{1-8t+24t^2-32t^3+24t^4-48t^5+96t^6-64t^7+24t^8-104t^9}{16t(1+4t^2+6t^4+8t^6+14t^8)}>$$
$$\frac{1}{16t}(1-8t+20t^2-62t^4+216t^6-642t^8).$$

因此，有

$$\lambda(K)>\frac{(1-2t+2t^4-2t^9)^4}{16t(1+2t^4)(1+t^8)(1+4t^2+4t^4+8t^{10}+4t^{18})}>$$
$$\frac{1}{16t}(1-8t+20t^2-62t^4+216t^6-642t^8).$$

即可得到 $\lambda(K)$的下界估计.

下面估计其上界，同样由定理 1，有

$$\mu(r)=\frac{1}{2}\pi K>\frac{1}{8}\log\frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{1-r^2}}+\sqrt[8]{8\sqrt[4]{1-r^2}(1+\sqrt{1-r^2})}}{\sqrt{1+\sqrt[4]{1-r^2}}-\sqrt[8]{8\sqrt[4]{1-r^2}(1+\sqrt{1-r^2})}}.$$

因此，$\dfrac{\sqrt{1+\sqrt[4]{1-r^2}}-\sqrt[8]{8\sqrt[4]{1-r^2}(1+\sqrt{1-r^2})}}{\sqrt{1+\sqrt[4]{1-r^2}}+\sqrt[8]{8\sqrt[4]{1-r^2}(1+\sqrt{1-r^2})}}>\mathrm{e}^{-4\pi K}$，于是，$\dfrac{\sqrt[8]{8\sqrt[4]{1-r^2}(1+\sqrt{1-r^2})}}{1+\sqrt[4]{1-r^2}}<\dfrac{1-\mathrm{e}^{-4\pi K}}{1+\mathrm{e}^{-4\pi K}}$，则$\dfrac{\sqrt[4]{8\sqrt[4]{1-r^2}(1+\sqrt{1-r^2})}}{1+\sqrt[4]{1-r^2}}>(\dfrac{1-\mathrm{e}^{-4\pi K}}{1+\mathrm{e}^{-4\pi K}})^2$. 设 $t=\mathrm{e}^{-\pi K}(0<t<\dfrac{1}{23})$，$s=\dfrac{1-\sqrt[4]{1-r^2}}{1+\sqrt[4]{1-r^2}}(0<s<1)$，于是，$1-s^4=\dfrac{8\sqrt[4]{1-r^2}(1+\sqrt{1-r^2})}{(1+\sqrt[4]{1-r^2})^4}$，则 $1-s^4<(\dfrac{1-t^4}{1+t^4})^8$，$s>\sqrt[4]{1-(\dfrac{1-t^4}{1+t^4})^8}=\dfrac{2t\sqrt[4]{(1+t^8)(1+6t^8+t^{16})}}{(1+t^4)^2}>\dfrac{2t}{(1+t^4)^2}$. 记 $q=\dfrac{2t}{(1+t^4)^2}$，则 $\sqrt[4]{1-r^2}<\dfrac{1-q}{1+q}$，得到 $r^2>1-(\dfrac{1-q}{1+q})^4$，从而

$$\lambda(K)=\frac{1}{r^2}-1<\frac{(1-q)^4}{(1+q)^4-(1-q)^4}=\frac{(1-q)^4}{8q(1+q^2)}=$$
$$\frac{((1+t^4)^2-2t)^4}{16t(1+t^4)^2(1+4t^2+4t^4+6t^8+4t^{12}+t^{16})}<$$
$$\frac{((1+t^4)^2-2t)^4}{16t(1+t^4)^2(1+2t^2)^2}<\frac{((1+t^4)^2-2t)^4}{16t(1+4t^2+6t^4+8t^6+9t^8)}.$$

注意到 $0<t=\mathrm{e}^{-\pi K}<1/23$，因此，有$(1-2t+2t^4+t^8)^4<1-8t+24t^2-32t^3+24t^4-48t^5+96t^6-$

$64t^7+28t^8-120t^9+144t^{10}$ 及 $(1+t^4)^2(1+4t^2+4t^4)>1+4t^2+6t^4+8t^6+9t^8$，又 $1-8t+24t^2-32t^3+24t^4-48t^5+96t^6-64t^7+28t^8-120t^9+144t^{10}-(1+4t^2+6t^4+8t^6+9t^8)(1-8t+20t^2-62t^4+216t^6-633t^8)=-48t^9+1\ 696t^{10}+2\ 628t^{12}+3\ 120t^{14}+5\ 697t^{16}<0$.

因此，有

$$\lambda(K)<\frac{((1+t^4)^2-2t)^4}{16t(1+t^4)^2(1+2t^2)^2}<\frac{1}{16t}(1-8t+20t^2-62t^4+216t^6-633t^8).$$

综上可得，

$$\frac{1}{16t}(1-8t+20t^2-62t^4+216t^6)-\frac{321}{8}t^7<\lambda(K)<\frac{1}{16t}(1-8t+20t^2-62t^4+216t^6)-\frac{633}{16}t^7.$$

因此，有

$$\frac{1}{16}e^{\pi K}-\frac{1}{2}+\frac{5}{4}e^{-\pi K}-\frac{31}{8}e^{-3\pi K}+\frac{27}{2}e^{-5\pi K}-\frac{321}{8}e^{-7\pi K}<\lambda(K)<$$
$$\frac{1}{16}e^{\pi K}-\frac{1}{2}+\frac{5}{4}e^{-\pi K}-\frac{31}{8}e^{-3\pi K}+\frac{27}{2}e^{-5\pi K}-\frac{633}{16}e^{-7\pi K}.$$

从而有

$$\lambda(K)=\frac{1}{16}e^{\pi K}-\frac{1}{2}+\frac{5}{4}e^{-\pi K}-\frac{31}{8}e^{-3\pi K}+\frac{27}{2}e^{-5\pi K}-c(K)e^{-7\pi K},$$

式中：$\frac{633}{16}<c(K)<\frac{321}{8}$.

参考文献：

[1] BEURLING A, AHLFORS L V. The boundary correspondence under quasiconformal mappings[J]. Acta Math, 1956, 96(1): 125-142.

[2] LEHTO O, VIRTANEN K I. Quasiconformal mappings in the plane[M]. New York: Springer-Verlag, 1973.

[3] LEHTO O, VIRTANEN K I, VÄISÄLÄ J. Contributions to the distortion theory of quasiconformal mappings[J]. Ann Acad Sci Fenn Ser AI, 1959, 273: 1-14.

[4] ANDERSON G D, VAMANAMURTHY M K, VUORINEN M. Distortion functions for plane quasiconformal mappings[J]. Israel Journal of Math, 1988, 62(1): 1-16.

[5] QIU Songliang. Singular values, quasiconformal maps and the Schottky upper bound[J]. Science in China, 1998, 41(12): 1241-1247.

[6] ANDERSON G D, QIU S L, VUORINEN M. Modular equations and distortion functions[J]. The Ramanujan Journal, 2009, 18(2): 147-169.

[7] 黄心中. 平面拟共形映照的偏差函数估计[J]. 数学年刊A辑, 2014, 35(4): 413-422.

[8] 黄心中. 给定复伸张单叶调和映照的面积偏差[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2007, 28(2): 208-211. DOI: 10.3969/j.issn.1000-5013.2007.02.025.

[9] IWANIEC T, KOVALEV L V, ONNINEN J. The harmonic mapping problem and affine capacity[J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 2011, 141(5): 1017-1030. DOI: 10.1017/S0308210510000107.

[10] 阙玉琴, 陈行堤. 一类调和映照的系数估计[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2015, 36(4): 484-488. DOI: 10.11830/ISSN.1000-5013.2015.04.0484.

(**责任编辑:** 钱筠　**英文审校:** 黄心中)