

doi: 10. 11830/ISSN. 1000-5013. 201704025



# 具有收获和 Beddington-DeAngelis 功能反应的捕食-食饵模型

章培军<sup>1,2</sup>, 王震<sup>1,2</sup>, 杨颖惠<sup>3</sup>

(1. 西京学院 理学院, 陕西 西安 710123;

2. 西京学院 智能控制技术研发中心, 陕西 西安 710123;

3. 西南交通大学 数学学院, 四川 成都 611756)

**摘要:** 研究食饵具有阶段结构, 捕食者具有收获和时滞的 Beddington-DeAngelis 功能反应的捕食-食饵模型. 选取合适的收获率, 通过分析相应平衡点处的特征方程, 得到各平衡点局部渐近稳定的条件. 以时滞  $\tau$  为分支参数, 运用 Hopf 分支理论, 得到当  $\tau$  经过临界值  $\tau_0$  时系统出现 Hopf 分支. 最后, 用 Matlab 软件进行数值仿真, 并验证结论的正确性.

**关键词:** Beddington-DeAngelis 功能反应; 捕食-食饵模型; 时滞; 阶段结构; Hopf 分支

中图分类号: O 175; Q 141 文献标志码: A 文章编号: 1000-5013(2017)04-0579-06

## Predator-Prey Model With Beddington-DeAngelis Functional Response and Harvesting

ZHANG Peijun<sup>1,2</sup>, WANG Zhen<sup>1,2</sup>, YANG Yinghui<sup>3</sup>

(1. School of Science, Xijing University, Xi'an 710123, China;

2. Intelligent Control Technology Research and Development Center, Xijing University, Xi'an 710123, China;

3. School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China)

**Abstract:** A predator-prey model with Beddington-DeAngelis functional response of predator with harvesting and time delay and the stage structure for prey are investigated in this paper. Select the appropriate harvest rate, the conditions for the local asymptotic stability of the equilibrium point are obtained by analyzing the characteristic equation of the corresponding equilibrium point; by means of the Hopf bifurcation theorem and considering the delay  $\tau$  as a bifurcation parameter, Hopf bifurcation occurs when  $\tau$  passes through the critical value  $\tau_0$ . Finally, Matlab is employed to carry out numerical simulation to verify our results.

**Keywords:** Beddington-deAngelis functional response; predator-prey model; time delay; stage structure; Hopf bifurcation

在实验的基础上, Holling<sup>[1]</sup>对不同类型的物种提出了 3 种不同的功能反应函数, 这些功能反应函数只与食饵的密度有关, 称为食饵依赖功能反应. Jost 等<sup>[2]</sup>对其进行了系统的研究, 并证明功能性反应项与捕食者有关, 即捕食者依赖, 如 Hassel-Varley 功能反应<sup>[3]</sup>, Crowley-Martin 功能反应<sup>[4]</sup>等. 由于 Beddington-DeAngelis 功能反应<sup>[5-6]</sup>在描述捕食关系时具有食饵依赖型和捕食者依赖型的双重特点, 建

收稿日期: 2017-01-11

通信作者: 章培军(1984-), 男, 讲师, 主要从事生物数学与计算机模拟、常微分方程与动力系统的研究. E-mail: zhangpj2006@126.com.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61473237); 陕西省自然科学基金基础研究计划资助项目(2016JM1024); 陕西省教育厅科研计划项目(15JK2181); 西京学院科研基金资助项目(XJ160143)

立在 Beddington-DeAngelis 功能反应之下的捕食-食饵模型,受到学者的广泛关注<sup>[7-8]</sup>. 近几十年来,对时滞微分方程的稳定性和分支的研究引起了许多学者的关注<sup>[9-12]</sup>,尤其是时滞引起模型产生分支从而诱发周期解. 由于种群的存活率、增长率和繁殖力受年龄和种群发展阶段的影响,很多学者考虑了捕食者和食饵的年龄因素对生物系统的影响<sup>[12-15]</sup>. 鉴于此,本文在文献[8,15-16]的基础上,研究食饵具有阶段结构,捕食者具有收获和时滞的 Beddington-DeAngelis 功能反应的捕食-食饵模型.

## 1 模型的建立

食饵具有阶段结构,捕食者具有收获和时滞的 Beddington-DeAngelis 功能反应的捕食-食饵模型为

$$\left. \begin{aligned} x_1'(t) &= rx_2(t) - bx_1(t) - d_1x_1(t), \\ x_2'(t) &= bx_1(t) - \frac{\beta x_2(t)y(t)}{1+mx_2(t)+ny(t)} - \alpha x_2^2(t) - d_2x_2(t), \\ y'(t) &= \frac{c\beta x_2(t-\tau)y(t-\tau)}{1+mx_2(t-\tau)+ny(t-\tau)} - d_3y(t) - qEy(t). \end{aligned} \right\} \tag{1}$$

式(1)中: $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ 和  $y(t)$ 分别为幼年食饵、成年食饵和捕食者在  $t$  时刻的数量; $r$  为幼年食饵的内禀增长率; $b$  为幼年食饵成长为成年食饵的比例; $\frac{\beta x_2(t)y(t)}{1+mx_2(t)+ny(t)}$  为捕食者对成年食饵的 Beddington-DeAngelis 功能反应函数; $\alpha$  为成年食饵的种内竞争比例; $c, q$  分别为捕食者的转化系数和收获系数; $E$  为收获努力量; $d_1, d_2, d_3$  分别为幼年食饵、成年食饵和捕食者的死亡率; $\tau$  为捕食者的妊娠时间.

## 2 基本动力学行为

### 2.1 平衡点及存在性

令模型(1)的右端为零,易得系统的平衡点及存在条件.

**定理 1** 1) 模型(1)总存在平衡点  $E_1(0,0,0)$ .

2) 当  $H_1): br - d_2(b + d_1) > 0$  时,模型(1)存在捕食者灭绝的平衡点  $E_2(\frac{r[br - d_2(b + d_1)]}{\alpha(b + d_1)^2}, \frac{br - d_2(b + d_1)}{\alpha(b + d_1)}, 0)$ .

3) 当  $[c\beta - m(d_3 + qE)]x_2^* - (d_3 + qE) > 0$  时,模型(1)存在唯一的正平衡点  $E_3(x_1^*, x_2^*, y^*)$ . 其中:  $x_1^* = \frac{r}{b + d_1}x_2^*$ ,  $x_2^* = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ ,  $y^* = \frac{[c\beta - m(d_3 + qE)]x_2^* - (d_3 + qE)}{n(d_3 + qE)}$ , 且有  $A = \alpha cn(b + d_1)$ ,  $B = c(\beta + nd_2)(b + d_1) - m(d_3 + qE)(b + d_1) - rcbn$ ,  $C = -(d_3 + qE)(b + d_1)$ .

### 2.2 平衡点的稳定性

**定理 2** 1) 当  $H_1)$  成立时,  $E_1$  不稳定; 当  $H_2): br - d_2(b + d_1) < 0$  成立时,  $E_1$  局部渐近稳定.

2) 对任意  $\tau \geq 0$ , 当  $H_1)$  和  $H_3): qE < \frac{\beta c[br - d_2(b + d_1)]}{\alpha(b + d_1) + m[br - d_2(b + d_1)]} - d_3$  成立时,  $E_2$  不稳定; 当  $H_1)$  和  $H_4): qE > \frac{\beta c[br - d_2(b + d_1)]}{\alpha(b + d_1) + m[br - d_2(b + d_1)]} - d_3$  成立时,  $E_2$  局部渐近稳定.

3) 对任意  $\tau \geq 0$ , 若条件  $H_5): M_2 + N_2 > 0, (M_2 + N_2)(M_1 + N_1) - (M_0 + N_0) > 0, M_0 + N_0 > 0$ , 且  $M_0 > N_0$  成立, 则  $E_3$  局部渐近稳定.

**证明** 令  $\bar{E}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y})$  是任意平衡点, 则模型(1)在  $\bar{E}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y})$  处的雅可比矩阵为

$$J(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}) = \begin{bmatrix} -b - d_1 & r & 0 \\ b & -d_2 - 2\alpha\bar{x}_2 - \frac{\beta\bar{y}(1 + n\bar{y})}{(1 + m\bar{x}_2 + n\bar{y})^2} & \frac{\beta\bar{x}_2(1 + m\bar{x}_2)}{(1 + m\bar{x}_2 + n\bar{y})^2} \\ 0 & \frac{c\beta\bar{y}(1 + n\bar{y})}{(1 + m\bar{x}_2 + n\bar{y})^2} \cdot e^{-\lambda\tau} & \frac{c\beta\bar{x}_2(1 + m\bar{x}_2)}{(1 + m\bar{x}_2 + n\bar{y})^2} \cdot e^{-\lambda\tau} - d_3 - qE \end{bmatrix}.$$

其特征方程为  $F_1(\lambda, \tau) = |\lambda E - J_i| = 0, i = 1, 2, 3$ .

1) 在  $E_1(0,0,0)$  处,有

$$F_1(\lambda,\tau)=(\lambda+d_3+qE)[\lambda^2+(b+d_1+d_2)\lambda+d_2(b+d_1)-br]=0. \tag{2}$$

当  $H_1)$  成立时,方程(2)有一个根的实部为正,从而平衡点  $E_1(0,0,0)$  不稳定;当  $H_2)$  成立时,方程(2)的所有根具有负实部,从而平衡点  $E_1(0,0,0)$  局部渐近稳定.

2) 在  $E_2$  处,有

$$F_2(\lambda,\tau)=\left(\lambda+d_3+qE-\frac{\beta x[br-d_2(b+d_1)]}{\alpha(b+d_1)+m[br-d_2(b+d_1)]}\cdot e^{-\lambda\tau}\right)\times \\ \left[\lambda^2+\frac{(b+d_1)^2+2br-(b+d_1)d_2}{b+d_1}\lambda+br-d_2(b+d_1)\right]=0. \tag{3}$$

当  $H_1)$  成立时,方程  $\lambda^2+\left(b+d_1-d_2+\frac{2br}{b+d_1}\right)\lambda+br-d_2(b+d_1)=0$  的两个根具有负实部,方程(3)的另外一个根由  $\lambda+d_3+qE-\frac{\beta c[br-d_2(b+d_1)]}{\alpha(b+d_1)+m[br-d_2(b+d_1)]}\cdot e^{-\lambda\tau}=0$  决定.故令

$$f(\lambda)=\lambda+d_3+qE-\frac{\beta c[br-d_2(b+d_1)]}{\alpha(b+d_1)+m[br-d_2(b+d_1)]}\cdot e^{-\lambda\tau}.$$

当  $H_1)$  和  $H_3)$  成立时,可得到  $f(0)=d_3+qE-\frac{\beta c[br-d_2(b+d_1)]}{(\alpha-md_2)(b+d_1)+brm}<0$ ,且有  $f(\lambda)\rightarrow+\infty(\lambda\rightarrow+\infty)$ ,从而  $f(\lambda)=0$  至少有一个正实部的根.所以,此时  $E_2$  不稳定.

当  $H_1)$  和  $H_4)$  成立时,得  $f(0)>0$ ,且  $f(\lambda)\rightarrow-\infty(\lambda\rightarrow-\infty)$ ,从而  $f(\lambda)=0$  有负实部的根.根据 Kuang<sup>[17]</sup> 中的定理 4.1 可得,对任意  $\tau\geqslant 0,E_2$  局部渐近稳定.

3) 在  $E_3(x_1^*,x_2^*,y^*)$  处,有

$$F_3(\lambda,\tau)=\lambda^3+(b+d_1+d_2+2\alpha x_2^*+P+d_3+qE-cQ\cdot e^{-\lambda\tau})\lambda^2+[(b+d_1)\times \\ (d_2+2\alpha x_2^*+P+d_3+qE)+(d_2+2\alpha x_2^*+P)(d_3+qE)-br- \\ (b+d_1+d_2+2\alpha x_2^*)cQ\cdot e^{-\lambda\tau}]\lambda+(d_3+qE)[(b+d_1)(d_2+ \\ 2\alpha x_2^*+P)-br]+[br-(b+d_1)(d_2+2\alpha x_2^*)]cQ\cdot e^{-\lambda\tau}=0. \tag{4}$$

式(4)中: $P=\frac{\beta y^*(1+ny^*)}{(1+mx_2^*+ny^*)^2};Q=\frac{\beta x_2^*(1+mx_2^*)}{(1+mx_2^*+ny^*)^2}$ .由此,特征方程(4)可写成

$$M(\lambda)+N(\lambda)\cdot e^{-\lambda\tau}=0. \tag{5}$$

式(5)中: $M(\lambda)=\lambda^3+M_2\lambda^2+M_1\lambda+M_0;N(\lambda)=N_2\lambda^2+N_1\lambda+N_0;M_1=(b+d_1)(d_2+2\alpha x_2^*+P+d_3+qE)+(d_2+2\alpha x_2^*+P)(d_3+qE)-br;M_2=b+d_1+d_2+2\alpha x_2^*+P+d_3+qE;M_0=(d_3+qE)[(b+d_1)(d_2+2\alpha x_2^*+P)-br];N_2=-cQ;N_0=[br-(b+d_1)(d_2+2\alpha x_2^*)]cQ;N_1=-(b+d_1+d_2+2\alpha x_2^*)cQ$ .

当  $\tau=0$  时,式(5)变为  $\lambda^3+(M_2+N_2)\lambda^2+(M_1+N_1)\lambda+M_0+N_0=0$ .

由 Routh-Hurwitz 准则可知,如果条件  $H_5)$  成立,方程的所有特征根的实部为负,从而  $E_3(x_1^*,x_2^*,y^*)$  是局部渐近稳定的.进一步地,当  $M_0>N_0$  时,对任意  $\tau\geqslant 0,E_3(x_1^*,x_2^*,y^*)$  是局部渐近稳定的<sup>[18]</sup>;而当  $M_0<N_0$  时,系统可能会出现 Hopf 分支及其周期解.

2.3 Hopf 分支及其周期解

设  $\lambda=i\omega$  是方程(5)的根,并分离实部与虚部,则可得到

$$\left. \begin{aligned} \cos(\omega\tau) &= \frac{N_1\omega(M_1\omega-\omega^3)+(N_0-N_2\omega^2)(M_0-M_2\omega^2)}{-(N_0-N_2\omega^2)^2-(N_1\omega)^2}, \\ \sin(\omega\tau) &= \frac{N_1\omega(M_0-M_2\omega^2)-(N_0-N_2\omega^2)(M_1\omega-\omega^3)}{-(N_0-N_2\omega^2)^2-(N_1\omega)^2}. \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

平方后,可得到  $(M_0-M_2\omega^2)^2+(M_1\omega-\omega^3)^2=(N_0-N_2\omega^2)^2+(N_1\omega)^2$ .即

$$\omega^6+a_1\omega^4+a_2\omega^2+a_3=0. \tag{7}$$

式(7)中: $a_1=M_2^2-2M_1-N_2^2;a_2=M_1^2-N_1^2-2M_0M_2+2N_0N_2;a_3=M_0^2-N_0^2$ .令  $\omega^2=z$ ,则有

$$f(z)=z^3+a_1z^2+a_2z+a_3=0. \tag{8}$$

引理 1<sup>[19]</sup> 当  $a_3<0$  时,方程(8)至少有一个正实根;当  $a_3\geqslant 0$ ,且  $\Delta=a_1^2-3a_2\leqslant 0$  时,方程(8)没有

正实根;当  $a_3 \geq 0$ , 且  $\Delta = a_1^2 - 3a_2 > 0$  时, 方程(8)有正实根的充分必要条件是  $z^* = \frac{-a_1 + \sqrt{\Delta}}{3} > 0$ , 而且  $f(z^*) \leq 0$ .

当条件  $H_6$ ):  $M_0 < N_0$  成立时, 方程(8)至少有一个正根. 不妨设方程(8)有 3 个正根  $z_1, z_2, z_3$ . 则方程(9)有 3 个正根, 分别是  $\omega_1 = \sqrt{z_1}, \omega_2 = \sqrt{z_2}, \omega_3 = \sqrt{z_3}$ . 由式(6)可知

$$\tau_k^{(j)} = \frac{1}{\omega_k} \arccos \frac{N_1 \omega_k (M_1 \omega_k - \omega_k^3) + (N_0 - N_2 \omega_k^2) (M_0 - M_2 \omega_k^2)}{-(N_0 - N_2 \omega_k^2)^2 - (N_1 \omega_k)^2} + \frac{2j\pi}{\omega_k},$$

其中:  $k=1, 2, 3; j=0, 1, 2, \dots$ .

令  $\tau_0 = \lim_{k=1, 2, 3; j \geq 0} \{\tau_k^{(j)}\}, \omega_0 = \omega_k|_{\tau=\tau_0}$ . 对方程(5)两端计算  $\lambda$  关于  $\tau$  的导数, 可得到

$$(3\lambda^2 + 2M_2\lambda + M_1) \frac{d\lambda}{d\tau} + (2N_2\lambda + N_1) \cdot e^{-\lambda\tau} \frac{d\lambda}{d\tau} - (N_2\lambda^2 + N_1\lambda + N_0)(\tau e^{-\lambda\tau} \frac{d\lambda}{d\tau} + \lambda \cdot e^{-\lambda\tau}) = 0.$$

即有  $(\frac{d\lambda}{d\tau})^{-1} = -\frac{3\lambda^2 + 2M_2\lambda + M_1}{\lambda(\lambda^3 + M_2\lambda^2 + M_1\lambda + M_0)} + \frac{2N_2\lambda + N_1}{\lambda(N_2\lambda^2 + N_1\lambda + N_0)} - \frac{\tau}{\lambda}.$

所以有

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left[\frac{d\lambda}{d\tau}\right]_{\lambda=i\omega_0}^{-1} &= \operatorname{Re}\left[-\frac{3\lambda^2 + 2M_2\lambda + M_1}{\lambda(\lambda^3 + M_2\lambda^2 + M_1\lambda + M_0)}\right]_{\lambda=i\omega_0} + \operatorname{Re}\left[\frac{2N_2\lambda + N_1}{\lambda(N_2\lambda^2 + N_1\lambda + N_0)}\right]_{\lambda=i\omega_0} = \\ &= \frac{f'(z_0)}{N_1^2\omega_0^2 + (N_2\omega_0^2 - N_0)^2}. \end{aligned}$$

所以, 若条件  $H_7$ ):  $f'(z_0) \neq 0$  成立, 那么横截性条件满足. 根据 Hopf 分支存在定理<sup>[20]</sup>, 得到下列结论.

**定理 3** 对于模型(1), 如果条件  $H_6) \sim H_7)$  成立, 当  $\tau \in [0, \tau_0)$  时, 正平衡点  $E_3(x_1^*, x_2^*, y^*)$  局部渐近稳定; 当  $\tau \in (\tau_0, +\infty)$  时, 正平衡点  $E_3(x_1^*, x_2^*, y^*)$  不稳定. 进一步地, 当  $\tau = \tau_0$  时, 模型(1)在正平衡点  $E_3(x_1^*, x_2^*, y^*)$  产生 Hopf 分支, 即模型(1)在  $\tau = \tau_0$  附近产生一簇分支周期解.

3 数值仿真分析

选择参数值  $r=2, b=0.2, d_1=0.2, \beta=1.5, m=0.5, n=1, a=0.1, d_2=0.2, c=0.5, d_3=0.1$ , 当收获率和时滞不同时, 可能会出现捕食者灭绝、捕食者与幼成年食饵共存、Hopf 分支及周期解的情况.

3.1  $E_2$  的稳定性

根据以上参数值, 可得条件  $H_1$ ):  $br - d_2(b + d_1) = 0.32 > 0$ ;  $H_4$ ):  $qE > -d_3 + \frac{\beta c[br - d_2(b + d_1)]}{\alpha(b + d_1) + m[br - d_2(b + d_1)]} = 1.1$ , 根据定理 2, 取  $qE = 1.2$ , 对任意  $\tau \geq 0, E_2$  渐近稳定.

经计算得到捕食者灭绝的平衡点为  $E_2(40, 8, 0)$ , 分别对时滞  $\tau = 0, \tau = 2$  进行数值仿真, 得到了系统的轨线趋向于  $E_2$ , 如图 1 所示.

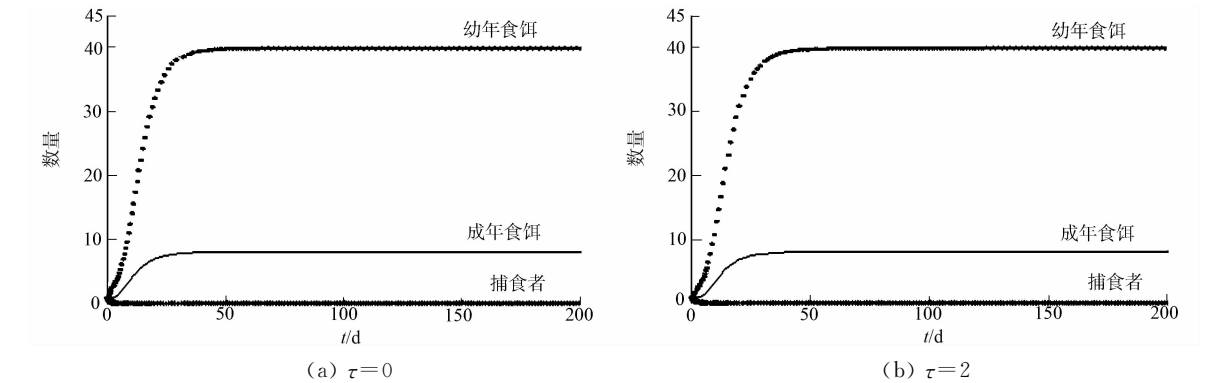


图 1  $E_2$  稳定性的数值仿真  
Fig. 1  $E_2$  stability of numerical simulation

3.2  $E_3$  的稳定性

根据以上的参数值, 取  $qE = 0.6$ , 可得捕食者与幼成年食饵共存的平衡点  $E_3(18.708\ 3, 3.741\ 7,$

1.138 1), 且条件  $H_5): M_2 + N_2 = 1.774 2 > 0, M_0 + N_0 = 0.059 5 > 0, (M_2 + N_2)(M_1 + N_1) - (M_0 + N_0) = 0.822 5 > 0, M_0 - N_0 = 0.038 8 > 0$  成立, 根据定理 2, 对任意  $\tau \geq 0, E_3$  渐近稳定. 分别对时滞  $\tau = 0, \tau = 2$  进行数值仿真, 得到了系统的轨线趋向于  $E_3$ , 如图 2 所示.

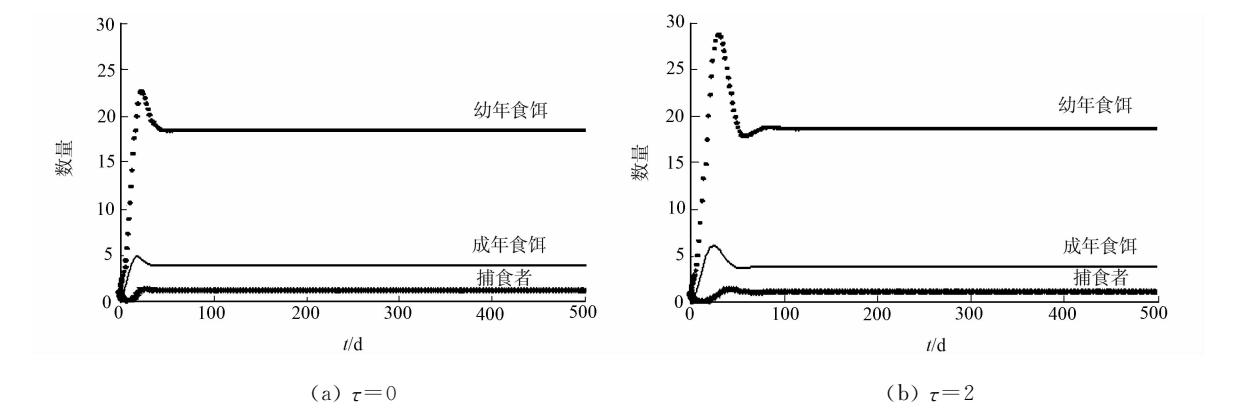


图 2  $E_3$  稳定性的数值仿真

Fig. 2  $E_3$  stability of numerical simulation

3.3  $E_3$  的渐近稳定性与 Hopf 分支及周期解

根据以上的参数值, 取  $qE = 0.1$ , 可得到捕食者与幼成年食饵共存的平衡点  $E_3(3.507 8, 0.701 6, 1.280 1), z_0 = 0.008 9, \tau_0 = 7.742 7$  且  $H_6): M_0 - N_0 = -0.029 3; H_7): f'(z_0) \neq 0$  成立, 根据定理 3, 当  $\tau \in [0, 7.742 7)$  时, 正平衡点  $E_3$  局部渐近稳定; 当  $\tau \in (7.742 7, +\infty)$  时,  $E_3$  不稳定; 而当  $\tau = 7.742 7$  时, 系统在正平衡点  $E_3$  产生 Hopf 分支, 即系统在  $\tau = 7.742 7$  附近产生一簇分支周期解. 取  $\tau = 7.5 \in (0, 7.742 7)$ , 系统的正平衡点  $E_3$  是局部渐近稳定的, 而取  $\tau = 8.0 \in (7.742 7, +\infty)$ , 系统的正平衡点  $E_3$  将失去稳定性并产生 Hopf 分支, 在正平衡点  $E_3$  处分支出一簇周期解, 如图 3 所示.

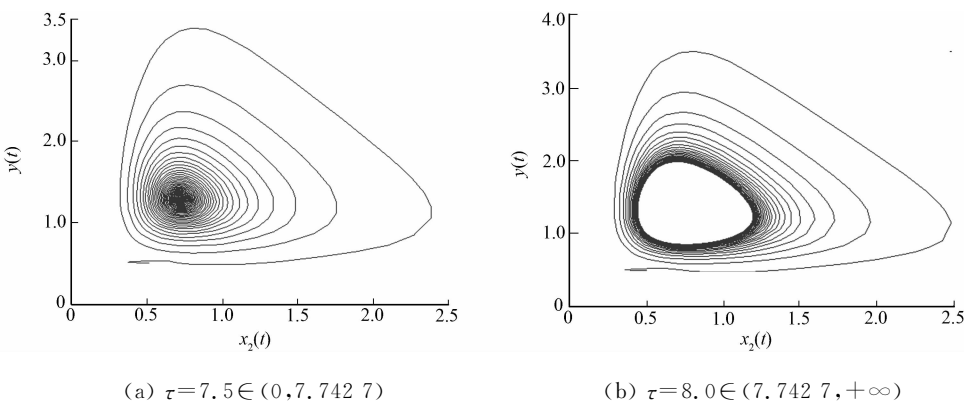


图 3  $E_3$  渐近稳定性与 Hopf 分支及周期解的数值仿真

Fig. 3  $E_3$  asymptotic stability and numerical simulation of Hopf bifurcation and periodic solution

4 结束语

研究收获和时滞对模型性态的影响, 用 Matlab 软件进行数值仿真验证了结论的正确性. 当进行不同的收获时, 可能会出现捕食者灭绝、捕食者与幼成年食饵共存等情况; 而当进行适当收获, 不同的时滞也可能导致模型出现不同的形态, 并最终趋向正平衡点和产生 Hopf 分支及周期解. 该研究可为今后对生物资源的开发和种群数量的收获提供宝贵的理论依据.

参考文献:

[1] HOLLING C S. The functional response of predator to prey density and its role in mimicry and population regulation [J]. *Memoirs of the Entomological Society of Canada*, 1965, 97(45): 1-60.  
[2] JOST C, ELLNER S P. Testing for predator dependence in predator-prey dynamics: A non-parametric approach[J]. *Proceedings of the Royal Society B Biological Sciences*, 2000, 267(1453): 1611-1620.

- [3] HASSELL M P, VARLEY C C. New inductive population model for insect parasites and its bearing on biological control[J]. *Nature*, 1969, 223(5211): 1133-1137.
- [4] CROWLEY P H, MARTIN E K. Functional response and interference within and between year classes of a dragonfly population[J]. *Journal of the North American Benthological Society*, 1989, 8(3): 211-221.
- [5] BEDDINGTON J R. Mutual interference between parasites or predators and its effect on searching efficiency[J]. *Journal of Animal Ecology*, 1975, 44(1): 331-40.
- [6] DEANGELIS D L, GOLDSTEIN R A, ONEILL R V. A model for trophic interaction[J]. *Ecology*, 1975, 56(4): 881-892.
- [7] CHEN Fengde, CHEN Yuming, SHI Jinlin. Stability of the boundary solution of a nonautonomous predator-prey system with the Beddington-DeAngelis functional response[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2008, 344(2): 1057-1067.
- [8] LIU Meng, WANG Ke. Global stability of stage-structured predator-prey models with Beddington-DeAngelis functional response[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2011, 16(9): 3792-3797.
- [9] PALLAV P J, MANDAL P K, LAHIRI K K. A delayed ratio-dependent predator-prey model of interacting populations with Holling type III functional response[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 76(1): 201-220.
- [10] CELIKÇ. Stability and Hopf Bifurcation in a delayed ratio dependent Holling-Tanner type model[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2015, 255: 228-237.
- [11] WANG Xuedi, PENG Miao, LIU Xiuyu. Stability and Hopf bifurcation analysis of a ratio-dependent predator-prey model with two time delays and Holling type III functional response[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2015, 268: 496-508.
- [12] XIA Yonghui, CAO Jinde, CHENG Suisun. Multiple periodic solutions of a delayed stage-structured predator-prey model with non-monotone functional responses[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2007, 31(9): 1947-1959.
- [13] CHAKRABORTY K, JANA S, KAR T K. Global dynamics and bifurcation in a stage structured prey-predator fishery model with harvesting[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2012, 218(18): 9271-9290.
- [14] ALOMARI J F M. The effect of state dependent delay and harvesting on a stage-structured predator-prey model[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2015, 271(C): 142-153.
- [15] LIU Chao, ZHANG Qingling, LI Jinna, *et al.* Stability analysis in a delayed prey-predator-resource model with harvest effort and stage structure[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, 238(5): 177-192.
- [16] BOONRANGSIMAN S, BUNWONG K, MOORE E J, *et al.* A bifurcation path to chaos in a time-delay fisheries predator-prey model with prey consumption by immature and mature predators[J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2016, 124: 16-29.
- [17] KUANG Yang. Delay differential equations with applications in population dynamics[M]. New York: Academic Press, 1993: 24-25.
- [18] XU Rui. Global stability and Hopf bifurcation of a predator-prey model with stage structure and delayed predator response[J]. *Nonlinear Dyn*, 2012, 67(2): 1683-1693.
- [19] SONG Yongli, HAN Maoan, WEI Junjie. Stability and Hopf bifurcation analysis on a simplified BAM neural network with delays[J]. *Physica D*, 2005, 200(3/4): 185-204.
- [20] HANSARD B D, KAZARINOFF N D, WAN Y H. Theory and applications of Hopf bifurcation[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1981: 1-132.

(责任编辑: 黄晓楠 英文审校: 黄心中)