

doi: 10.11830/ISSN.1000-5013.201612009



非对称区间上调和函数的 Schwarz 引理

李孟华, 陈行堤

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 研究单位球到给定一般区间上的实调和函数的 Schwarz 型引理. 运用调和函数的平均值定理, 将像域在对称区间 $[-1, 1]$ 上的调和函数的 Schwarz 引理推广到在一般区间 $[a, b]$ 上. 作为一个应用, 改进了 Partyka 和 Sakan 的一个结果, 得到实调和函数的下界估计.

关键词: 调和函数; Schwarz 引理; Poisson 核; 平均值定理

中图分类号: O 174.55 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5013(2017)06-0898-05

Schwarz Lemma for Harmonic Functions in Asymmetric Interval

LI Menghua, CHEN Xingdi

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: In this paper, we investigate the Schwarz lemma for real harmonic functions of the unit ball into a general interval. By appealing to the method of mean-value theorem of harmonic functions, we obtain the Schwarz lemma of harmonic functions with their image domains generalized from the symmetric interval $[-1, 1]$ to a general interval $[a, b]$. As an application of this result, we improve the upper bound estimate given by Partyka and Sakan. Moreover, a lower bound for this class of harmonic functions is also given.

Keywords: harmonic mapping; Schwarz lemma; Poisson kernel; mean-value theorem

1 预备知识

记 $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbf{R}^p, p \geq 2, |x| = |x|_p = \sqrt{\sum_{i=1}^p x_i^2}, B^p = \{x \in \mathbf{R}^p : |x| \leq 1\}$. 当 $p=2$ 时, 记 $B^2 = D$ 为单位圆盘, S^p 是单位球 B^p 的边界. 记 $e_x = x/|x|, x \neq 0$, 若 $x=0$, 规定 $e_x=1$. 用 χ_A 表示 A 上的特征函数. σ 表示单位球面 S^p 上的测度, 比如 $\sigma(S^2) = 2\pi$. 单位球 B^p 上调和函数的 Poisson 核为

$$P_x(x, y) = \frac{1}{\sigma(S^p)} \frac{1 - |x|^2}{|x - y|^p}, \quad x \in B^p, \quad y \in S^p. \tag{1}$$

对任意的 $y \in S^p$, 有 Poisson 核 P_x 满足 $\int_{S^p} P_x(x, y) d\sigma(y) = 1$. 若 $u(x)|_{S^p} = f$, 并且 f 是 S^p 上的

收稿日期: 2016 - 12 - 04
通信作者: 陈行堤(1976 -), 男, 教授, 博士, 主要从事函数论的研究. E - mail: chxtt@hqu.edu.cn.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11471128); 福建省自然科学基金计划资助项目(2014J01013); 华侨大学青年教师科研提升计划资助项目(ZQN - YX110); 华侨大学研究生科研创新能力培育计划资助项目(15111313002)

连续函数,则在单位球 B^p 上 $u(x) = \int_{S^p} f(y)P_x(x,y)d\sigma(y)$ 是调和的^[1].

由于在单位球 B^p 上的调和函数满足平均值定理和 Fatou 定理^[1], 因此,对于 $0 < c < 1$, 可记

$$H^c = \{h \text{ 为 } B^p \text{ 调和函数且 } h(0) = c, 0 \leq h \leq 1\}, \tag{2}$$

$$K^c = \{f \in L^\infty(S^p, \sigma) : \int_{S^p} f d\sigma = c \cdot \sigma(S^p), 0 \leq f \leq 1\}. \tag{3}$$

为了方便,记

$$M_c^p(|x|) = (b-a) \int_{S^p} \chi_{S(c, e_x)} \cdot P_x d\sigma + a, \tag{4}$$

$$m_c^p(|x|) = (b-a) \int_{S^p} \chi_{S(c, -e_x)} \cdot P_x d\sigma + a. \tag{5}$$

定义 $\alpha(c)$ 为球盖 $S(c, e_x)$ 的球面角, 由于 $\int_{S^p} \chi_{S(c, e_x)} \cdot P_x d\sigma$ 与 $\int_{S^p} \chi_{S(c, -e_x)} \cdot P_x d\sigma$ 关于 σ 测度具有旋转不变性, 因此, 式(4), (5)可化成球坐标形式如下, 即

$$M_c^p(|x|) = \frac{(b-a)}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(p/2)}{\Gamma((p-1)/2)} (1-|x|^2)^v \int_0^{\alpha(c)} \frac{\sin^{p-2} \varphi}{(1-2|x|\cos \varphi + |x|^2)^\mu} d\varphi + a, \tag{6}$$

$$m_c^p(|x|) = \frac{(b-a)}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(p/2)}{\Gamma((p-1)/2)} (1-|x|^2)^v \int_{\pi-\alpha(c)}^\pi \frac{\sin^{p-2} \varphi}{(1-2|x|\cos \varphi + |x|^2)^\mu} d\varphi + a. \tag{7}$$

式(6), (7)中: $v=1; \mu=p/2$.

Heinz 运用 Schwarz 引理得出单位圆盘到自身上的调和函数的 Heinz 不等式^[2]. 基于此理论, Par-tyka 等^[3]用拟从属技巧, 将 Schwarz 引理从条件 $|\operatorname{Re} F(z)| < 1$ 推广为带形区域 $a \leq \operatorname{Re} F(z) \leq b$ 的情形^[4], 有

$$\operatorname{Re} F(z) \leq \frac{2(b-a)}{\pi} \arctan \left[\frac{|z| + \left| \tan \frac{\pi}{4} \cdot \frac{b+a}{b-a} \right|}{1 + |z| \left| \tan \frac{\pi}{4} \cdot \frac{b+a}{b-a} \right|} \right] + \frac{b+a}{2}, \tag{8}$$

并对其加以应用^[5-6]. 许多学者对 Schwarz 引理进行深入研究^[7-9]. Kalaj 等^[9]研究单位球上实调和函数的模, 并给出了相应的 Schwarz 引理. Burgeth^[10]给出了单位球 B^p 上实调和函数满足条件 $-1 \leq h(x) \leq 1$ 下的偏差估计.

2 主要结果及证明

命题 1 设 h 为单位球 B^p 上的实调和函数, 且 $a, b \in \mathbf{R}, a < b$. 若 $a \leq h(x) \leq b, h(0) = d$, 则对于 $c = (d-a)/(b-a)$ 和任意的 $x \in B^p$, 有

$$m_c^p(|x|) \leq h(x) \leq M_c^p(|x|). \tag{9}$$

证明 首先, 对于任意的 $t \in \mathbf{R}^+, x \in B^p$ 测度函数 $\sigma(P_x > t)$ 在 \mathbf{R}^+ 上连续且是关于 t 的严格单调递减函数. 因此, 对任意的 $c \in [0, 1]$, 都存在唯一的 $t_c \in \mathbf{R}^+$, 使得 $\sigma(P_x > t_c) = c \cdot \sigma(S^p)$. 从而有

$$\int_{S^p} \chi_{\{P_x > t_c\}} d\sigma = \sigma(P_x > t_c) = c \cdot \sigma(S^p).$$

由式(5)知: $\chi_{\{P_x > t_c\}} \in K^c$. 令 $x \in B^p, y \in S^p, |x|=r$, 则单位球 B^p 上的 Poisson 核为

$$P_x(y) = \frac{1}{\sigma(S^p)} \cdot \frac{1-|x|^2}{(1-2x \cdot y + |x|^2)^{p/2}} = \frac{1}{\sigma(S^p)} \cdot \frac{1-r^2}{(1-2x \cdot y + r^2)^{p/2}}. \tag{10}$$

由于 $x \cdot y = r \cos(x, y)$, 因此, 对固定的 $x, P_x(y)$ 的单调性由 $\cos(x, y)$ 确定, 其中, (x, y) 表示 y 到 x 的转角, 从而当 $P_x(y) > t_c$ 时, y 的取值范围是以 e_x 为中心的球 $S(c, e_x)$, 即

$$\chi_{\{P_x > t_c\}} = \chi_{(c, e_x)} \in K^c. \tag{11}$$

令 $F(x) = (h(x)-a)/(b-a)$, 则 $F(x)$ 为调和函数, 且 $F(x) \in H^c, c \in [0, 1]$. 存在 $F(x)$ 的边界函数 F^* ^[11], 使 $F(x) = \int_{S^p} F^* \cdot P_x d\sigma$. 由平均值定理, 有

$$c = F(0) = \int_{S^p} F^* \cdot P_x(0, y) d\sigma = \frac{\int_{S^p} F^* d\sigma}{\sigma(S^p)}.$$

因此, $\int_{S^p} F^* d\sigma = c \cdot \sigma(S^p)$, 即 $F^* \in K^c$. 下面证明 $\int_{S^p} F^* \cdot P_x d\sigma \leq M_c^p(|x|)$, 由于

$$\begin{aligned} \frac{h(x)-a}{b-a} &= F(x) = \int_{S^p} F^* \cdot P_x d\sigma = \int_{S^p} F^* \cdot [(P_x - t_c) + t_c] d\sigma = \\ &= \int_{S^p} F^* \cdot (P_x - t_c) d\sigma + c \cdot t_c \cdot \sigma(S^p) = \\ &= \int_{S^p} (\chi_{\{P_x > t_c\}} + \chi_{\{P_x \leq t_c\}}) F^* \cdot (P_x - t_c) d\sigma + c \cdot t_c \cdot \sigma(S^p) = \\ &= \int_{S^p} \chi_{\{P_x > t_c\}} F^* \cdot (P_x - t_c) d\sigma - \int_{S^p} \chi_{\{P_x > t_c\}} F^* \cdot (t_c - P_x) d\sigma + c \cdot t_c \cdot \sigma(S^p) \leq \\ &= \int_{S^p} \chi_{\{P_x > t_c\}} F^* \cdot (P_x - t_c) d\sigma + c \cdot t_c \cdot \sigma(S^p) \leq \int_{S^p} \chi_{\{P_x > t_c\}} \cdot (P_x - t_c) d\sigma + c \cdot t_c \cdot \sigma(S^p) = \\ &= \int_{S^p} \chi_{\{P_x > t_c\}} \cdot P_x d\sigma = \int_{S^p} \chi_{S(c, e_x)} \cdot P_x d\sigma = \frac{M_c^p(|x|) - a}{b - a}. \end{aligned} \tag{12}$$

因此, $h(x) \leq M_c^p(|x|)$. 下面证明 $h(x)$ 的下界. 对于任意的 $c \in [0, 1]$, 都存在唯一的 $t_{1-c} \in \mathbf{R}^+$, 使得 $\sigma(P_x > t_{1-c}) = (1-c) \cdot \sigma(S^p)$. 从而有 $\int_{S^p} \chi_{\{P_x > t_{1-c}\}} d\sigma = \sigma(P_x > t_{1-c}) = (1-c) \cdot \sigma(S^p)$. 因此, $\chi_{\{P_x > t_{1-c}\}} \in K^{1-c}$. 由式(2), 有 $\chi_{\{P_x > t_{1-c}\}} = \chi_{S(1-c, e_x)} \in K^{1-c}$, 且由于 $\chi_{S^p} - F^* \in K^{1-c}$, 则

$$\begin{aligned} \int_{S^p} (\chi_{S^p} - F^*) \cdot P_x d\sigma &= \int_{S^p} (\chi_{S^p} - F^*) \cdot [(P_x - t_{1-c}) + t_{1-c}] d\sigma = \\ &= \int_{S^p} (\chi_{S^p} - F^*) \cdot (P_x - t_{1-c}) d\sigma + t_{1-c} \cdot (1-c) \cdot \sigma(S^p) = \\ &= \int_{S^p} \chi_{\{P_x > t_{1-c}\}} \cdot (\chi_{S^p} - F^*) \cdot (P_x - t_{1-c}) d\sigma + t_{1-c} \cdot (1-c) \cdot \sigma(S^p) - \\ &= \int_{S^p} \chi_{\{P_x \leq t_{1-c}\}} \cdot (\chi_{S^p} - F^*) \cdot (t_{1-c} - P_x) d\sigma \leq \\ &= \int_{S^p} \chi_{\{P_x > t_{1-c}\}} \cdot (\chi_{S^p} - F^*) \cdot (P_x - t_{1-c}) d\sigma + t_{1-c} \cdot (1-c) \cdot \sigma(S^p) \leq \\ &= \int_{S^p} \chi_{\{P_x > t_{1-c}\}} \cdot (P_x - t_{1-c}) d\sigma + t_{1-c} \cdot (1-c) \cdot \sigma(S^p) = \\ &= \int_{S^p} \chi_{\{P_x > t_{1-c}\}} \cdot P_x d\sigma = \int_{S^p} \chi_{S(1-c, e_x)} \cdot P_x d\sigma. \end{aligned}$$

由上式及 $\chi_{S^p} - \chi_{S(1-c, e_x)} = \chi_{S(c, e_x)}$, 可得

$$\begin{aligned} \frac{m_c^p(|x|) - a}{b - a} &= \int_{S^p} \chi_{S(c, e_x)} \cdot P_x d\sigma = \int_{S^p} (\chi_{S^p} - \chi_{S(1-c, e_x)}) \cdot P_x d\sigma = \\ &= 1 - \int_{S^p} \chi_{S(1-c, e_x)} \cdot P_x d\sigma \leq 1 - \int_{S^p} (\chi_{S^p} - F^*) \cdot P_x d\sigma = \\ &= \int_{S^p} F^* \cdot P_x d\sigma = F(x) = \frac{h(x) - a}{b - a}. \end{aligned} \tag{13}$$

因此, $m_c^p(|x|) \leq h(x) \leq M_c^p(|x|)$. 利用命题 1, 给出当 $p=2$ 时, 调和函数的新的上下界估计.

定理 1 假设 h 为单位圆盘 D 上满足 $h(0)=0$ 的调和映照, 令 $a, b \in \mathbf{R}$ 且 $a < b$. 若 $a \leq h(x) \leq b$, 则

$$\begin{aligned} -\frac{2(b-a)}{\pi} \arctan \left[\frac{|x| - \tan \frac{\pi}{4} \cdot \frac{b+a}{b-a}}{1 - |x| \tan \frac{\pi}{4} \cdot \frac{b+a}{b-a}} \right] + \frac{b+a}{2} &\leq h(x) \leq \\ \frac{2(b-a)}{\pi} \arctan \left[\frac{|x| + \tan \frac{\pi}{4} \cdot \frac{b+a}{b-a}}{1 + |x| \tan \frac{\pi}{4} \cdot \frac{b+a}{b-a}} \right] + \frac{b+a}{2}. \end{aligned}$$

证明 由命题 1 知, 当 $p=2$ 时, $m_c^2(|x|) \leq h(x) \leq M_c^2(|x|)$. 由式(8), (9)可得

$$M_c^2(|x|) = \frac{b-a}{\pi} \int_0^{\alpha(c)} \frac{1-|x|^2}{1-2|x|\cos\varphi+|x|^2} d\varphi + a,$$

$$m_c^2(|x|) = \frac{b-a}{\pi} \int_{\pi-\alpha(c)}^{\pi} \frac{1-|x|^2}{1-2|x|\cos\varphi+|x|^2} d\varphi + a.$$

若 $h(0)=0$, 则有 $c=-a/(b-a)$, $\alpha(c)=\pi \cdot (-a/(b-a))$. 结合三角函数及反三角函数的和差公式 $\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \cdot \tan B}$ 及 $\arctan A \pm \arctan B = \arctan \frac{A \pm B}{1 \mp AB}$, 可得

$$\begin{aligned} M_{-a/(b-a)}^2(|x|) &= \frac{b-a}{\pi} \int_0^{\pi(-a/(b-a))} \frac{1-|x|^2}{1-2|x|\cos\varphi+|x|^2} d\varphi + a = \\ &= \frac{b-a}{\pi} \int_0^{\pi(-a/(b-a))} \frac{1-|x|^2}{(1-|x|)^2 \cos^2 \varphi/2 + (1+|x|)^2 \sin^2 \varphi/2} d\varphi + a = \\ &= \frac{2(b-a)}{\pi} \int_0^{\pi(-a/(b-a))} \frac{\frac{1+|x|}{1-|x|} \sec^2 \frac{\varphi}{2}}{1 + \left(\frac{1+|x|}{1-|x|} \tan \frac{\varphi}{2} \right)^2} d\frac{\varphi}{2} + a = \\ &= \frac{2(b-a)}{\pi} \arctan \left(\frac{1+|x|}{1-|x|} \tan \frac{\varphi}{2} \right) \Big|_0^{\pi(-a/(b-a))} + a = \\ &= \frac{2(b-a)}{\pi} \arctan \left(\frac{1+|x|}{1-|x|} \tan \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{-a}{b-a} \right) + a = \\ &= \frac{2(b-a)}{\pi} \arctan \left[\frac{1+|x|}{1-|x|} \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{b+a}{b-a} \right) \right] + a = \\ &= \frac{2(b-a)}{\pi} \left\{ \arctan \left[\frac{1+|x|}{1-|x|} \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{b+a}{b-a} \right) \right] - \frac{\pi}{4} \right\} + \frac{b+a}{2} = \\ &= \frac{2(b-a)}{\pi} \left[\arctan \left(\frac{1+|x|}{1-|x|} \frac{1 - \tan \frac{\pi}{4} \cdot \frac{b+a}{b-a}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \cdot \frac{b+a}{b-a}} \right) - \arctan 1 \right] + \frac{b+a}{2} = \\ &= \frac{2(b-a)}{\pi} \arctan \left(\frac{|x| - \tan \frac{\pi}{4} \cdot \frac{b+a}{b-a}}{1 - |x| \tan \frac{\pi}{4} \cdot \frac{b+a}{b-a}} \right) + \frac{b+a}{2}. \end{aligned}$$

同理计算可得

$$\begin{aligned} m_{-a/(b-a)}^2(|x|) &= \frac{b-a}{\pi} \int_{\pi-\pi(-a/(b-a))}^{\pi} \frac{1-|x|^2}{1-2|x|\cos\varphi+|x|^2} d\varphi + a = \\ &= \frac{2(b-a)}{\pi} \arctan \left(\frac{1+|x|}{1-|x|} \tan \frac{\varphi}{2} \right) \Big|_{\pi-\pi(-a/(b-a))}^{\pi} + a = \\ &= \frac{2(b-a)}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{1+|x|}{1-|x|} \tan \frac{\pi}{2} \cdot \frac{b}{b-a} \right) \right] + a = \\ &= b - \frac{2(b-a)}{\pi} \arctan \left(\frac{1+|x|}{1-|x|} \tan \frac{\pi}{2} \cdot \frac{b}{b-a} \right) = \\ &= \frac{b+a}{2} - \frac{2(b-a)}{\pi} \left[\arctan \left(\frac{1+|x|}{1-|x|} \tan \frac{\pi}{2} \cdot \frac{b}{b-a} \right) - \frac{\pi}{4} \right] = \\ &= \frac{b+a}{2} - \frac{2(b-a)}{\pi} \left\{ \arctan \left[\frac{1+|x|}{1-|x|} \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{b+a}{b-a} \right) \right] - \frac{\pi}{4} \right\} = \\ &= \frac{b+a}{2} - \frac{2(b-a)}{\pi} \left[\arctan \left(\frac{1+|x|}{1-|x|} \frac{1 + \tan \frac{\pi}{4} \cdot \frac{b+a}{b-a}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \cdot \frac{b+a}{b-a}} \right) - \arctan 1 \right] = \end{aligned}$$

$$\frac{b+a}{2} - \frac{2(b-a)}{\pi} \arctan \left(\frac{|x| + \tan \frac{\pi}{4} \cdot \frac{b+a}{b-a}}{1 + |x| \tan \frac{\pi}{4} \cdot \frac{b+a}{b-a}} \right).$$

定理 1 得出调和函数 $h(x)$ 的下界估计, 是对文献[3]的补充. 当 $b+a \leq 0$ 时, 即 $\tan \frac{\pi}{4} \cdot \frac{b+a}{b-a} \leq 0$, 定理 1 所得的结论与文献[3]中引理 1.1 所得结论一致. 即

$$h(x) \leq \frac{2(b-a)}{\pi} \arctan \left(\frac{|x| + \tan \frac{\pi}{4} \cdot \frac{b+a}{b-a}}{1 + |x| \tan \frac{\pi}{4} \cdot \frac{b+a}{b-a}} \right) + \frac{b+a}{2}.$$

但当 $b+a > 0$ 时, $\tan \frac{\pi}{4} \cdot \frac{b+a}{b-a} > 0$, 结论为

$$h(x) \leq \frac{2(b-a)}{\pi} \arctan \left(\frac{|x| - \tan \frac{\pi}{4} \cdot \frac{b+a}{b-a}}{1 - |x| \tan \frac{\pi}{4} \cdot \frac{b+a}{b-a}} \right) + \frac{b+a}{2}.$$

而文献[2]中所得结论为

$$h(x) \leq \frac{2(b-a)}{\pi} \arctan \left(\frac{|x| + \tan \frac{\pi}{4} \cdot \frac{b+a}{b-a}}{1 + |x| \tan \frac{\pi}{4} \cdot \frac{b+a}{b-a}} \right) + \frac{b+a}{2}.$$

由于当 $b+a > 0$ 时, $\frac{|x| - \tan \frac{\pi}{4} \cdot \frac{b+a}{b-a}}{1 - |x| \tan \frac{\pi}{4} \cdot \frac{b+a}{b-a}} \leq \frac{|x| + \tan \frac{\pi}{4} \cdot \frac{b+a}{b-a}}{1 + |x| \tan \frac{\pi}{4} \cdot \frac{b+a}{b-a}}$, 因此, 定理 1 所得结论是对文献[3]的改进.

参考文献:

[1] AXLER S, BOURDON P, RAMEY W. Harmonic function theory[M]. New York: Springer Verlag, 2000.

[2] HEINZ E. On one-to-one harmonic mappings[J]. Pac J Math, 1959, 9(1): 101-105.

[3] PARTYKA D, SAKAN K. On a variant of Heinz's inequality for harmonic mappings of the unit disk onto bounded convex domains[J]. Bull Soc Sci Lett, 2009, 52(2): 25-36.

[4] DUREN P. Harmonic mappings in the plane[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004: 75-77.

[5] PARTYKA D, SAKAN K. Three variants of Schwarz lemma for harmonic mappings[J]. Bull Soc Lett, 2006, 51(2): 27-34.

[6] PARTYKA D, SAKAN K. Quasiconformal and Lipschitz harmonic mappings of the unit disk onto bounded convex domains[J]. Anna Acad Scie Fenn Math, 2014, 39(2): 811-830.

[7] KALAJ D. Schwarz lemma for harmonic mappings in the unit ball[J]. Proc Amer Math Soc, 2010, 140(1): 161-166.

[8] PAVLOVIC M. A Schwarz lemma for the modulus of a vector-valued analytic function[J]. Proc Amer Math Soc, 2011, 139(3): 969-973.

[9] KALAJ D, VUORINEN M. On harmonic functions and the Schwarz lemma[J]. Proc Amer Math Soc, 2010, 140(1): 161-166.

[10] BURGETH B. A Schwarz Lemma for harmonic and hyperbolic-harmonic functions in higher dimensions[J]. Manu Math, 1992, 77(1): 283-291.

[11] DUREN P. Theory of space[M]. New York: Dover Publications, 2000.

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 黄心中)