第 38 卷　第 4 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 38　No. 4
2017 年 7 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Jul. 2017

doi:10.11830/ISSN.1000-5013.201704026

耦合 Burgers 方程的 Darboux 变换及精确解

吴丽华，赵倩

(华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021)

摘要： 通过引入与耦合 Burgers 方程相联系的 3×3 矩阵谱问题的规范变换，构造出耦合 Burgers 方程的一个 Darboux 变换，并由此得到了它的一些精确解.

关键词： 耦合 Burgers 方程；规范变换；Darboux 变换；精确解

中图分类号： O 175　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000-5013(2017)04-0585-06

Darboux Transformation and Exact Solutions to Coupled Burgers Equation

WU Lihua, ZHAO Qian

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: A Darboux transformation of the coupled Burgers equation is constructed with the help of the gauge transformation of the associated 3×3 matrix spectral problems, from which we obtain some exact solutions of the coupled Burgers equation.

Keywords: coupled Burgers equation; gauge transformation; Darboux transformation; exact solutions

孤子理论不仅在水波，而且在等离子体、固体物理、光学、医学等领域都有广泛的应用. 随着研究的深入，涌现了很多经典求解孤子方程的方法，如反散射变换[1-2]、Hirota 双线性方法[3]、Painlevé 分析[4-5]、代数几何法[6-7]、Darboux 变换[8-9]等. 其中，Darboux 变换是最有效、直接的求解方法之一. 通过考虑一个 3×3 矩阵谱问题，Geng 等[10]发现了一个新的耦合 Burgers 方程，即

$$\left.\begin{aligned} q_t &= q_{xx} - 2qq_x + 2(vr)_x + 2u_x, \\ r_t &= -r_{xx} - 2qr_x, \\ u_t &= u_{xx} - 2(uq)_x, \\ v_t &= v_{xx} - 2(vq)_x. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

并建立了它的 bi-Hamiltonian 结构. 当 $u=v=r=0$ 时，方程(1)可约化为经典的 Burgers 方程. 本文主要构造耦合 Burgers 方程(1)的 Darboux 变换，并讨论它的精确解.

1　耦合 Burgers 方程的 Darboux 变换

考虑与耦合 Burgers 方程相联系的 3×3 矩阵谱问题，即

收稿日期： 2016-11-22

通信作者： 吴丽华(1983-)，女，副教授，博士，主要从事孤立子与可积系统的研究. E-mail:wulihua@hqu.edu.cn.

基金项目： 国家自然科学基金资助项目(11401230)；福建省高校杰出青年科研人才培育计划项目(2015 年度)；华侨大学中青年教师科技创新资助计划(ZQN-PY301)

$$\boldsymbol{\psi}_x=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\psi},\qquad \boldsymbol{\psi}=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}\lambda+q & u & v\\ 1 & 0 & 0\\ r & 0 & 0\end{pmatrix},\tag{2}$$

及辅谱问题

$$\boldsymbol{\psi}_t=\boldsymbol{V}\boldsymbol{\psi},\qquad \boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}\lambda^2+vr+u-q^2-q_x & u\lambda+u_x-uq & v\lambda+v_x-vq\\ \lambda-q & u & v\\ r\lambda-r_x-qr & ur & vr\end{pmatrix}.\tag{3}$$

式(2),(3)中:q,r,u,v 是4个位势;λ 是常数谱参数.直接计算可知,零曲率方程 $\boldsymbol{U}_t-\boldsymbol{V}_x+[\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}]=\boldsymbol{0}$ 可导出耦合 Burgers 方程(1).

引入谱问题(2),(3)的一个规范变换,即

$$\hat{\boldsymbol{\psi}}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{\psi},\qquad \boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}a\lambda+ab_{1,1} & ab_{1,2} & ab_{1,3}\\ a-1 & \lambda b_{2,2} & b_{2,3}\\ b_{3,1} & b_{3,2} & \lambda+b_{3,3}\end{pmatrix}.\tag{4}$$

式(4)中的 a 和 $b_{i,j}(i,j=1,2,3)$ 将在下文定出.

显然,矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的行列式 $\det\boldsymbol{T}$ 是关于 λ 的三次多项式.令 $\lambda_j(j=1,2,3)$ 为3个任意给定的常数且为行列式 $\det\boldsymbol{T}$ 的根.于是,

$$\det\boldsymbol{T}=a\prod_{j=1}^{3}(\lambda-\lambda_j).\tag{5}$$

假设 $\boldsymbol{\phi}^{(l)}=(\phi_1^{(l)},\phi_2^{(l)},\phi_3^{(l)})^{\mathrm{T}}(l=1,2,3)$ 是式(2),(3)的3个线性无关解.易知,当 $\lambda=\lambda_j(j=1,2,3)$ 时,矩阵 $(\hat{\boldsymbol{\phi}}^{(1)},\hat{\boldsymbol{\phi}}^{(2)},\hat{\boldsymbol{\phi}}^{(3)})=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\phi}^{(1)},\boldsymbol{\phi}^{(2)},\boldsymbol{\phi}^{(3)})$ 的列向量是线性相关的,故存在常数 $\gamma_j^{(l)}(j=1,2,3,l=1,2)$,满足

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}^{(1)}(\lambda_j)+\gamma_j^{(1)}\hat{\boldsymbol{\phi}}^{(2)}(\lambda_j)+\gamma_j^{(2)}\hat{\boldsymbol{\phi}}^{(3)}(\lambda_j)=\boldsymbol{0}.\tag{6}$$

方程(6)可改写为

$$\left.\begin{aligned}&\lambda_j+b_{1,1}+\alpha_j^{(1)}b_{1,2}+\alpha_j^{(2)}b_{1,3}=0,\\ &a-1+\alpha_j^{(1)}(\lambda_j+b_{2,2})+\alpha_j^{(2)}b_{2,3}=0,\\ &b_{3,1}+\alpha_j^{(1)}b_{3,2}+\alpha_j^{(2)}(\lambda_j+b_{3,3})=0.\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

式(7)中:$\alpha_j^{(1)}=\dfrac{\phi_2^{(1)}(\lambda_j)+\gamma_j^{(1)}\phi_2^{(2)}(\lambda_j)+\gamma_j^{(2)}\phi_2^{(3)}(\lambda_j)}{\phi_1^{(1)}(\lambda_j)+\gamma_j^{(1)}\phi_1^{(2)}(\lambda_j)+\gamma_j^{(2)}\phi_1^{(3)}(\lambda_j)}$,$\alpha_j^{(2)}=\dfrac{\phi_3^{(1)}(\lambda_j)+\gamma_j^{(1)}\phi_3^{(2)}(\lambda_j)+\gamma_j^{(2)}\phi_3^{(3)}(\lambda_j)}{\phi_1^{(1)}(\lambda_j)+\gamma_j^{(1)}\phi_1^{(2)}(\lambda_j)+\gamma_j^{(2)}\phi_1^{(3)}(\lambda_j)}$,$j=1,2,3$.适当地选择 λ_j 和 $\gamma_j^{(l)}(j=1,2,3;l=1,2)$,并应用 Cramer 法则,$a$ 和 $b_{i,j}$ 可由线性系统(7)唯一确定.

在规范变换(4)下,当 $\lambda\neq\lambda_j(j=1,2,3)$ 时,式(2),(3)变换成关于 $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ 的谱问题,即

$$\hat{\boldsymbol{\psi}}_x=\hat{\boldsymbol{U}}\hat{\boldsymbol{\psi}},\qquad \hat{\boldsymbol{\psi}}_t=\hat{\boldsymbol{V}}\hat{\boldsymbol{\psi}}.\tag{8}$$

其中,有

$$\hat{\boldsymbol{U}}=(\boldsymbol{T}_x+\boldsymbol{T}\boldsymbol{U})\boldsymbol{T}^{-1},\qquad \hat{\boldsymbol{V}}=(\boldsymbol{T}_t+\boldsymbol{T}\boldsymbol{V})\boldsymbol{T}^{-1}.\tag{9}$$

可以证明 $\lambda=\lambda_j(j=1,2,3)$ 是 $\hat{\boldsymbol{U}},\hat{\boldsymbol{V}}$ 的可去孤立奇点.因此,通过解析开拓,$\hat{\boldsymbol{U}},\hat{\boldsymbol{V}}$ 对所有 λ 均有定义.

定理1 由式(9)定义的矩阵 $\hat{\boldsymbol{U}},\hat{\boldsymbol{V}}$ 分别与矩阵 $\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}$ 有相同的形式,其中,旧的位势 q,r,u,v 转化为新的位势,即

$$\hat{q}=q+(\ln a)_x,\qquad \hat{r}=\frac{r+b_{3,1}}{a},\qquad \hat{u}=a(u-b_{1,2}),\qquad \hat{v}=a(v-b_{1,3}).\tag{10}$$

变换(10)称为耦合 Burgers 方程(1)的一个 Darboux 变换.

证明 令 $\boldsymbol{Y}(\lambda_j)=(\boldsymbol{\phi}^{(1)}(\lambda_j),\boldsymbol{\phi}^{(2)}(\lambda_j),\boldsymbol{\phi}^{(3)}(\lambda_j))\begin{pmatrix}\gamma_j^{(1)}\\ \gamma_j^{(2)}\\ \gamma_j^{(3)}\end{pmatrix}$,则式(7)可以改写为

$$\boldsymbol{T}(\lambda_j)\boldsymbol{Y}(\lambda_j)=\boldsymbol{0},\qquad j=1,2,3.\tag{11}$$

对式(11)关于 x 求导,并联立式(11),可得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{T}_x(\lambda_j) + \boldsymbol{T}(\lambda_j)\boldsymbol{U}(\lambda_j) \\ \boldsymbol{T}(\lambda_j) \end{pmatrix} \boldsymbol{Y}(\lambda_j) = \boldsymbol{0}. \tag{12}$$

由于$\boldsymbol{Y}(\lambda_j)$为式(12)的一个非零解，所以矩阵$\begin{pmatrix} \boldsymbol{T}_x(\lambda_j) + \boldsymbol{T}(\lambda_j)\boldsymbol{U}(\lambda_j) \\ \boldsymbol{T}(\lambda_j) \end{pmatrix}$的秩不超过 2. 直接计算，有

$$(\boldsymbol{T}_x(\lambda_j) + \boldsymbol{T}(\lambda_j)\boldsymbol{U}(\lambda_j))\boldsymbol{T}^*(\lambda_j) = \boldsymbol{0}. \tag{13}$$

令$(\boldsymbol{T}_x + \boldsymbol{TU})\boldsymbol{T}^* = (f_{s,l}(\lambda))_{3\times 3}$，显然，$f_{s,l}(\lambda_j) = 0(s,l,j = 1,2,3)$. 经计算可知，$f_{1,1}(\lambda)$是$\lambda$的四阶多项式；$f_{1,2}(\lambda)$，$f_{1,3}(\lambda)$，$f_{2,1}(\lambda)$，$f_{3,1}(\lambda)$是$\lambda$的三阶多项式；$f_{2,2}(\lambda)$，$f_{2,3}(\lambda)$，$f_{3,2}(\lambda)$，$f_{3,3}(\lambda)$是$\lambda$的二阶多项式. 因此，$f_{2,2}(\lambda) = f_{2,3}(\lambda) = f_{3,2}(\lambda) = f_{3,3}(\lambda)$，且

$$(\boldsymbol{T}_x + \boldsymbol{TU})\boldsymbol{T}^* = (\det \boldsymbol{T})\boldsymbol{P}(\lambda). \tag{14}$$

其中，有

$$\boldsymbol{P}(\lambda) = \begin{pmatrix} P_{1,1}^{(1)}\lambda + P_{1,1}^{(0)} & P_{1,2}^{(0)} & P_{1,3}^{(0)} \\ P_{2,1}^{(0)} & 0 & 0 \\ P_{3,1}^{(0)} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

式(15)中：$P_{s,l}^{(k)}(s = 1,2,3; l = 1,2,3; k = 0,1)$与$\lambda$无关.

又$\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{T}^*/\det \boldsymbol{T}$，于是式(14)可写为

$$\boldsymbol{T}_x + \boldsymbol{TU} = \boldsymbol{P}(\lambda)\boldsymbol{T}. \tag{16}$$

比较(16)中λ^2，λ^1，λ^0的系数，可得

$$P_{1,1}^{(1)} = 1, \quad P_{1,1}^{(0)} = \hat{q}, \quad P_{1,2}^{(0)} = \hat{u}, \quad P_{2,1}^{(0)} = 1, \quad P_{3,1}^{(0)} = \hat{r}, \tag{17}$$

和一些恒等式，即有

$$\left.\begin{aligned} &(ab_{1,1})_x + ab_{1,1}q + ab_{1,2} + ab_{1,3}r = ab_{1,1}\hat{q} + (a-1)\hat{u} + b_{3,1}\hat{v}, \\ &(ab_{1,2})_x + ab_{1,1}u = ab_{1,2}\hat{q} + b_{2,2}\hat{u} + b_{3,2}\hat{v}, \\ &(ab_{1,3})_x + ab_{1,1}v = ab_{1,3}\hat{q} + b_{2,3}\hat{u} + b_{3,3}\hat{v}, \\ &a_x + (a-1)q + b_{2,2} + b_{2,3}r = ab_{1,1}, \\ &b_{2,2,x} + (a-1)u = ab_{1,2}, \quad b_{2,3,x} + (a-1)v = ab_{1,3}, \\ &b_{3,1,x} + b_{3,1}q + b_{3,2} + b_{3,3}r = ab_{1,1}\hat{r}, \\ &b_{3,2,x} + b_{3,1}u = ab_{1,2}\hat{r}, \quad b_{3,3,x} + b_{3,1}v = ab_{1,3}\hat{r}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

由式(15)，(17)可证得$\boldsymbol{P}(\lambda) = \hat{\boldsymbol{U}}$与$\boldsymbol{U}$有相同的形式.

接下来，证明$\hat{\boldsymbol{V}}$与$\boldsymbol{V}$有相同的形式. 类似地，对式(11)关于t求导，得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{T}_t(\lambda_j) + \boldsymbol{T}(\lambda_j)\boldsymbol{V}(\lambda_j) \\ \boldsymbol{T}(\lambda_j) \end{pmatrix} \boldsymbol{Y}(\lambda_j) = \boldsymbol{0}. \tag{19}$$

同理，有

$$(\boldsymbol{T}_t(\lambda_j) + \boldsymbol{T}(\lambda_j)\boldsymbol{V}(\lambda_j))\boldsymbol{T}^*(\lambda_j) = \boldsymbol{0}. \tag{20}$$

令$(\boldsymbol{T}_t + \boldsymbol{TV})\boldsymbol{T}^* = (g_{s,l}(\lambda))_{3\times 3}$，显然$g_{s,l}(\lambda_j) = 0(s,l,j = 1,2,3)$. 通过计算可知，$g_{1,1}(\lambda)$是$\lambda$的五阶多项式；$g_{1,2}(\lambda)$，$g_{1,3}(\lambda)$，$g_{2,1}(\lambda)$，$g_{3,1}(\lambda)$是$\lambda$的四阶多项式；$g_{2,2}(\lambda)$，$g_{2,3}(\lambda)$，$g_{3,2}(\lambda)$，$g_{3,3}(\lambda)$是$\lambda$的三阶多项式. 于是，有

$$\boldsymbol{T}_t + \boldsymbol{TV} = \boldsymbol{Q}(\lambda)\boldsymbol{T}. \tag{21}$$

式(21)中：

$$\boldsymbol{Q}(\lambda) = \begin{pmatrix} Q_{1,1}^{(2)}\lambda^2 + Q_{1,1}^{(1)}\lambda + Q_{1,1}^{(0)} & Q_{1,2}^{(1)}\lambda + Q_{1,2}^{(0)} & Q_{1,3}^{(1)}\lambda + Q_{1,3}^{(0)} \\ Q_{2,1}^{(1)}\lambda + Q_{2,1}^{(0)} & Q_{2,2}^{(0)} & Q_{2,3}^{(0)} \\ Q_{3,1}^{(1)}\lambda + Q_{3,1}^{(0)} & Q_{3,2}^{(0)} & Q_{3,3}^{(0)} \end{pmatrix}. \tag{22}$$

式(22)中：$Q_{s,l}^{(k)}(s,l = 1,2,3; k = 0,1,2)$与$\lambda$无关.

比较式(21)中λ的同次幂系数，并应用恒等式(18)，有

$$\left.\begin{aligned} &Q_{1,1}^{(2)} = 1, \quad Q_{1,1}^{(1)} = 0, \quad Q_{1,1}^{(0)} = \hat{v}\hat{r} + \hat{u} - \hat{q}^2 - \hat{q}_x, \quad Q_{1,2}^{(1)} = \hat{u}, \\ &Q_{1,2}^{(0)} = \hat{u}_x - \hat{u}\hat{q}, \quad Q_{1,3}^{(1)} = \hat{v}, \quad Q_{1,3}^{(0)} = \hat{v}_x - \hat{v}\hat{q}, \quad Q_{2,1}^{(1)} = 1, \quad Q_{2,1}^{(0)} = -\hat{q}, \\ &Q_{2,2}^{(0)} = \hat{u}, \quad Q_{2,3}^{(0)} = \hat{v}, \quad Q_{3,1}^{(1)} = \hat{r}, \quad Q_{3,1}^{(0)} = -\hat{r}_x - \hat{r}_x - \hat{q}\hat{r}, \quad Q_{3,2}^{(0)} = \hat{u}\hat{r}, \quad Q_{3,3}^{(0)} = \hat{v}\hat{r}. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

从而 $\boldsymbol{Q}(\lambda)=\hat{\boldsymbol{V}}$ 与 $\boldsymbol{V}$ 有相同的形式，证毕.

由此可见，规范变换(4)将耦合 Burgers 方程(1)的谱问题(2)，(3)变成了形式完全一致的谱问题(8)，称规范变换(4)为谱问题(2)，(3)的一个 Darboux 变换. 于是，可得如下结论.

定理 2　Darboux 变换(10)将耦合 Burgers 方程(1)的任一解(q,r,u,v)变成一个新解$(\hat{q},\hat{r},\hat{u},\hat{v})$，其中，$a$ 和 $b_{i,j}(i,j=1,2,3)$由式(7)唯一确定.

2　精确解

应用 Darboux 变换(10)讨论耦合 Burgers 方程(1)的精确解. 依据 Cramer 法则，可从式(7)中解得 $a,b_{1,2},b_{1,3}$ 和 $b_{3,1}$ 分别为

$$a=\frac{\Delta_3}{\Delta},\qquad b_{1,2}=\frac{\Delta_1}{\Delta},\qquad b_{1,3}=\frac{\Delta_2}{\Delta},\qquad b_{3,1}=\frac{\Delta_4}{\Delta}. \tag{24}$$

式(24)中：

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta=\begin{vmatrix}1 & \alpha_1^{(1)} & \alpha_1^{(2)}\\ 1 & \alpha_2^{(1)} & \alpha_2^{(2)}\\ 1 & \alpha_3^{(1)} & \alpha_3^{(2)}\end{vmatrix},\qquad \Delta_1=\begin{vmatrix}1 & \lambda_1 & \alpha_1^{(2)}\\ 1 & \lambda_2 & \alpha_2^{(2)}\\ 1 & \lambda_3 & \alpha_3^{(2)}\end{vmatrix},\qquad \Delta_2=\begin{vmatrix}1 & \alpha_1^{(1)} & -\lambda_1\\ 1 & \alpha_2^{(1)} & -\lambda_2\\ 1 & \alpha_3^{(1)} & -\lambda_3\end{vmatrix},\\
&\Delta_3=\begin{vmatrix}1-\lambda_1\alpha_1^{(1)} & \alpha_1^{(1)} & \alpha_1^{(2)}\\ 1-\lambda_2\alpha_2^{(1)} & \alpha_2^{(1)} & \alpha_2^{(2)}\\ 1-\lambda_3\alpha_3^{(1)} & \alpha_3^{(1)} & \alpha_3^{(2)}\end{vmatrix},\qquad \Delta_4=\begin{vmatrix}-\lambda_1\alpha_1^{(2)} & \alpha_1^{(1)} & \alpha_1^{(2)}\\ -\lambda_2\alpha_2^{(2)} & \alpha_2^{(1)} & \alpha_2^{(2)}\\ -\lambda_3\alpha_3^{(2)} & \alpha_3^{(1)} & \alpha_3^{(2)}\end{vmatrix}.
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

假设选取的常数 $\lambda_j,\gamma_j^{(l)}(j=1,2,3;l=1,2)$使得 $\Delta\neq0$.

1) 选取耦合 Burgers 方程(1)的初始解 $q=r=u=v=0$，则谱问题(2)，(3)简化为

$$\left.\begin{aligned}
&\psi_{1,x}=\lambda\psi_1,\qquad \psi_{2,x}=\psi_1,\qquad \psi_{3,x}=0,\\
&\psi_{1,t}=\lambda^2\psi_1,\qquad \psi_{2,t}=\lambda\psi_1,\qquad \psi_{3,t}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

它的一个基解矩阵是

$$(\boldsymbol{\phi}^{(1)},\boldsymbol{\phi}^{(2)},\boldsymbol{\phi}^{(3)})=\begin{pmatrix}\exp(\lambda x+\lambda^2t) & 0 & 0\\ \lambda^{-1}\exp(\lambda x+\lambda^2t) & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{27}$$

由式(7)的定义和式(27)，可得

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_j^{(1)}=\lambda_j^{-1}+\gamma_j^{(1)}\exp(-\lambda_jx-\lambda_j^2t),\\
&\alpha_j^{(2)}=\gamma_j^{(2)}\exp(-\lambda_jx-\lambda_j^2t).
\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

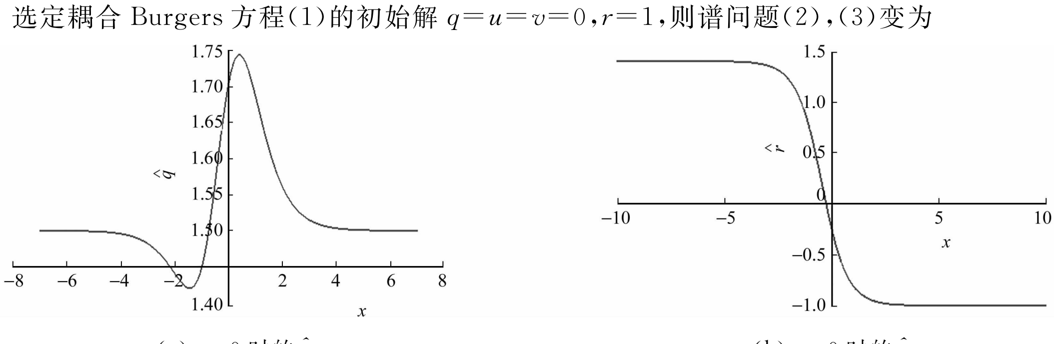
应用 Darboux 变换(10)，可得耦合 Burgers 方程(1)的一个精确解，即

$$\hat{q}=(\ln\frac{\Delta_3}{\Delta})_x,\qquad \hat{r}=\frac{\Delta_4}{\Delta_3},\qquad \hat{u}=-\frac{\Delta_1\Delta_3}{\Delta^2},\qquad \hat{v}=-\frac{\Delta_2\Delta_3}{\Delta^2}. \tag{29}$$

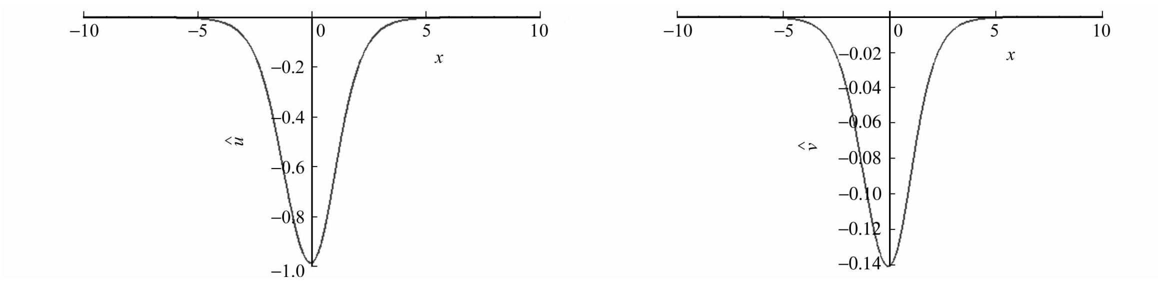
式(29)中：$\Delta,\Delta_i(i=1,2,3,4)$由式(25)定义.

特别地，取 $\lambda_1=-3,\lambda_2=-15,\lambda_3=-3,\gamma_1^{(1)}=1,\gamma_1^{(2)}=-2,\gamma_2^{(1)}=-1.5,\gamma_2^{(2)}=1.5,\gamma_3^{(1)}=0.5,\gamma_3^{(2)}=1.5$，可得耦合 Burgers 方程(1)的孤子解，如图 1 所示.

2) 选定耦合 Burgers 方程(1)的初始解 $q=u=v=0,r=1$，则谱问题(2)，(3)变为



(a) $t=0$ 时的 $\hat{q}$　　　　(b) $t=0$ 时的 $\hat{r}$



(c) $t=0$ 时的 $\hat{u}$　　　　(d) $t=0$ 时的 $\hat{v}$

图 1　式(29)中的孤子解

Fig. 1　Soliton solution in formula (29)

$$\left.\begin{aligned}\psi_{1,x}&=\lambda\psi_1, & \psi_{2,x}&=\psi_1, & \psi_{3,x}&=\psi_1,\\ \psi_{1,t}&=\lambda^2\psi_1, & \psi_{2,t}&=\lambda\psi_1, & \psi_{3,t}&=\lambda\psi_1.\end{aligned}\right\}\tag{30}$$

它的一个基解矩阵为

$$(\boldsymbol{\phi}^{(1)},\boldsymbol{\phi}^{(2)},\boldsymbol{\phi}^{(3)})=\begin{pmatrix}\exp(\lambda x+\lambda^2 t) & 0 & 0\\ \lambda^{-1}\exp(\lambda x+\lambda^2 t) & 1 & 0\\ \lambda^{-1}\exp(\lambda x+\lambda^2 t) & 0 & 1\end{pmatrix}.\tag{31}$$

由式(7)的定义和式(31)，可得

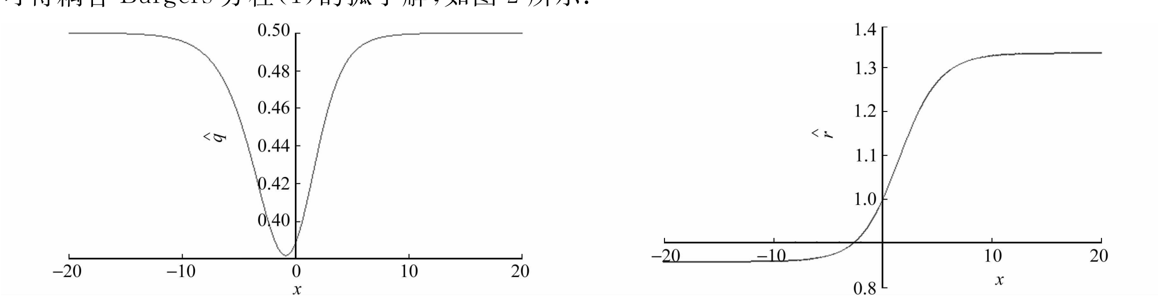
$$\left.\begin{aligned}\alpha_j^{(1)}&=\lambda_j^{-1}+\gamma_j^{(1)}\exp(-\lambda_j x-\lambda_j^2 t),\\ \alpha_j^{(2)}&=\lambda_j^{-1}+\gamma_j^{(2)}\exp(-\lambda_j x-\lambda_j^2 t).\end{aligned}\right\}\tag{32}$$

应用 Darboux 变换(10)，得到耦合 Burgers 方程(1)的一个精确解，即

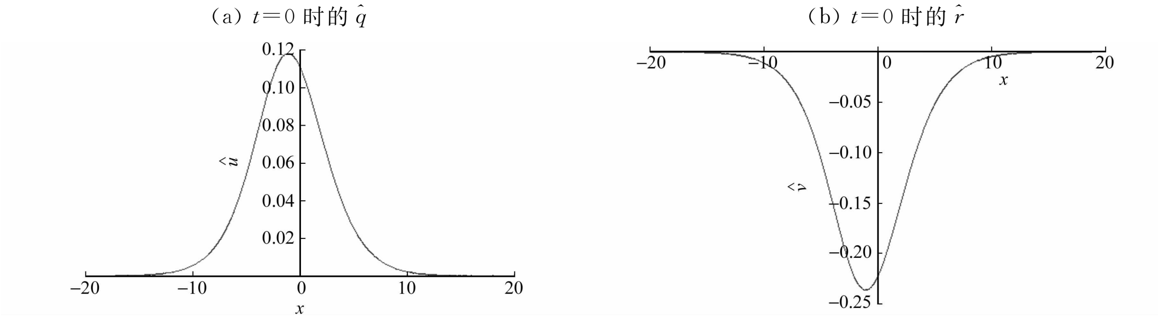
$$\hat{q}=(\ln\frac{\Delta_3}{\Delta})_x,\qquad \hat{r}=\frac{\Delta+\Delta_4}{\Delta_3},\qquad \hat{u}=-\frac{\Delta_1\Delta_3}{\Delta^2},\qquad \hat{v}=-\frac{\Delta_2\Delta_3}{\Delta^2}.\tag{33}$$

式(33)中：$\Delta,\Delta_i(i=1,2,3,4)$由式(25)定义.

特别地，取 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-0.5,\lambda_3=-1,\gamma_1^{(1)}=-1,\gamma_1^{(2)}=0,\gamma_2^{(1)}=-1.5,\gamma_2^{(2)}=-2,\gamma_3^{(1)}=3,\gamma_3^{(2)}=2$，可得耦合 Burgers 方程(1)的孤子解，如图 2 所示.



(a) $t=0$ 时的 $\hat{q}$　　　　(b) $t=0$ 时的 $\hat{r}$



(c) $t=0$ 时的 $\hat{u}$　　　　(d) $t=0$ 时的 $\hat{v}$

图 2　式(33)中的孤子解

Fig. 2　Soliton solution in formula (33)

3) 选取耦合 Burgers 方程(1)的初始解 $q=r=u=0,r=1$，可得耦合 Burgers 方程(1)的一个精确解，即

$$\hat{q}=(\ln\frac{\Delta_3}{\Delta})_x,\qquad \hat{r}=\frac{\Delta_4}{\Delta_3},\qquad \hat{u}=-\frac{-\Delta_1\Delta_3}{\Delta^2},\qquad \hat{v}=-\frac{(\Delta-\Delta_2)\Delta_3}{\Delta^2}. \tag{34}$$

式(34)中:Δ,Δ_i(i=1,2,3,4)由式(25)定义,且有

$$\left.\begin{aligned}\alpha_j^{(1)}&=\frac{\lambda_j^{-1}\exp(\lambda_j x+\lambda_j^2 t)+\gamma_j^{(1)}-\gamma_j^{(2)}\lambda_j^{-1}x}{\exp(\lambda_j x+\lambda_j^2 t)-\gamma_j^{(2)}\lambda_j^{-1}},\\ \alpha_j^{(2)}&=\frac{\gamma_j^{(2)}}{\exp(\lambda_j x+\lambda_j^2 t)-\gamma_j^{(2)}\lambda_j^{-1}}.\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

4) 选取耦合 Burgers 方程(1)的初始解 $q=r=v=0$,$u=1$,可得耦合 Burgers 方程(1)的一个精确解,即

$$\hat{q}=(\ln\frac{\Delta_3}{\Delta})_x,\qquad \hat{r}=\frac{\Delta_4}{\Delta_3},\qquad \hat{u}=\frac{(\Delta-\Delta_1)\Delta_3}{\Delta^2},\qquad \hat{v}=-\frac{\Delta_2\Delta_3}{\Delta^2}. \tag{36}$$

式(36)中:Δ,Δ_i(i=1,2,3,4)由式(25)定义,且

$$\left.\begin{aligned}\alpha_j^{(1)}&=\frac{\exp(A_j)+\gamma_j^{(1)}\exp(B_j)}{\eta_j\exp(A_j)+\gamma_j^{(1)}\exp(B_j)},\\ \alpha_j^{(2)}&=\frac{\gamma_j^{(2)}}{\eta_j\exp(A_j)+\gamma_j^{(1)}\xi_j\exp(B_j)}.\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

式(37)中:$\eta_j=\frac{\lambda_j+\sqrt{\lambda_j^2+4}}{2}$;$\xi_j=\frac{\lambda_j-\sqrt{\lambda_j^2+4}}{2}$;$A_j=\eta_j x+(\lambda_j\eta_j+1)t$;$B_j=\xi_j x+(\lambda_j\xi_j+1)t$.

3 结束语

通过引入谱问题的规范变换,构造出耦合 Burgers 方程的一个 Darboux 变换.选取耦合 Burgers 方程的 4 个平凡的初始解,应用 Darboux 变换,得到了它的 4 个精确解.在此基础上,适当选取参数,给出耦合 Burgers 方程的两个孤子解,并画出了 $t=0$ 时相应位势的平面图.

参考文献:

[1] ABLOWITZ M J,KAUP D J,NEWELL A C. The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems[J]. Stud Appl Math,1974,53(4):249-315.

[2] ABLOWITZ M J,SEGUR H. Solitons and the inverse scattering transform[M]. SIAM:Philadelphia,1981.

[3] HIROTA R. The direct method in soliton theory[M]. Cambridge:Cambridge University Press,2004.

[4] ABLOWITZ M J,RAMANI A,SEGUR H. A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of p-type Ⅰ[J]. Math Phys,1980,21(4):715-721.

[5] ABLOWITZ M J,RAMANI A,SEGUR H. A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of p-type Ⅱ[J]. Math Phys,1980,21(5):1006-1015.

[6] NOVIKOV S P. The periodic problem for the Korteweg-de vries equation[J]. Funct Anal Appl,1974,8(3):236-246.

[7] ITS A R, MATVEEV V B. Schrödinger operators with finite-gap spectrum and N-soliton solutions of the Korteweg-de Vries equation[J]. Theor Math Phys,1975,23(1):51-68.

[8] MATVEEV V B,SALLE M A. Darboux transformation and solitons[J]. Journal of Neurochemistry,1991,42(6):1667-1676.

[9] 谷超豪,胡和生,周子翔.孤立子理论中的达布变换及其几何应用[M].2 版.上海:上海科学技术出版社,2005.

[10] GENG Xianguo,WANG Hui. A hierarchy of new nonlinear evolution equations and their bi-Hamiltonian structures[J]. Chin Phys Lett,2014,31(7):5-8.

(**责任编辑:** 黄晓楠　　**英文审校:** 黄心中)

《华侨大学学报(自然科学版)》征稿简则

《华侨大学学报(自然科学版)》是华侨大学主办的，面向国内外公开发行的自然科学综合性学术刊物．本刊坚持四项基本原则，贯彻“百花齐放，百家争鸣”和理论与实践相结合的方针，广泛联系海外华侨和港、澳、台、特区的科技信息，及时反映国内尤其是华侨大学等高等学府在基础研究、应用研究和开发研究等方面的科技成果，为发展华侨高等教育和繁荣社会主义科技事业服务．本刊主要刊登机械工程及自动化、测控技术与仪器、电气工程、电子工程、计算机技术、应用化学、材料与环境工程、化工与生化工程、土木工程、建筑学、数学和管理工程等基础研究和应用研究方面的学术论文，科技成果的学术总结，新技术、新设计、新产品、新工艺、新材料、新理论的论述，以及国内外科技动态的综合评论等内容．

1　投稿约定

1.1　作者应保证文稿为首发稿及文稿的合法性；署名作者对文稿均应有实质性贡献，署名正确，顺序无争议；文稿中所有事实均应是真实的和准确的，引用他人成果时，应作必要的标注；不违反与其他出版机构的版权协议及与其他合作机构的保密协议；无抄袭、剽窃等侵权行为，数据伪造及一稿两投等不良行为．如由上述情况而造成的经济损失和社会负面影响，由作者本人负全部责任．

1.2　自投稿日期起 2 个月之内，作者不得另投他刊．2 个月之后，作者若没有收到反馈意见，可与编辑部联系．无论何种原因，要求撤回所投稿件，或者变更作者署名及顺序，需由第一作者以书面形式通知编辑部并经编辑部同意．

1.3　作者同意将该文稿的发表权，汇编权，纸型版、网络版及其他电子版的发行权、传播权和复制权交本刊独家使用，并同意由编辑部统一纳入相关的信息服务系统．

1.4　来稿一经刊用，作者须按规定交纳版面费，同时编辑部按篇一次性付给稿酬并赠送该期刊物．本刊被国内外多家著名文摘期刊和数据库列为收录刊源，对此特别声明不另收费用，也不再付给稿酬．

1.5　其他未尽事宜，按照《中华人民共和国著作权法》和有关的法律法规处理．

2　来稿要求和注意事项

2.1　来稿务必具有科学性、先进性，论点鲜明、重点突出、逻辑严密、层次分明、文字精练、数据可靠．

2.2　论文题名字数一般不超过 18 字，必要时可加副题．文中各级层次标题要简短明确，一般不超过 15 字，且同一层次的标题应尽可能“排比”．

2.3　署名作者应对选题、研究、撰稿等作出主要贡献并能文责自负，一般以不超过 3 名为宜．作者单位应标明单位、所在城市、省份及邮政编码．

2.4　摘要应包括研究的目的、使用的方法、获得的结果和引出的结论等，应写成独立性短文且不含图表和引用参考文献序号等．其篇幅一般以 150～250 字左右为宜，关键词以 4～8 个为宜．

2.5　量和单位符号等要符合国家标准和国际标准．

2.6　能用文字说明的问题，尽量不用图表；画成曲线图的数据，不宜再列表．图表应有中英文标题．

2.7　参考文献仅选最主要的，且已公开发表的，按规范的内容、顺序、标点书写列入，并按其在文中出现的先后次序进行编号和标注．参考文献不少于 10 篇，未公开发表的资料不引用．

2.8　英文摘要尽可能与中文摘要对应，包括题目、作者姓名、作者单位、摘要、关键词．用过去时态叙述作者工作，用现在时态叙述作者结论，并符合英文写作规范．

2.9　文稿首页地脚处依次注明收稿日期；通信作者为可联系作者的姓名、出生年、性别、职称、学历、研究方向、电子邮件地址；基金项目为课题资助背景及编号，可几项依次排列．

2.10　投稿请直接登陆本刊唯一官方网站(www.hdxb.hqu.edu.cn)在线投稿．

《华侨大学学报(自然科学版)》编辑部

· 《中文核心期刊要目总览》
· RCCSE 中国核心学术期刊
· 中国期刊方阵"双效期刊"
· 中国科技论文在线优秀期刊
· ISTIC 中国科技核心期刊
· 全国优秀科技期刊
· 华东地区优秀期刊

本刊被以下国内外检索期刊和数据库列为固定刊源

· 美国《化学文摘》(CAS)
· 波兰《哥白尼索引》(IC)
· "STN 国际"数据库
· 中国科学引文数据库
· 中国科技论文统计期刊源
· 中国学术期刊(光盘版)
· 中文科技期刊数据库
· 中国力学文摘
· 中国生物学文摘
· 中国数学文摘
· 俄罗斯《文摘杂志》(AJ,VINITI)
· 荷兰《文摘与引文数据库》(Scopus)
· 德国《数学文摘》(Zbl MATH)
· 中国学术期刊综合评价数据库
· 中国期刊网
· 万方数据库
· 中国机械工程文摘
· 中国化学化工文摘
· 中国无线电电子学文摘
· 中国物理文摘

华侨大学学报(自然科学版)
Huaqiao Daxue Xuebao (Ziran Kexue Ban)
(双月刊, 1980 年创刊)
第 38 卷 第 4 期 (总第 156 期) 2017 年 7 月 20 日

JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
(NATURAL SCIENCE)
(Bimonthly, Started in 1980)
Vol. 38 No. 4 (Sum. 156) Jul. 20, 2017

主管单位: 福建省教育厅
主办单位: 华侨大学
(中国 福建 泉州 362021)
(中国 福建 厦门 361021)
编辑出版: 华侨大学学报自然科学版编辑部
电　　话: 0595-22692545
电子信箱: journal@hqu. edu. cn
网　　址: www. hdxb. hqu. edu. cn
印　　刷: 泉州晚报印刷厂
国内发行: 福建省泉州市邮政局
订 购 处: 全国各地邮政局(所)
国外发行: 中国出版对外贸易总公司
(北京 782 信箱,邮政编码 100011)

Competent Authority: Department of Education of Fujian Province
Sponsor: Huaqiao University
(Quanzhou 362021, Fujian, China)
(Xiamen 361021, Fujian, China)
Edited and Published by Editorial Department of Journal of Huaqiao University (Natural Science)
Tel: 0595-22692545
E-mail: journal@hqu. edu. cn
Http://www. hdxb. hqu. edu. cn
Distributed by China Publication Foreign Trading Corporation
(P. O. Box 782, Beijing, 100011, China)

刊　　号: ISSN 1000-5013 / CN 35-1079/N
代　　号: 国内邮发 34-41 / 国外 NTZ 1050
国内定价: 8.00 元/期 / 48.00 元/年

ISSN 1000-5013
07>
9 771000 501170