

doi: 10.11830/ISSN.1000-5013.201703026



右半平面调和映照的卷积

吴 东 东, 陈 行 堤

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 研究右半平面调和映照卷积的单叶性判别和几何特征的刻画问题. 证明第二复伸张为 $w(z) = -z \times \frac{z-a}{1-az}$ ($0 \leq a \leq 1$) 的右半平面调和映照 $f(z)$, 其与典范右半平面调和映照 $f_0(z)$ 的卷积映照 $f * f_0$ 不仅属于 S_H^0 , 而且是沿实轴方向上是凸的.

关键词: 调和映照; 卷积; 凸映照; 单叶性判别; 几何特征; Cohn 法则

中图分类号: O 174.55 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5013(2017)03-0430-05

Convolution of Harmonic Mapping in Right-Half Plane

WU Dongdong, CHEN Xingdi

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: This paper is to give univalent criterions and to characterize the geometric properties for convolution of the right half-plane harmonic mapping $f_0(z)$ and $f(z)$. If $f_0(z)$ is canonical and the second complex dilatation of $f(z)$ is $w(z) = -z \frac{z-a}{1-az}$, then the convolution function $f * f_0 \in S_H^0$ and it is convex in the real axis provided $0 \leq a \leq 1$.

Keywords: harmonic mapping; convolution; convex mapping; univalent criterion; geometric properties; Cohn's rule

1 预备知识

定义 H 为单位圆盘 $D = \{z \mid |z| < 1\}$ 上满足标准化条件 $f(0) = 0, f_z(0) = 1$ 的复调和映照全体, 则 H 中的每个调和映照可表示为 $f = h + \bar{g}$. 其中: $h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$. Lewy^[1] 证明了在 D 上调和映照 $f = h + \bar{g}$ 是局部单叶且保向的, 当且仅当 $J_f > 0$. 因此, 局部单叶调和映照 $f = h + \bar{g}$ 当第二复伸张 $w(z)$ 在 D 上满足 $|w(z)| = \left| \frac{g'(z)}{h'(z)} \right| < 1$ 时是保向的. 用 S_H 表示 H 中单叶保向调和映照全体; 用 S_H^0 表示 S_H 中满足 $b_1 = f_z(0) = 0$ 的子集^[2]; 用 K_H^0 表示 S_H^0 中像区域为凸区域的子集.

解析函数 $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ 和 $F(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} A_n z^n$ 的卷积定义为 $f * F = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n A_n z^n$; 两个调和函数 $f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=2}^{\infty} \bar{b}_n \bar{z}^n$ 和 $F(z) = H(z) + \overline{G(z)} = z + \sum_{n=2}^{\infty} A_n z^n + \sum_{n=2}^{\infty} \bar{B}_n \bar{z}^n$

收稿日期: 2016-09-05

通信作者: 陈行堤(1976-), 男, 教授, 博士, 主要从事函数论的研究. E-mail: chxtt@hqu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11471128); 福建省自然科学基金资助项目(2014J01013); 华侨大学中青年教师科研提升计划项目(ZQN-YX110); 华侨大学研究生科研创新能力培育计划项目(2016 年度)

的卷积定义为 $f * F = h * H + \overline{g * G} = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n A_n z^n + \sum_{n=2}^{\infty} \overline{b_n B_n z^n}$.

如果函数 $f = h + \overline{g} \in S_H^0$ 是 D 到右半平面 $R = \{w : \operatorname{Re}(w) > -1/2\}$ 上的映照, 则有 $h(z) + g(z) = z/(1-z)$. 用 R_H^0 表示所有这种映照的全体, 显然 R_H^0 是 K_H^0 的一个子集. 如果 $f_0 = h_0 + \overline{g_0} \in R_H^0$ 且第二复伸张 $w_0(z) = -z$, 利用剪切构造方法可得

$$\begin{aligned} h_0(z) &= \frac{z - z^2/2}{(1-z)^2} = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+n}{2} z^n = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{1-z} + \frac{z}{(1-z)^2} \right), \\ g_0(z) &= \frac{-z^2/2}{(1-z)^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1-n}{2} z^n = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{1-z} - \frac{z}{(1-z)^2} \right). \end{aligned}$$

称 f_0 为典范右半平面调和映照. 如果 $f = h + \overline{g} \in H$, 那么它与典范右半平面映照 f_0 的卷积可表示为

$$f_0 * f = h_0 * h + \overline{g_0 * g} = \frac{h + zh'}{2} + \overline{\frac{g - zg'}{2}}. \tag{1}$$

两个调和映照的卷积映照的单叶性判别得到不少学者的研究^[3-9]. Dorff^[5]证明了如下定理.

定理 A 设 $f_1, f_2 \in R_H^0$. 若 $f_1 * f_2$ 是局部单叶保向的, 那么, $f_1 * f_2 \in S_H^0$ 且沿实轴方向是凸的.

Dorff 等^[6]证明了如下的引理以及两个定理.

引理 A 如果 $f = h + \overline{g} \in R_H^0$, 并且 f 的第二复伸张为 $w(z)$, 则 $f_0 * f$ 的第二复伸张为

$$\widetilde{w}(z) = -z \frac{w^2(z) + [w(z) - \frac{1}{2}w'(z)z] + \frac{1}{2}w'(z)}{1 + [w(z) - \frac{1}{2}w'(z)z] + \frac{1}{2}w'(z)z^2}. \tag{2}$$

定理 B 设 $f = h + \overline{g} \in R_H^0$, 并且 f 的第二复伸张为 $w(z) = e^{i\theta}z^n$, 其中, $n \in \mathbf{Z}^+$ 和 $\theta \in \mathbf{R}$. 如果 $n = 1, 2$, 那么, $f_0 * f \in S_H^0$, 并且沿实轴方向是凸的.

定理 C 设 $f = h + \overline{g} \in R_H^0$, 并且 f 的第二复伸张为 $w(z) = \frac{z+a}{1+az}$, 其中, $a \in (-1, 1)$. 那么 $f_0 * f \in S_H^0$, 并且沿实轴方向是凸的.

文中继续研究调和映照卷积的单叶性判别问题, 证明当调和映照 $f(z)$ 的第二复伸张 $w(z) = -z \times \frac{z-a}{1-az}$, $a \in [0, 1]$ 时, 卷积 $f_0 * f \in S_H^0$, 并且沿实轴方向上是凸的.

2 主要结果及证明

引理 1 假设 f_0 为典范右半平面调和映照. 如果 $f = h + \overline{g} \in R_H^0$, 且其第二复伸张为 $w(z) = -z \times \frac{z-a}{1-az}$, 其中, $a \in [0, 1]$, 那么 $f_0 * f$ 的第二复伸张为

$$\widetilde{w}(z) = z \frac{(z+A)(z+B)(z+C)}{(1+\overline{A}z)(1+\overline{B}z)(1+\overline{C}z)}. \tag{3}$$

式(3)中: $-A, -B, -C$ 是三次多项式

$$t(z) = z^3 + (1 - \frac{3a}{2})z^2 + (1-a)z - \frac{a}{2} \tag{4}$$

的 3 个根(A, B, C 可能相等).

证明 由 $w(z) = -z \frac{z-a}{1-az}$, 可得 $w'(z) = \frac{az^2 - 2z + a}{(1-az)^2}$. 由式(2), $f_0 * f$ 的第二复伸张为

$$\begin{aligned} \widetilde{w}(z) &= -z \frac{z^2 \left(\frac{z-a}{1-az} \right)^2 + \left(-z \frac{z-a}{1-az} - \frac{1}{2} \frac{az^2 - 2z + a}{(1-az)^2} z \right) + \frac{1}{2} \frac{az^2 - 2z + a}{(1-az)^2}}{1 + \left(-z \frac{z-a}{1-az} - \frac{1}{2} \frac{az^2 - 2z + a}{(1-az)^2} z \right) + \frac{1}{2} \frac{az^2 - 2z + a}{(1-az)^2} z^2} = \\ &= -z \frac{-\frac{1}{2}(z-1)(-2z^3 + 3az^2 - 2z^2 + 2az - 2z + a)}{\frac{1}{2}(z-1)(-2 + 3az - 2z + 2az^2 - 2z^2 + az^3)} = \end{aligned}$$

$$z^2 + (1 - \frac{3}{2}a)z^2 + (1 - a)z - \frac{a}{2} \over 1 + (1 - \frac{3}{2}a)z + (1 - a)z^2 - \frac{a}{2}z^3} = z \frac{t(z)}{t^*(z)}.$$

其中: $t^*(z) = 1 + (1 - \frac{3}{2}a)z + (1 - a)z^2 - \frac{a}{2}z^3$.

由于 $-A, -B, -C$ 是式(4)的 3 个根, 则有 $t(z) = (z + A)(z + B)(z + C), t^*(z) = z^3 \times \overline{t(1/\bar{z})} = z^3 \overline{(1/\bar{z} + A)(1/\bar{z} + B)(1/\bar{z} + C)} = (1 + \bar{A}z)(1 + \bar{B}z)(1 + \bar{C}z)$. 因此, $f_0 * f$ 的第二复伸张 $\tilde{w}(z)$ 具有式(3)的形式.

下面引用 Cohn 法则^[10]的引理 B.

引理 B 假设 $f(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n, f^*(z) = z^n \overline{f(1/\bar{z})} = \overline{a_n} + \overline{a_{n-1}}z + \cdots + \overline{a_0}z^n, p$ 和 s 分别为 $f(z)$ 在单位圆盘 D 内和单位圆周 $|z| = 1$ 上的零点个数. 如果有 $|a_0| < |a_n|$, 那么, $f_1(z) = (\bar{a}_nf(z) - a_0f^*(z))/z$ 为 $n - 1$ 次多项式, 并且 $f_1(z)$ 在单位圆盘 D 内和单位圆周上的零点个数分别为 $p_1 = p - 1$ 和 $s_1 = s$.

定理 1 假设 f_0 为典范右半平面调和映照. 如果 $f = h + \bar{g} \in R_H^0$ 且具有第二复伸张 $w(z) = -z \times \frac{z - a}{1 - az}$, 其中, $a \in [0, 1]$, 那么, $f_0 * f \in S_H^0$, 并且沿实轴方向是凸的.

证明 假设 $-A, -B, -C$ 是式(4)的 3 个根, 则有

$$t(z) = z^3 + (1 - \frac{3a}{2})z^2 + (1 - a)z - \frac{a}{2} = (z + A)(z + B)(z + C).$$

从而有 $|ABC| = |a/2| \leq 1/2 < 1$, 即 $-A, -B, -C$ 这 3 个根中至少有一个根在单位圆盘 D 内.

当 $a \in (0, 1]$ 时, 由 $t(z)$ 可构造

$$t_1(z) = \frac{t(z) - (-\frac{a}{2})t^*(z)}{z} = (1 - \frac{a^2}{4})z^2 + (-\frac{a^2}{2} - a + 1)z + (-\frac{3a^2}{4} - \frac{a}{2} + 1).$$

这里 $t^*(z) = 1 + (1 - \frac{3a}{2})z + (1 - a)z^2 - \frac{a}{2}z^3$. 因为

$$(-\frac{3a^2}{4} - \frac{a}{2} + 1)^2 - (1 - \frac{a^2}{4})^2 = \frac{1}{4}a(a + 1)(2a^2 + a - 4) < 0,$$

所以有 $|-3a^2/4 - a/2 + 1| < |1 - a^2/4|$. 再应用 $t_1(z)$ 可构造

$$t_2(z) = \frac{(1 - \frac{a^2}{4})t_1(z) - (-\frac{3a^2}{4} - \frac{a}{2} + 1)t_2^*(z)}{z} = (a + \frac{3a^2}{4} - \frac{3a^3}{4} - \frac{a^4}{2})z + (\frac{a}{2} - \frac{3a^3}{4} - \frac{a^4}{4}).$$

其中: $t_2^*(z) = (-\frac{3a^2}{4} - \frac{a}{2} + 1)z^2 + (-\frac{a^2}{2} - a + 1)z + (1 - \frac{a^2}{4})$. 显然, $t_2(z)$ 的零点为 $z_0 = \frac{-2 + 2a + a^2}{-4 + a + 2a^2}$.

当 $a \in (0, 1]$ 时, 有

$$(-2 + 2a + a^2)^2 - (-4 + a + 2a^2)^2 = -3(a + 1)(a - 1)(a + 2)(a - 2) \leq 0.$$

从而有 $|z_0| \leq 1, z_0$ 必在闭单位圆盘 \bar{D} 上. 所以 $z_2(z)$ 的零点必在闭单位圆盘 \bar{D} 上. 由引理 B, $t_1(z)$ 必有两个根在闭单位圆盘 \bar{D} 上, 再由引理 B 有 $t(z)$ 的 3 个根都在闭单位圆盘 \bar{D} 上. 又因为 $t(z)$ 至少有一个根在单位圆盘 D 内, 从而有 $|\tilde{w}(z)| < 1$ 对所有 $z \in D$ 都成立. 又由假设 $f, f_0 \in R_H^0$, 从而根据定理 A 可知 $f_0 * f \in S_H^0$, 并且沿实轴方向是凸的.

另外, 当 $a = 0$ 时, 第二复伸张 $w(z) = -z^2$ 为定理 B 中 $\theta = \pi, n = 2$ 的特殊情形. 因此, $a \in [0, 1]$ 时定理 1 成立.

例 1 若 $f = h + \bar{g} \in R_H^0$, 并且其第二复伸张为 $w(z) = -z \frac{z - 1/2}{1 - z/2}$, 则有

$$h + g = \frac{z}{1 - z}, \quad \frac{g'}{h'} = -z \frac{z - 1/2}{1 - z/2}.$$

对 $h + g = z/(1 - z)$ 进行求导, 可得

$$h' = \frac{1-z/2}{(1+z)(1-z)^3} = \frac{1}{16}(-\frac{4}{(z-1)^3} + \frac{6}{(z-1)^2} + \frac{3}{1+z} + \frac{3}{1-z}),$$
$$g' = \frac{z/2-z^2}{(1+z)(1-z)^3} = \frac{1}{4}(\frac{1}{(z-1)^3} + \frac{5}{2(z-1)^2} - \frac{3}{4(1+z)} - \frac{3}{4(1-z)}).$$

进一步对 h', g' 求积分可得

$$h = \frac{1}{16}(\frac{2}{(z-1)^2} - \frac{6}{z-1} - 8 + 3\ln(1+z) - 3\ln(1-z)),$$
$$g = \frac{1}{4}(-\frac{1}{2(z-1)^2} - \frac{5}{2(z-1)} - \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\ln(1+z) + \frac{3}{4}\ln(1-z)).$$

利用卷积的定义 $f_0 * f = h_0 * h + \overline{g_0 * g} = H + \overline{G}$, 有

$$H = h_0 * h = \frac{h + zh'}{2} = \frac{3}{32}\ln(\frac{1+z}{1-z}) + \frac{z(-13+8z+5z^2-4z^3)}{16(z-1)^3(1+z)},$$
$$G = g_0 * g = \frac{g - zg'}{2} = \frac{3}{32}\ln(\frac{1-z}{1+z}) + \frac{z(3-8z+5z^2+4z^3)}{16(z-1)^3(1+z)}.$$

对 H 和 G 求导, 可得 $H' = \frac{4+z+2z^2-z^3}{4(z-1)^4(1+z)^2}, G' = z \frac{-1+2z+z^2+4z^3}{4(z-1)^4(1+z)^2}$. 故 $f_0 * f$ 的第二复伸张为

$$\widetilde{w} = \frac{G'}{H'} = z \frac{-1+2z+z^2+4z^3}{4+z+2z^2-z^3}.$$

而且有

$$F(z) = H + \overline{G} = \operatorname{Re}(\frac{z(-1+z-z^3/2)}{(z-1)^3(1+z)}) + i\operatorname{Im}(\frac{3}{16}\ln(\frac{1+z}{1-z}) + \frac{5}{8}\frac{z}{(z-1)^2}).$$

通过 Mathematica 软件, f 和 $f_0 * f$ 分别把单位圆盘映成的图像, 如图 1 所示.

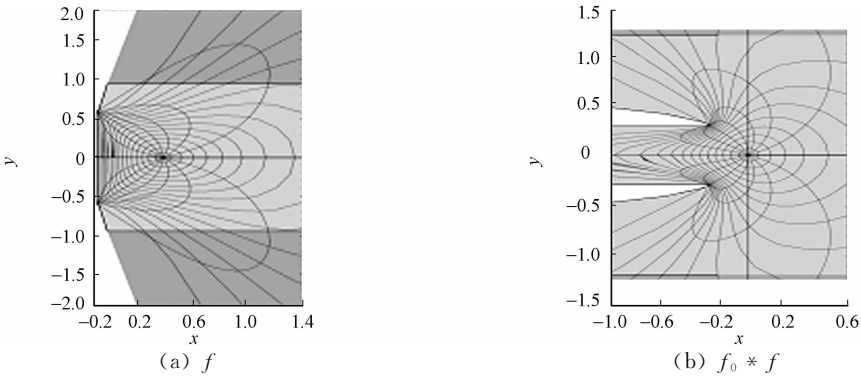


图 1 单位圆盘映成的图像

Fig. 1 Mapping unit disk onto domains

令 $\zeta = \frac{1+z}{1-z} = \xi + i\eta (\zeta > 0)$, 则 $z = \frac{\zeta-1}{1+\zeta}, z-1 = \frac{-2}{1+\zeta}, z+1 = \frac{2\zeta}{1+\zeta}$. 从而有

$$\frac{z(-1+z-z^3/2)}{(-1+z)^3(1+z)} = \frac{\zeta^3}{32} + \frac{5}{16}\zeta - \frac{1}{4} - \frac{3}{32\zeta} =$$
$$\frac{1}{32}(\xi^3 + i3\xi^2\eta - 3\xi\eta^2 - i\eta^3) + \frac{5}{16}(\xi + i\eta) - \frac{1}{4} - \frac{3}{32}\frac{\xi - i\eta}{\xi^2 + \eta^2}.$$

因此, 可得

$$\operatorname{Re}(\frac{z(-1+z-z^3/2)}{(-1+z)^3(1+z)}) = \frac{1}{32}(\xi^3 - 3\xi\eta^2) + \frac{5}{16}\xi - \frac{1}{4} - \frac{3}{32}\frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}.$$

类似的有

$$\operatorname{Im}(\frac{3}{16}\ln(\frac{1+z}{1-z}) + \frac{5}{8}\frac{z}{(z-1)^2}) = \operatorname{Im}(\frac{3}{16}\ln \zeta + \frac{5(\zeta^2-1)}{32}) =$$
$$\operatorname{Im}(\frac{3}{16}\ln(\xi + i\eta) + \frac{5}{32}(\xi^2 - \eta^2 + i2\xi\eta - 1)) = \frac{3}{16}\arctan \frac{\eta}{\xi} + \frac{5}{16}\xi\eta,$$

所以有

$$F(z) = \operatorname{Re}\left(\frac{\zeta^3}{32} + \frac{5}{16}\zeta - \frac{1}{4} - \frac{3}{32}\zeta\right) + i\operatorname{Im}\left(\frac{3}{16}\ln \zeta + \frac{5(\zeta^2 - 1)}{32}\right) =$$
$$\frac{1}{32}(\xi^3 - 3\xi\eta^2 + 10\xi - 8 - \frac{3\xi}{\xi^2 + \eta^2}) \frac{3i}{16}(\arctan \frac{\eta}{\xi} + \frac{5}{3}\xi\eta).$$

(5)

当 $\xi>0, \eta=0$ 时, $F(z)$ 单调递增, 令 $\arctan \frac{\eta}{\xi} + \frac{5}{3}\xi\eta=c, \xi>0, \eta>0$, 由极坐标变换 $\xi=r\cos \theta, \eta=r\sin \theta$, 可得 $\theta + \frac{5}{3}r^2\sin \theta\cos \theta=c, 0<\theta<\frac{\pi}{2}$. 因此有 $r=\sqrt{\frac{3(c-\theta)}{5\sin \theta\cos \theta}}, \xi=\sqrt{\frac{3}{5}(c-\theta)\cot \theta}, \eta=\sqrt{\frac{3}{5}(c-\theta)\tan \theta}, 0<\theta<\min\{c, \frac{\pi}{2}\}$. 将 ξ, η 代入式(5), 可得

$$F(z) = \frac{1}{32}\{[\frac{3}{5}(c-\theta)\cot \theta]^{3/2} - \frac{9}{5}(c-\theta)\sqrt{\frac{3}{5}(c-\theta)\tan \theta} +$$
$$10\sqrt{\frac{3}{5}(c-\theta)\cot \theta} - 8 - \frac{\sqrt{15(c-\theta)\cot \theta}}{(c-\theta)\cot \theta + (c-\theta)\tan \theta}\} + \frac{3i}{16}c = u(c, \theta) + \frac{3i}{16}c.$$

当 $0<c<\pi/2$ 时, 有 $\theta\in(0, c), \lim_{\theta\rightarrow 0^+} u(c, \theta)=+\infty, \lim_{\theta\rightarrow c^-} u(c, \theta)=-\infty$; 当 $c=\pi/2$ 时, 有 $\theta\in(0, c), \lim_{\theta\rightarrow 0^+} u(c, \theta)=+\infty, \lim_{\theta\rightarrow c^-} u(c, \theta)=-1/4$; 而当 $c>\pi/2$ 时, $\theta\in(0, \pi/2), \lim_{\theta\rightarrow 0^+} u(c, \theta)=+\infty, \lim_{\theta\rightarrow \pi^-/2} u(c, \theta)=-\infty$. 从而有 $F=f_0 * f=H+\overline{G}$ 的图像是沿实轴方向上凸的.

参考文献:

[1] LEWY H. On the nonvanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings[J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1936, 42(10): 689-692.

[2] CLUNIE J G, SHEIL-SMALL T. Sheil-small, harmonic univalent functions[J]. Annales Academi Scientiarum Fennic Series A I, 1984, 9(1): 3-25.

[3] PONNUSAMY S, SINGH V. Convolution properties of some classes of analytic functions[J]. Journal of Mathematical Sciences, 1998, 89(1): 1008-1020.

[4] KUMAR R, DORFF M, GUPTA S, *et al.* Convolution properties of some harmonic mappings in the right half-plane [J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2016, 39(1): 439-455.

[5] DORFF M. Convolutions of planar harmonic convex mappings[J]. Complex Variables Theory and Application An International Journal, 2001, 45(3): 263-271.

[6] DORFF M, NOWAK M, WOLOSZKIEWICZ M. Convolutions of harmonic convex mappings[J]. Complex Variables and Elliptic Equations, 2012, 57(5): 489-503.

[7] LI Liulan, PONNUSAMY S. Solution to an open problem on convolutions of harmonic mappings[J]. Complex Variables and Elliptic Equations, 2013, 58(12): 1647-1653.

[8] JIANG Yueping, RASILA A, SUN Yong. A note on convexity of convolutions of harmonic mappings[J]. Bulletin of the Korean Mathematical Society, 2015, 52(6): 1925-1935.

[9] LI Liulan, PONNUSAMY S. Convolutions of slanted half-plane harmonic mappings[J]. Analysis (Munich), 2013, 33(2): 159-176.

[10] RAHMAN Q I, SCHMEISSER G. Analytic theory of polynomials, London mathematical society monographs new series[M]. Oxford: Oxford University Press, 2002: 375-376.

(责任编辑: 钱筠

英文审校: 黄心中)