

doi: 10.11830/ISSN.1000-5013.201703080



利用奇异值分解的二阶递归系统 数值稳定性方法

付波, 刘济源, 赵熙临, 徐光辉, 王子鹏

(湖北工业大学 电气与电子工程学院, 湖北 武汉 430068)

摘要: 为了简便地解决二阶递归系统的稳定性问题, 将二阶递归系统转变为二阶离散时变线性系统, 并讨论递归系统的稳定性. 在二阶离散线性时变系统稳定性分析的基础上, 利用奇异值分解(SVD), 将其转化为参考信号(RS)系统. 提出一个新的离散时变线性系统不稳定性的充分条件, 并以离散正交 Krawtchouk 多项式与 Jacobsthal 数列递归式为主, 讨论并推导出其在 II, IV 象限上的变化情况和新的不稳定性判据. 仿真结果验证了结论的准确性.

关键词: Krawtchouk 多项式; Jacobsthal 数列; 奇异值分解; 递归系统; 线性离散时变系统

中图分类号: TP 391 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5013(2017)06-0886-06

Numerical Stability Method of Second Order Recursive System Using Singular Value Decomposition

FU Bo, LIU Jiyuan, ZHAO Xilin, XU Guanghui, WANG Zipeng

(School of Electrical and Electronic Engineering, Hubei University of Technology, Wuhan 430068, China)

Abstract: In order to solve the problem of stability of second order recursive systems simply, the second order recursive system is transformed into second order discrete time-varying linear system and the stability of recursive system is discussed. Based on the stability analysis of second-order discrete linear time-varying systems, converting it into a reference signal (RS) system by singular value decomposition (SVD). Based on discrete orthogonal Krawtchouk polynomials and the Jacobsthal series, a new sufficient condition for discrete time-varying linear instability is proposed. The changes and new instability codes in the second and fourth quadrants are discussed and deduced. The simulation results verify the conclusion accuracy.

Keywords: Krawtchouk polynomials; Jacobsthal sequences; singular value decomposition; recursive systems; linear discrete time-varying systems

递归是一种利用简单操作实现复杂运算的有效方法, 即通过简单的问题来解决复杂的问题^[1]. 其表现形式较典型的是二阶递归, 即数列的某一项是由其前两项计算所得^[2-3]. Legendre 多项式、Chebyshev 多项式、Jacobi 多项式、Hermite 多项式、Tchebichef 多项式和 Krawtchouk 多项式等经典正交多项式^[4-6]在图像正交矩、曲线拟合、非线性电路计算, 以及计算结构可靠性分析等技术都有应用^[7-8]. 但由于正交多项式解析式过于复杂, 所以在实际应用中一般采用其递归式求解多项式的值. Mukundan 等^[9]发

收稿日期: 2017-03-30

通信作者: 付波(1973-), 男, 教授, 博士, 主要从事图像处理与模式识别的研究. E-mail: fubofanxx@mail.hbust.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61072130, 51309094, 61603127); 国家教育部留学回国人员科研启动基金资助项目(20141685); 湖北省科技厅重大科技专项项目(2013AE001)

现正交多项式的二阶递归运算有可能导致数值发散, Gautschi^[10-11] 讨论了离散正交多项式的递归收敛性, 关轶峰等^[12] 针对二阶离散线性时变系统的稳定性也做了大量研究. 由于离散多项式不存在离散误差, 其精度与高阶数值的传递有关, 随着阶数的增大, 多项式的数值和误差的增大更导致其不稳定, 从而影响图像重构的精确性. Mukundan^[13] 利用 x 循环代替了 n 循环, 同时, 在一定程度上找到了高阶多项式的误差传递, 解决了多项式高精度的算法问题. 张海艳等^[14] 在图像分割、重构的问题上利用算法的稳定性, 提出了概率密度函数在生物信息学上的研究. 本文在二阶离散线性时变系统稳定性分析的基础上, 利用奇异值分解 (singular value decomposition, SVD) 方法将其转化为参考信号 (reference signal, RS) 系统, 提出一个新的离散时变线性系统不稳定性的充分条件, 并通过实验验证其结果.

1 递归系统数值稳定性

1.1 稳定性定义

系统 $\dot{x}=f(x, t), x(t_0)=x_0$ 在时刻 t_0 存在初始状态 $x(t_0)=x_0$, 其中, x 是 n 维状态向量. 若对所有 $t \geq 0$, 满足 $f(x_e, t) \equiv 0$, 则称 x_e 是一个平衡点.

设系统初始状态 x_0 位于以平衡状态 x_e 为球心, 半径为 ϵ 的球域 $H(\epsilon)$ 内. 如果对所考虑的整个时间区间内, 从 $H(\epsilon)$ 内任一点 x_0 出发的受扰运动 $\varphi(t, x_0, x_e)$ 的轨迹都不超出 $H(\epsilon)$, 则称 $x_e=0$ 在李雅普诺夫下稳定, 如图 1(a) 所示. 对某个 $\epsilon > 0$, 在所有半径为 τ 的球域 $H(\tau)$ 内的初始状态, 至少存在一个初始状态, 使得从它出发的解始终不会限制在以 ϵ 为半径的球域 $H(\epsilon)$ 里, 则称平衡点在 t_0 是不稳定的, 如图 1(b) 所示.

1.2 正交多项式

在矩函数集合中, 分为连续正交多项式与离散正交多项式. Krawtchouk 多项式是一种常见的离散正交多项式, 更适合于对数字图像的处理. n 阶 Krawtchouk 多项式的定义为

$$K_n(x, p, n) = \sum_{k=0}^N a_{k, n, p} x^k = {}_2F_1(-n, -x, -N; \frac{1}{p}). \tag{1}$$

式(1)中: $x, n=0, 1, 2, \cdots, N, N>0; p \in (0, 1); {}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k b_k z^k}{c_k k!}; a_k = a(a+1) \cdots (a+(k-1)) = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}.$

通过给出 0, 1 阶, 两个 Krawtchouk 多项式为 $K_0(x, p, N)=1, K_1(x, p, N)=1 - [\frac{1}{Np}]x$. 由此可推导 $t_n(x)$ 具有递推公式为

$$K_n(x, p, N) = \frac{Np - 2(n-1)p + n - 1 - x}{p(N+1-n)} \cdot K_{n-1}(x, p, N) - \frac{(n-1)(1-p)}{p(N+1-n)} K_{n-2}(x, p, N). \tag{2}$$

2 二阶递归系统的 SVD 模型

2.1 SVD 方法

设 2×2 矩阵 $G \in \mathbb{C}^{2 \times 2}, \mathbb{C}$ 为复数集, $\text{Rank } G=2$, 则存在 2 阶酉矩阵 U 和 2 阶酉矩阵 V , 使得

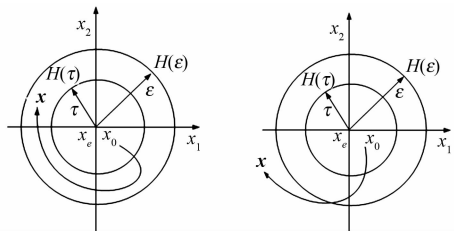
$$G = U \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} V^T. \tag{3}$$

式(3)中: $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2)$, 且 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0$, 而 $\sigma_i (i=1, 2, \cdots)$ 为矩阵 G 的正奇异值.

对状态矩阵 $G(t)$ 做 SVD 分解, 可得 $G(t) = U(t)S(t)V(t)^T$. 将 $U(t), V(t)$ 设定为单位旋转矩阵, 又因为 $X(t) = G(t)X(t-1)$, 则有

$$X(t) = U(t)S(t)V(t)^T X(t-1). \tag{4}$$

将式(4)展开可得



(a) 稳定 (b) 不稳定

图 1 递归系统的稳定性状态

Fig. 1 Stability states of recursive systems

$$\mathbf{X}(t)=\mathbf{U}(t)\mathbf{S}(t)[\mathbf{V}(t)^{\mathrm{T}}\mathbf{U}(t-1)]\mathbf{S}(t-1)\cdots[\mathbf{V}(3)^{\mathrm{T}}\mathbf{U}(2)]\mathbf{S}(2)\mathbf{V}(1)^{\mathrm{T}}\mathbf{X}(1), \tag{5}$$

重新定义 $\mathbf{Y}(t)=\mathbf{X}(t)$, $\mathbf{R}(t)=\mathbf{U}(t)$ 及 $\mathbf{R}(t-1)=[\mathbf{V}(t)^{\mathrm{T}}\mathbf{U}(t-1)]$, $\mathbf{Y}(1)=\mathbf{V}(1)^{\mathrm{T}}\mathbf{X}(1)$, 可得

$$\mathbf{Y}(t)=\mathbf{R}(t)\mathbf{S}(t)\mathbf{R}(t-1)\mathbf{S}(t-1)\cdots\mathbf{R}(2)\mathbf{S}(2)\mathbf{Y}(1). \tag{6}$$

令 $\mathbf{D}(t)=\mathbf{R}(t)\mathbf{S}(t)$, 则式(6)改写为

$$\mathbf{Y}(t)=\mathbf{D}(t)\mathbf{Y}(t-1). \tag{7}$$

式(7)中: $\mathbf{R}(t)$ 为单位旋转矩阵, $\mathbf{R}(t)=\begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) \end{bmatrix}$, 逆时针旋转角度为正; $\mathbf{S}(t)$ 为对角

阵, $\mathbf{S}(t)=\begin{bmatrix} \sigma_1(t) & 0 \\ 0 & \sigma_2(t) \end{bmatrix}$, 其中, $\sigma_1(t)\geq\sigma_2(t)>0$, $\sigma_i(i=1,2,3,\cdots,r)$ 为矩阵 $\mathbf{G}(t)$ 的正奇异值.

2.2 RS 系统的 II, IV 象限稳定性分析

2.2.1 II, IV 象限状态变化 对于一个二阶离散线性系统

$$\mathbf{Y}(k)=\mathbf{D}(k)\mathbf{D}(k-1)\cdots\mathbf{D}(2)\mathbf{Y}(1), \quad k=2,3,4,\cdots. \tag{8}$$

在第 II 象限的初始相量, 当 $\sigma_1(k)>\sigma_2(k)$, $\sigma_2(k)<1$, $\sigma_1(k)>1$, 且 $\pi/2<\theta(k)<\pi$, 初始点位于 II 象限时, 建立一个点经过一次 RS 变换后, 角度与其反向角度的差值运动方程为

$$f(\kappa(k))=\chi(k)-(\pi+a\cdot\tan(\kappa(k))). \tag{9}$$

令 $f(\kappa(k))=0$, 可得

$$\kappa(k)^2\tan(\theta(k))\mu(k)-\kappa(k)(1-\mu(k))+a\cdot\tan(\theta(k))=0, \quad \mu(k)=\frac{\delta_2(k)}{\delta_1(k)}. \tag{10}$$

由此, 特征根方程为

$$\Delta=\left(1-\frac{\delta_2(k)}{\delta_1(k)}\right)^2-4(\tan(\theta(k)))^2\frac{\delta_2(k)}{\delta_1(k)}. \tag{11}$$

当 $\Delta<0$ 时, 有 $a\cdot\tan\left[\frac{1-\mu(k)}{2\sqrt{\mu(k)}}\right]<\theta(k)<\pi-a\cdot\tan\left[\frac{1-\mu(k)}{2\sqrt{\mu(k)}}\right]$, 则 $f(\kappa(k))=0$ 没有实数解, 由此可知, $\mathbf{R}(k)\mathbf{S}(k)$ 变换下不能留在 II 象限; 若 $\Delta>0$ 时, 可得两个实数解为

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1(k) &= \frac{\cot(\theta(k))}{2\mu(k)} \left[(1-\mu(k)) + \sqrt{(1-\mu(k))^2 - \frac{4\mu(k)}{\cot^2(\theta(k))}} \right], \\ \kappa_2(k) &= \frac{\cot(\theta(k))}{2\mu(k)} \left[(1-\mu(k)) - \sqrt{(1-\mu(k))^2 - \frac{4\mu(k)}{\cot^2(\theta(k))}} \right]. \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

由此可得 $\kappa_1(k)<\kappa_2(k)<0$, 且 $\frac{1-\mu(k)}{2\sqrt{\mu(k)}}\leq\tan(\theta(k))<0$.

若能得斜率 $\kappa(k)$ 经一个 $\mathbf{R}(k)\mathbf{S}(k)$ 变化后, 斜率为 $\kappa(k+1)$ 且位于第 IV 象限的 $(-\infty, \kappa^*(k+1))$ 之间; 而经一次 $\mathbf{R}(k+1)\mathbf{S}(k+1)$ 变化后, 斜率为 $\kappa(k+2)$ 且位于第 II 象限的 $(-\infty, \kappa_1(k+2))$ 之间, 即

$$\left. \begin{aligned} \kappa^*(k) &= \frac{\sigma_1(k)}{\sigma_2(k)}\cot(\theta(k)), \\ \kappa_1(k) &= \frac{\cot(\theta(k))}{2\mu(k)} \left[(1-\mu(k)) + \sqrt{(1-\mu(k))^2 - \frac{4\mu(k)}{\cot^2(\theta(k))}} \right]. \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

2.2.2 IV 象限状态变化 对一个二阶离散线性 RS 系统 $\mathbf{Y}(k)=\mathbf{D}(k)\mathbf{D}(k-1)\cdots\mathbf{D}(2)\mathbf{Y}(1)$, 其中, $k=2,3,4,\cdots$ 在第 II 象限的初始相量. 已知 $\sigma_1(k)>\sigma_2(k)$, $\sigma_2(k)<1$, $\sigma_1(k)>1$, 初始点位于 II 象限, 则当满足 $0<\theta_{\max}(k)\leq\theta(k)$, $0<\kappa_2(k)<\kappa'(k)$, $\frac{\sigma_1(k)^2+\sigma_2(k)^2\kappa_2(k)^2}{1+\kappa_2(k)^2}>1$. 其中, $\mu(k)=\frac{\sigma_2(k)}{\sigma_1(k)}$, $\kappa'(k)=$

$\sqrt{\frac{\sigma_1(k)^2-1}{1-\sigma_2(k)^2}}$, $\theta_{\max}(k)=a\cdot\tan\left[\frac{1}{2}(1-\mu(k))\sqrt{\frac{\sigma_1(k)}{\sigma_2(k)}}\right]$, 有

$$\kappa_2(k)=\frac{\cot(\theta(k))}{2\mu(k)}\left[(1-\mu(k))-\sqrt{(1-\mu(k))^2-\frac{4\mu(k)}{\cot^2(\theta(k))}}\right]. \tag{14}$$

则可得该 RS 系统是不稳定的.

3 实验验证

3.1 Krawtchouk 多项式递归式稳定性分析

Krawtchouk 多项式的三项递归迭代公式为

$$K_k(x, p, N) = A_x(k)K_{(k-1)}(x, p, N) - B(k)K_{(k-1)}(x, p, N). \tag{15}$$

式(15)中: $K_0(x, p, N) = 1$; $K_1(x, p, N) = 1 - \frac{x}{Np}$; $A_x(k) = \frac{Np - 2(k-1)p + k - 1 - x}{p(N+1-k)}$; $B(k) = \frac{(k-1)(1-p)}{p(N+1-k)}$.

在 $x=390, p=0.1, 0.3, 0.9$ 情况下, 将 Krawtchouk 多项式整理为离散线性时变系统, 其状态矩阵分解为两个旋转矩阵和一个斜变换, 经 SVD 分解后可得:

- 1) 一系列 $\mathbf{R}(k)$ 旋转角度 $\theta(k)$ 和 $\theta_{\max}(k) = \pi - \tan^{-1} \left[\frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{\delta_1(k)}{\delta_2(k)} \right) \sqrt{\frac{\delta_2(k)}{\delta_1(k)}} \right]$;
- 2) 对角阵 $\mathbf{S}(k)$ 的主对角线参数 $\sigma_1(k), \sigma_2(k)$;
- 3) $\kappa^*(k) = \frac{\sigma_1(k)}{\sigma_2(k)} \cdot \cos(\theta(k))$;
- 4) $\kappa_1(k) = \frac{\cot(\theta(k))}{2\theta(k)} \{ (1-\mu(k)) + [(1-\mu(k))^2 - \frac{4\mu(k)}{\cot^2(\theta(k))}]^{1/2} \}$.

RS 系统在 II, IV 象限跳变发散, 如图 2 所示. 各个 SVD 分解后的数值, 如图 3 所示.

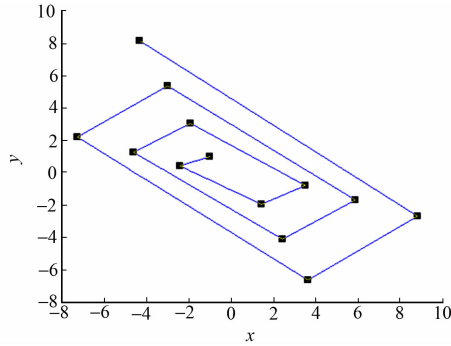


图 2 Krawtchouk 的 RS 系统在 II, IV 象限跳变发散情况
Fig. 2 RS Krawtchouk system jumps in II, IV quadrants

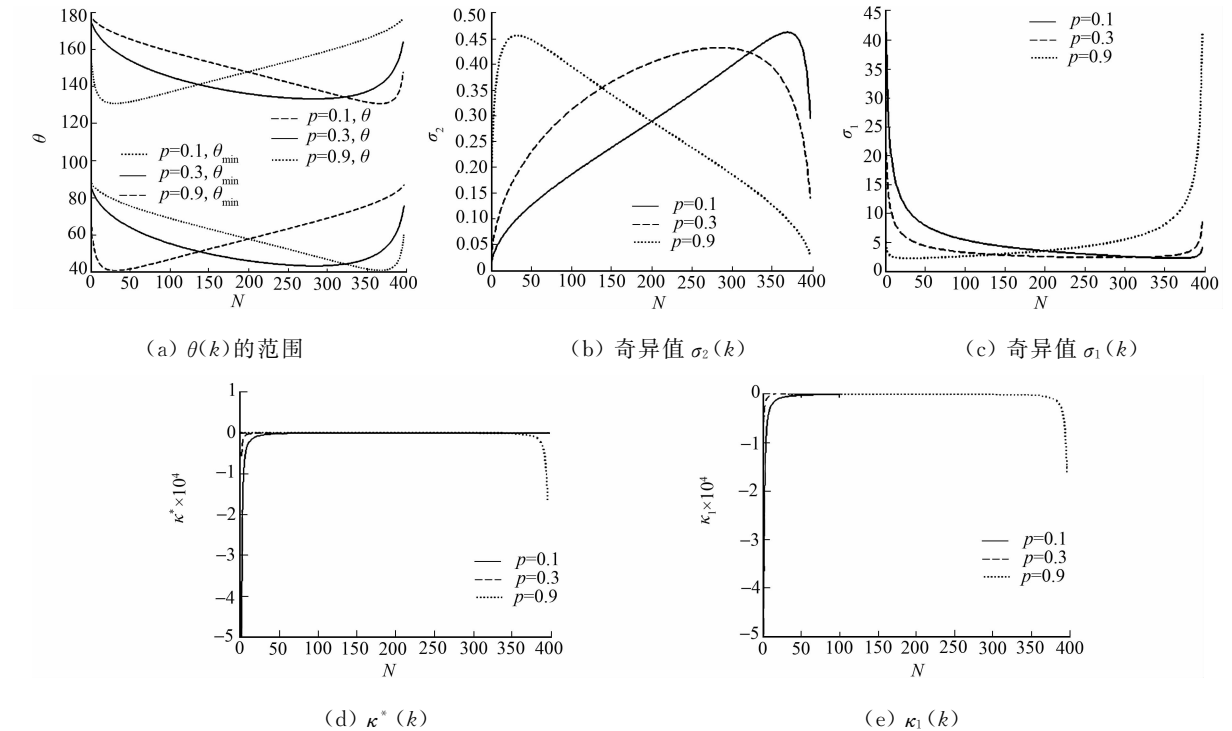


图 3 Krawtchouk 的 RS 系统参数计算值
Fig. 3 Krawtchouk's RS system parameters calculated value

3.2 Jacobsthal 数列递归式稳定性分析

Jacobsthal 数列的三项递归迭代公式为

$$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}, \quad J_0 = 0, \quad J_1 = 1. \tag{16}$$

在 $x=0.7, N=400$ 的情况下,将 Krawtchouk 多项式整理为离散线性时变系统,其状态矩阵分解为两个旋转矩阵和一个斜变换,经 SVD 分解后可得

- 1) $\mathbf{R}(k)$ 旋转角度 $\theta(k)$ 和 $\theta_{\max}(k)=a \cdot \tan\left[\frac{1}{2}(1-\mu(k)) \times \sqrt{\frac{\sigma_1(k)}{\sigma_2(k)}}\right]$;
- 2) 对角阵 $\mathbf{S}(k)$ 的主对角线参数 $\sigma_1(k), \sigma_2(k)$;
- 3) $\kappa'(k)=\frac{\sigma_1(k)^2-1}{1-\sigma_2(k)^2}$;
- 4) $\kappa_1(k)=\frac{\cot(\theta(k))}{2\theta(k)}\{(1-\mu(k))-\left[(1-\mu(k))^2-\frac{4\mu(k)}{\cot^2(\theta(k))}\right]^{1/2}\}$.

RS 系统在 II 象限发散,如图 4 所示. 各个 SVD 分解后的数值,如图 5 所示.

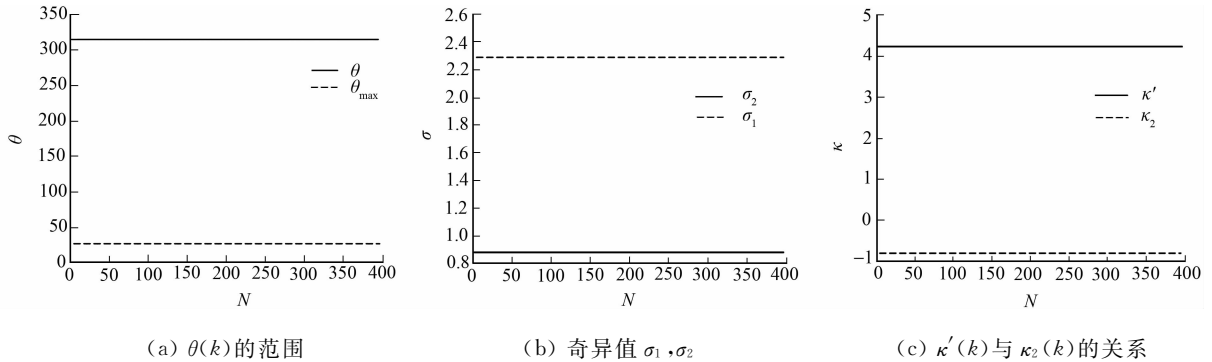
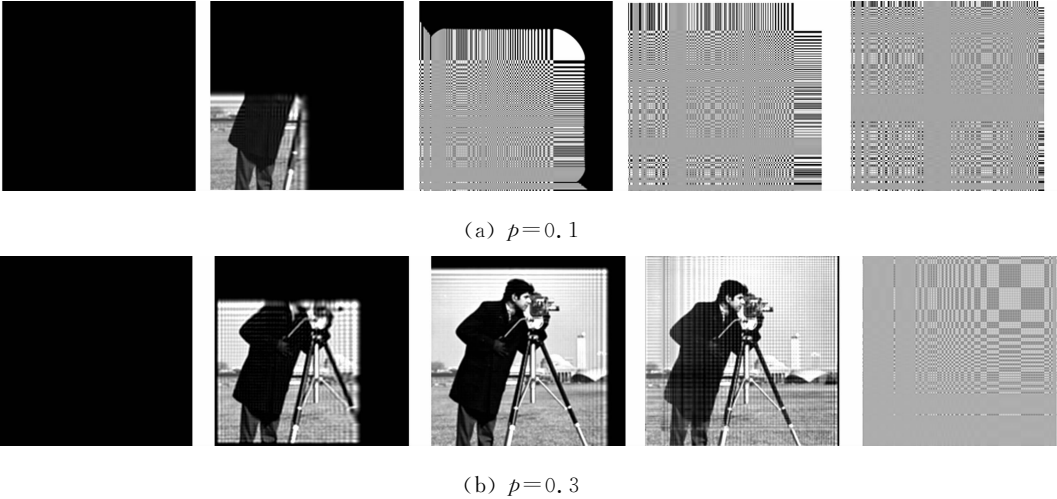


图 5 Jacobsthal 的 RS 系统参数计算值

Fig. 5 Jacobsthal's RS system parameters calculated value

4 Krawtchouk 多项式图像重构

结合前面的实验分析,在 $x=390, p=0.1, 0.3, 0.9$ 的情况下,Krawtchouk 多项式重构的图像,如图 6 所示. 由图 6 可知:当 $p=0.1$ 时,Krawtchouk 多项式的递归计算误差已经增大,只能重构图像的部分;当 $p=0.3$ 时,误差依旧很大,导致也只能重构部分的图像;当 $p=0.5$ 时,Krawtchouk 多项式递归计算的误差慢慢减小,重构的效果慢慢变好;随着阶数的增加,当 $p=0.9$ 时,重构图像效果与 $p=0.1$ 和 $p=0.3$ 的图基本一样.





(c) $p=0.5$

图 6 不同 p 值的 Krawtchouk 多项式图像重构

Fig. 6 Image reconstruction of Krawtchouk polynomials with different p values

根据图像评价标准,分别作出 Krawtchouk 的 p 值(K_p)为 0.1, 0.3,0.5 的峰值信噪比($R_{PSN}=10\cdot\log(255^2/MSE)$,MSE 为均方差),其值越高说明重构图像效果越好,如图 7 所示.由图 7 可知: Krawtchouk 多项式的峰值信噪比随着阶数的增加而增加,到一定程度时,其值迅速下降.说明高阶的时候其误差是变大的导致其发散,验证了 Krawtchouk 正交多项式在 II,IV 象限发散的情况.

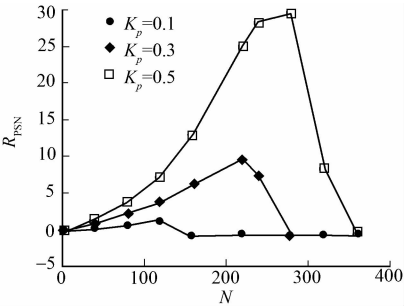


图 7 Krawtchouk 峰值信噪比

Fig. 7 Krawtchouk peak signal to noise ratio

5 结束语

分析和研究离散时变线性系统,将系统的状态矩阵进行奇异值分解,得到新的等效状态方程.通过分析 Krawtchouk 正交多项式与 Jacobsthal 数列递归式,计算时,通过不同的判据,说明了 Krawtchouk 矩阵在 II,IV 象限跳变的原因,也说明了 Jacobsthal 数列在第 II 象限发散的原因.所进行的只是初步讨论了 II,IV 象限的情况,其他象限情况还有待进一步研究.

参考文献:

[1] 王宏伟,赵国庆.递归算法的参数设置[J].电波科学学报,2010,25(6):1187-1192,1234.

[2] 鞠宪龙.二阶对角递归神经网络的算法研究及应用[D].哈尔滨:哈尔滨工程大学,2011.

[3] 赵坚.一般二阶线性常系数齐次递归方程在数论中的应用[J].哈尔滨工业大学学报,2000,32(6):132-135.

[4] YAP P T,PARMMESRAN R,ONG S H. Image analysis by Krawtchouk moments[J]. IEEE Transactions on Image Processing,2003,12(11):1367-1377.

[5] 龙爱芳,胡军浩.基于 Hermite 插值的高精度数值积分公式[J].华侨大学学报(自然科学版),2013,34(3):349-352. DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.2013.03.0349.

[6] 田萌,王文剑.基于正交多项式的核函数性质研究[J].模式识别与人工能,2014,27(5):385-393.

[7] 李炳坤.切比雪夫逼近多项式在非线性电路中的应用[J].华侨大学学报(自然科学版),1992,13(4):558-562. DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.1992.04.0558.

[8] 宫凤强,李夕兵.基于 Legendre 正交多项式逼近法的结构可靠性分析[J].工程力学,2008,25(6):225-229.

[9] MUKUNDAN R,ONG S H,LEE P A. Image analysis by tchebichef moments[J]. IEEE Transactions on Image Processing a Publication of the IEEE Signal Processing Society,2001,10(9):1357-1364. DOI:10.1109/83.941859.

[10] GAUTSCHI W. Computational aspects of three-term recurrence relations[J]. Siam Review,1967,9(1):24-82.

[11] GAUTSCHI W. Is the recurrence relation for orthogonal polynomials always stable? [J]. BIT,1993,33(2):277-284. DOI:10.1007/BF01989750.

[12] 关铁峰,李铁寿.二阶离散线性时变系统的一种稳定性判据[J].计算技术与自动化,2003,22(4):12-15.

[13] MUKUNDAN R. A comparative analysis of radial-tchebichef moments and zernike moments[C]//Procedings of the British Machine Vision Conference. London:BMVA Press,2009:16(1-7). DOI:10.5244/C.23.16.

[14] 张海艳,高尚兵.图像分割中改进空间约束贝叶斯网络模型的应用[J].计算机应用,2017,37(3):823-826,831. DOI:10.11772/j.issn.1001-9081.2017.03.823.