

doi:10.11830/ISSN.1000-5013.201703005



离散多智能体系统分组一致性分析

林瑜阳, 李钟慎

(华侨大学 机电及自动化学院, 福建 厦门 361021)

摘要: 在有向拓扑结构下,研究离散多智能体系统的分组一致问题,提出无入度平衡假设条件的控制协议设计方法.首先,根据系统模型,设计离散多智能体系统的分组一致控制协议.其次,利用代数图论和矩阵论,分析并得到离散多智能体系统实现分组一致的充要条件.最后,仿真结果验证了理论分析结论的正确性.数值仿真结果表明:系统实现分组一致仅要求有向图 G_n 含有一个有向生成树,不要求拓扑结构满足入度平衡条件.

关键词: 多智能体系统; 离散时间系统; 入度平衡; 分组一致性

中图分类号: TP 273

文献标志码: A

文章编号: 1000-5013(2017)03-0306-06

Group Consensus Analysis of Discrete-Time Multi-Agent Systems

LIN Yuyang, LI Zhongshen

(College of Mechanical Engineering and Automation, Huaqiao University, Xiamen 361021, China)

Abstract: In this paper, the protocol design method without in-degree balanced assumption was presented under the directed graph topology to investigate the grouping consensus problem for a class of discrete-time multi-agent systems. Firstly, based on the model of discrete-time multi-agent systems, a grouping consensus protocol was designed. Then, according to the algebraic graph theory and the matrix theory, the grouping consensus problem was studied. The sufficient and necessary condition of group consensus for the discrete-time multi-agent systems was obtained. Finally, simulation results demonstrated that the grouping consensus of the systems only required that the directed graph G_n had a direct spanning tree however the in-degree balanced assumption was not necessary.

Keywords: multi-agent systems; discrete-time systems; in-degree balanced; group consensus

自然界中生物群体的群集现象,如蚂蚁聚集、大雁编队飞行等,均呈现出整体一致行为.多智能体一致性问题来源于自然界的群集现象,是指系统中所有个体通过局部间的彼此通信,最终状态收敛至一个值.一致性问题的研究可揭示生物群集现象的内在规律,解释生物群体行为^[1-2].同时,由于多智能体系统比单一系统更具有灵活性、经济性,其一致性的研究在无人机编队控制、通信网络拥塞控制、机器人设计和搜索优化等领域得到广泛地应用^[3-5].近年来,多位学者从智能体动态模型、通信拓扑和一致性协议等 3 个基本方面对一致性问题展开大量研究^[6-10].考虑实际问题的复杂性,个体的最终状态往往不能收敛至一个值.当个体最终状态收敛至多个值时,一致性问题转化为分组一致问题,分组一致问题是一致性问题的推广,在理论研究上也具有重要意义^[11-18].然而,相关的研究均基于入度平衡假设条件展开,忽略了组间彼此影响.本文研究无入度平衡条件下离散多智能体系统的分组一致问题,提出分组一致控制

收稿日期: 2016-04-11

通信作者: 李钟慎(1971-),男,教授,博士,主要从事先进控制理论与控制工程的研究. E-mail: lzscyw@hqu.edu.cn.

基金项目: 福建省自然科学基金资助项目(2013J05077); 中央高校基本科研业务基金资助项目(JB-ZR1107); 福建省厦门市集美区科技计划项目(20137C01); 华侨大学研究生科研创新能力培育计划项目(2014 年度)

策略,得到实现分组一致的充要条件,并通过数值仿真验证所得结论的正确性.

1 预备知识与问题描述

令 $\mathbf{1}_n$ 为所有元素均为 1 的 n 维列向量;非负矩阵为所有元素都非负的矩阵;随机矩阵是行和为 1 的非负矩阵;非周期不可分矩阵(SIA)矩阵为满足 $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{A}^m \rightarrow \mathbf{1}_n \mathbf{v}^T$ 的一个随机矩阵 \mathbf{A} .

考虑具有 n 个智能体的系统,智能体之间的通信拓扑可用有向图 $G = \{V, E\}$ 表示. 其中,节点集合 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$;边集合 $E \subseteq V \times V$. 节点 v_i 的邻居集合为 $N_i = \{v_j \in V: (v_i, v_j) \in E\}$. 图 G 的邻接矩阵 $\mathbf{A} = \{a_{i,j}\} \in \mathbf{R}^{n \times n}$. 其中,矩阵元素 $a_{i,j}$ 为与有向边 (v_i, v_j) 对应的连接权重. 当 $(v_i, v_j) \in E$ 时, $a_{i,j} > 0$;反之, $a_{i,j} = 0$. 如果 $(v_i, v_j) \in E$,则表示从节点 v_i 有一条有向路径指向节点 v_j ,节点 v_i 称为父节点,节点 v_j 称为子节点. 如果有向图中除了一个节点(根节点)没有父节点外,其余每个节点有且仅有一个父节点,且根节点可以通过一条有向路径到达其余所有节点,则称该图为有向树. 当一个有向图中的有向树含有与该图相同的节点集,则称该有向树为有向图的有向生成树. 在包含多个分组的多智能体系统中,节点入度平衡条件要求一个分组中每个节点到其他分组中所有节点的邻接权重和等于零.

包含 n 个智能体的一阶离散系统模型为

$$x_i[k+1] = x_i[k] + u_i[k], \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

式(1)中: $k \in \{0, 1, \dots\}$ 为离散时间序列; $x_i \in \mathbf{R}^m$, $u_i \in \mathbf{R}^m$ 分别表示第 i 个智能体的状态及控制输入. 不失一般性,设 $m=1$,对于 $m>1$ 的情况,通过 Kronecker 算子容易进行扩展.

设集合 $\{X_1, X_2, \dots, X_p\}$ ($p>1$) 为集合 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 的 p 个子集. 如果 $X_i \neq \emptyset$, $X_i \cap X_j = \emptyset$, $\bigcup_{i=1}^p X_i = X$,则称集合 $\{X_1, X_2, \dots, X_p\}$ 是集合 X 的一个分割. 对 $x_i \in X$,用 $X_{\tilde{i}}$ 表示 x_i 所在的分组,即对任意 x_i ,有 $x_i \in X_{\tilde{i}}, 1 \leq \tilde{i} \leq p$. 显然,如果 x_i 和 x_j 属于相同分组,则 $\tilde{i} = \tilde{j}$.

考虑系统(1),假设 $\{X_1, X_2, \dots, X_p\}$ 为所有智能体的一个分割,给出如下分组一致的定义.

定义 1 [11] 对于给定的初始条件 $\mathbf{x}[0] = [x_1[0], x_2[0], \dots, x_n[0]]^T, x_i[0] \in \mathbf{R}$. 如果存在一个分割 $\{X_1, X_2, \dots, X_p\}$,使当 $\tilde{i} = \tilde{j}$ 时,有 $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_i[k] - x_j[k]| = 0$;当 $\tilde{i} \neq \tilde{j}$ 时,有 $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_i[k] - x_j[k]| \neq 0$,则称系统(1)可实现分组一致.

针对一阶离散多智能体系统(1),设计包含 p 个分组的一致性协议,即

$$u_i[k] = \sum_{j \in X_{\tilde{i}}} a_{i,j} (x_j[k] - x_i[k]) + \sum_{j \notin X_{\tilde{i}}} a_{i,j} (x_j[k] - x_i[k] - e_{j,i}). \quad (2)$$

式(2)中: $a_{i,j}$ 为随机矩阵 $\mathbf{A} = [a_{i,j}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 的第 (i, j) 个元素; $X_{\tilde{i}}$ 为节点 v_i 所在的分组;当节点 v_i 和 v_j 位于不同分组时,定义 $e_{j,i} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_j[k] - \lim_{k \rightarrow \infty} x_i[k]$,以刻画不同分组之间收敛值的差. 由一致性协议(2),系统(1)可写为

$$x_i[k+1] = x_i[k] + \sum_{j \in X_{\tilde{i}}} a_{i,j} (x_j[k] - x_i[k]) + \sum_{j \notin X_{\tilde{i}}} a_{i,j} (x_j[k] - x_i[k] - e_{j,i}). \quad (3)$$

当节点 v_i 和 v_j 位于相同分组时,有 $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_i[k] - x_j[k]| = 0$;反之,有 $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_i[k] - x_j[k]| \neq 0$,则称系统(3)实现分组一致.

2 主要结果

针对离散多智能体系统,分析在一致性协议(2)下实现分组一致需满足的充要条件. 首先,给出若干引理.

引理 1 [19] 设矩阵 $\mathbf{A} = [a_{i,j}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$,令

$$R'_i(\mathbf{A}) \equiv \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}|, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

表示矩阵 \mathbf{A} 的去心绝对行和,则 \mathbf{A} 的所有特征值都落在 n 个圆盘的区域 $G(\mathbf{A})$ 中,其中,

$$G(\mathbf{A}) \equiv \bigcup_{i=1}^n \{z \in \mathbf{C}: |z - a_{i,i}| \leq R'_i(\mathbf{A})\}$$

为复平面上以 $a_{i,i}$ 为圆心, 以 $R'_i(\mathbf{A})$ 为半径的闭圆盘.

引理 2^[8] 设矩阵 $\mathbf{A}=[a_{i,j}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$. 其中, $a_{i,i} \leq 0, a_{i,j} \geq 0, \forall i \neq j$, 且对任意 i 有 $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 0$, 则 \mathbf{A} 至少有一个对应于特征向量 \mathbf{I}_n 的零特征值, 且所有非零特征值都具有负实部. 此外, 当且仅当 \mathbf{A} 对应的有向图 $G(\mathbf{A})$ 含有一个有向生成树时, \mathbf{A} 有且仅有一个零特征值.

定理 1 设非负矩阵 $\mathbf{A}=[a_{i,j}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 具有相同恒定正行和, 则 μ 为矩阵 \mathbf{A} 的一个特征值, 对应的特征向量为 \mathbf{I}_n , 且矩阵 \mathbf{A} 的谱半径 $\rho(\mathbf{A}) = \mu$. 当且仅当矩阵 \mathbf{A} 对应的有向图 $G(\mathbf{A})$ 含有一个有向生成树时, 特征值 μ 的代数重数为 1. 若 $a_{i,i} > 0, i=1, 2, \dots, n$, 则对所有 $\lambda \neq \mu$ 的特征值, $|\lambda| < \mu$. 如果 $G(\mathbf{A})$ 含有一个有向生成树, 且 $a_{i,i} > 0, i=1, 2, \dots, n$, 则 μ 为矩阵 \mathbf{A} 的最大特征单根.

证明 定理第 1 部分, 矩阵 \mathbf{A} 具有相同恒定正行和 μ , 即有 $\mathbf{A}\mathbf{I}_n = \mu\mathbf{I}_n, \mu$ 为矩阵 \mathbf{A} 的一个特征值, 对应的特征向量为 \mathbf{I}_n , 由引理 1 可知, \mathbf{A} 的所有特征值都落在 n 个圆盘的区域 $G(\mathbf{A})$ 中, 圆盘区域 $G(\mathbf{A})$ 为

$$G(\mathbf{A}) \equiv \bigcup_{i=1}^n \{z \in \mathbf{C}: |z - a_{i,i}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}|\}, \quad (4)$$

又 $\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = \mu$, 因此, $\rho(\mathbf{A}) = \mu$.

定理第 2 部分, 需对充要性进行论证.

设矩阵 $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \mu\mathbf{I}_n$, 有 $\lambda_i(\mathbf{A}) = \lambda_i(\mathbf{B}) + \mu, i=1, 2, \dots, n$, $\lambda_i(\cdot)$ 表示第 i 个特征值. 若矩阵 \mathbf{A} 对应的有向图 $G(\mathbf{A})$ 含有一个有向生成树, 则 \mathbf{B} 对应的有向图 $G(\mathbf{B})$ 也含有一个有向生成树. 又因为矩阵 \mathbf{B} 满足引理 2 的条件, 可知 \mathbf{B} 具有一个代数重数是 1 的零特征值, 即矩阵 \mathbf{A} 具有代数重数为 1 的特征值 μ .

矩阵 \mathbf{A} 的特征值 μ 的代数重数为 1, 假设 \mathbf{A} 对应的有向图 $G(\mathbf{A})$ 不含有一个有向生成树, 由引理 2 可知, 矩阵 $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \mu\mathbf{I}_n$ 的零特征值个数不为 1, 即矩阵 \mathbf{A} 特征值 μ 的个数不为 1, 与条件矛盾, 因此, 有向图 $G(\mathbf{A})$ 含有一个有向生成树.

定理第 3 部分, 如果 $a_{i,i} > 0$, 易知集合(4)包含于圆形区域 $\{z \in \mathbf{C}: |z| = \mu\}$ 中, 且 n 个圆盘的边界仅在 $z = \mu$ 处与圆形区域有一个交点. 因此, 对 \mathbf{A} 的所有 $\lambda \neq \mu$ 的特征值, 均有 $|\lambda| < \mu$.

由定理第 2 部分和第 3 部分, 可直接得到第 4 部分的结论.

推论 1 设随机矩阵 $\mathbf{A}=[a_{i,j}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 当且仅当 \mathbf{A} 对应的有向图 $G(\mathbf{A})$ 含有一个有向生成树时, 矩阵 \mathbf{A} 具有代数重数为 1 的特征值 $\lambda=1$, 且 $\rho(\mathbf{A})=1$. 若 $a_{i,i} > 0, i=1, 2, \dots, n$, 则对所有非 1 特征值而言, $|\lambda| < 1$. 如果 $G(\mathbf{A})$ 含有一个有向生成树, $a_{i,i} > 0, i=1, 2, \dots, n$, 则 $\lambda=1$ 为随机矩阵 \mathbf{A} 的最大特征单根.

引理 3^[19] 设矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 其谱半径为 $\rho(\mathbf{A})$, 如果 \mathbf{A} 的某一特征值 λ 的代数重数为 1, 且有 $|\lambda| = \rho(\mathbf{A}) > 0$, 则 $\lim_{m \rightarrow \infty} (\lambda^{-1} \mathbf{A})^m \rightarrow \mathbf{x}\mathbf{y}^T$, 其中, 向量 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 满足: 1) $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$; 2) $\mathbf{A}^T\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}$; 3) $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = 1$.

引理 4^[19] 如果矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是非负的, 则谱半径 $\rho(\mathbf{A})$ 是 \mathbf{A} 的一个特征值, 且存在一个正向量 $\mathbf{x} > 0$, 使 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \rho(\mathbf{A})\mathbf{x}$.

定理 2 $\mathbf{A}=[a_{i,j}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是一个随机矩阵, 若 \mathbf{A} 对应的有向图 $G(\mathbf{A})$ 含有一个有向生成树, 则 \mathbf{A} 是 SIA 矩阵. 特别地, $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{A}^m \rightarrow \mathbf{I}_n\mathbf{v}^T$. 其中, \mathbf{v} 满足 $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T, \mathbf{A}^T\mathbf{v} = \mathbf{v}, \mathbf{I}_n^T\mathbf{v} = 1$.

证明 由推论 1 可知, 随机矩阵 \mathbf{A} 具有代数重数为 1 的特征值 $\lambda=1$, 且 $\rho(\mathbf{A})=1$, 满足引理 3 的条件. 故存在一个列向量 $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$, 使矩阵 \mathbf{A} 满足 $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{A}^m \rightarrow \mathbf{I}_n\mathbf{v}^T$, 即随机矩阵 \mathbf{A} 为 SIA 矩阵. 其中, \mathbf{I}_n 为随机矩阵 \mathbf{A} 的特征值 1 对应的特征向量. 同随机矩阵 \mathbf{A} 一样, 矩阵 \mathbf{A}^T 也具有代数重数为 1 的特征值 $\lambda=1$, 且满足 $\rho(\mathbf{A}^T)=1$, 因此, 由引理 4 可知, \mathbf{A}^T 关于特征值 $\lambda=1$ 的特征空间可由 $c\mathbf{x}$ 表示. 其中, $c \in \mathbf{C}, c \neq 0$, 且 \mathbf{x} 是一个正向量. 由引理 3 可知, \mathbf{v} 也是 \mathbf{A}^T 关于特征值 $\lambda=1$ 的特征向量, 且满足 $\mathbf{I}_n^T\mathbf{v} = 1$, 所以 \mathbf{v} 的每个元素都必须是非负值, 定理得证.

对离散多智能体系统

$$x_i[k+1] \sum_{j \in \mathcal{N}} a_{i,j} x_j[k] \quad (5)$$

的一致性分析有如下引理.

引理 5 当且仅当

$$\mathbf{A}^k \rightarrow \mathbf{I}_n \mathbf{c}^T \tag{6}$$

时,离散时间算法(5)可实现渐进一致. 其中, $\mathbf{A} = [a_{i,j}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是一个随机矩阵; 当 $k \rightarrow \infty$ 时, \mathbf{c} 是一个 n 阶常系数列向量.

证明 算法(5)写成矩阵形式为 $\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k]$, 有 $\mathbf{x}[k] = \mathbf{A}^k \mathbf{x}[0]$, 当 $\mathbf{A}_n^k \rightarrow \mathbf{I}_n \mathbf{c}^T$ 时, 有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{x}[k] = \mathbf{I}_n \mathbf{c}^T \mathbf{x}[0] = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \mathbf{x}[0] \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{x}[0] \end{bmatrix}.$$

即当 $k \rightarrow \infty$ 时, 有 $x_1[k] = x_2[k] = \dots = x_n[k] = \mathbf{c}^T \mathbf{x}[0]$, 系统实现一致; 反之, 若系统可实现渐进一致, 则当 $k \rightarrow \infty$ 时, 有 $x_1[k] = x_2[k] = \dots = x_n[k]$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{x}[k] = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{A}^k \mathbf{x}[0] = \mathbf{I}_n \boldsymbol{\alpha}$. 其中, $\boldsymbol{\alpha}$ 是一个 $n \times 1$ 维常系数矩阵, 即 $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{A}^k = \mathbf{I}_n \mathbf{c}^T$ 引理得证.

定理 3 设 \mathbf{A}_n 为常矩阵. 当且仅当有向图 G_n 含有一个有向生成树时, 系统(3)可实现分组一致. 特别地, $x_i[k] \rightarrow \sum_{j=1}^n v_j (x_j[0] - e_{j,i})$. 其中, $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T$, 且满足 $\mathbf{A}_n^T \mathbf{v} = \mathbf{v}$, $\mathbf{I}_n^T \mathbf{v} = 1$.

证明 当节点 v_i 和 v_j 位于相同分组时, 令 $e_{j,i}$, 对系统(3)有

$$\begin{aligned} x_i[k+1] &= x_i[k] + \sum_{j \in X_i} a_{i,j} (x_j[k] - x_i[k] - e_{j,i}) + \sum_{j \notin X_i} a_{i,j} (x_j[k] - x_i[k] - e_{j,i}) = \\ &x_i[k] + \sum_{j \in N} a_{i,j} (x_j[k] - x_i[k] - e_{j,i}) = \sum_{j \in N} a_{i,j} (x_j[k] - e_{j,i}). \end{aligned} \tag{7}$$

定义组关联矩阵 $\mathbf{E} = [e_{i,j}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 其中, $e_{i,j} = \lim_{m \rightarrow \infty} x_j[k] - \lim_{m \rightarrow \infty} x_i[k]$. 显然, 当节点 v_i 和 v_j 位于相同分组时, $e_{j,i} = 0$; 反之, $e_{j,i} \neq 0$, 且有 $e_{j,i} = -e_{i,j}$. 对节点 v_i , 令 $\bar{x}_j[k] = x_j[k] - e_{j,i}$, $\bar{x}_i[k+1] = x_i[k+1]$, 式(7)等价于

$$\bar{x}_j[k+1] = \sum_{j \in N} a_{i,j} \bar{x}_j[k]. \tag{8}$$

系统(3)实现分组一致即等价于系统(8)实现一致. 现对系统(8)进行一致性证明.

由引理 5 可知, 为证明系统(8)可实现一致, 仅需证明 $\mathbf{A}_n^k \rightarrow \mathbf{I}_n \mathbf{c}^T$. 其中, \mathbf{c} 是一个 n 阶常系数列向量.

显然, \mathbf{A}_n 是一个具有正对角元素的随机矩阵. G_n 含有一个有向生成树, 即意味着 \mathbf{A}_n 含有一个有向生成树. 由定理 2 可知, $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{A}_n^k \rightarrow \mathbf{I}_n \mathbf{v}^T$. 其中, \mathbf{v} 满足定理 2 中所定义的性质.

如果 G_n 不含有一个有向生成树, 即 \mathbf{A}_n 也不含有一个有向生成树, 则根据推论 4, 随机矩阵 \mathbf{A}_n 的特征值 $\rho(\mathbf{A}_n) = 1$ 的代数重数大于 1. 因此, \mathbf{A}_n^k 的 Jordan 分解为 $\mathbf{A}_n^k = \mathbf{M}\mathbf{J}^k\mathbf{M}^{-1}$. 其中, \mathbf{M} 具有满秩; \mathbf{J}^k 是下三角矩阵, 其 p 对角元素为 1. 因此, $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{A}_n^k$ 的秩 $p > 1$, 根据引理 5, 智能体系统无法实现渐进一致.

综上, 当且仅当有向图 G_n 含有一个有向生成树时, 系统(8)可实现一致, 即系统(3)可实现分组一致. 定理得证.

3 数值仿真

结合具体实例进行数值仿真, 以验证所得结论的正确性.

实验 1 具有 5 个智能体 2 个分组的系统, 如图 1 所示. 其中, $C_1 = \{1, 2\}$; $C_2 = \{3, 4, 5\}$. 易知系统含有一个有向生成树, 且不满足入度平衡条件, 其随机矩阵 \mathbf{A} 和组关联矩阵 \mathbf{E} 分别为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

智能体初始状态 $\mathbf{x}(20) = [3 \ 5 \ 0 \ 4 \ 6]^T$, 在一致性协议(2)下, 系统经 $k=20$ 步响应后, 智能体状态为 $\mathbf{x}(20) = [3.258 \ 1 \ 3.258 \ 1 \ 2.258 \ 1 \ 1.258 \ 0 \ 1.258 \ 1]^T$, 状态响应过程, 如图 2 所示. 图 2 中: $x(k)$ 为智能体状态; k 为离散时间序列.

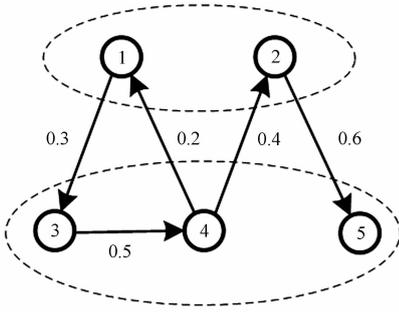


图1 系统通信拓扑图

Fig. 1 Communication topology of system

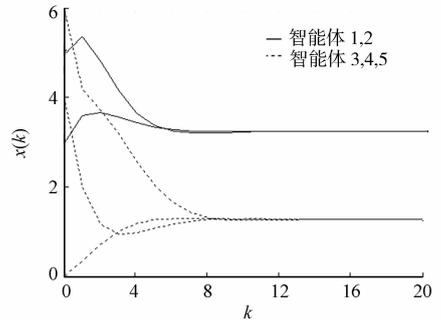


图2 系统的状态响应

Fig. 2 State response of system

由图2可知:在一致性协议(2)下,对于图1的系统,离散智能体状态随着时间的增加趋于分组一致,收敛值关系与组关联矩阵对应,仿真结果与理论分析结果相吻合。

实验2 现将智能体数目扩充至8个,组数扩充至3个,其拓扑结构如图3所示.其中, $C_1 = \{1, 2\}$; $C_2 = \{3, 4, 5\}$; $C_3 = \{6, 7, 8\}$.系统含有一个有向生成树,同样不满足入度平衡条件,其随机矩阵 A 和组关联矩阵 E 分别为

$$A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.3 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

智能体初始状态 $x(0) = [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8]^T$,在一致性协议(2)下,经过 $k=30$ 步响应,智能体状态为 $x(30) = [6.6530 \ 6.6423 \ 4.6530 \ 4.6530 \ 4.6530 \ 3.6450 \ 3.6530 \ 3.6530]^T$,状态响应过程,如图4所示。

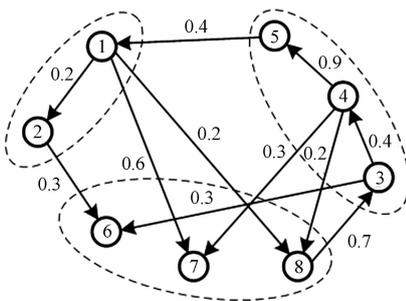


图3 系统通信拓扑图

Fig. 3 Communication topology of system

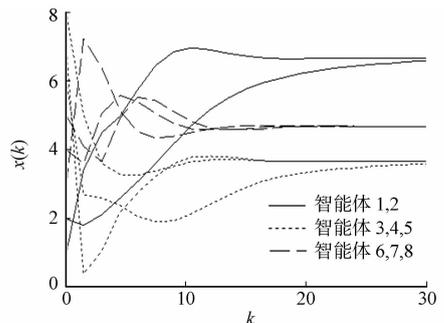


图4 系统的状态响应

Fig. 4 State response of system

由图4可知:在一致性协议(2)下,对于离散多智能体系统,随着时间的增加,智能体状态趋于分组一致,且收敛值之间的关系与组关联矩阵相对应,进一步验证了理论分析结果的正确性.此外,结合实验1和实验2可知,系统能否实现分组一致与智能体个数无关.

4 结束语

研究无入度平衡条件下的离散多智能体系统分组一致问题.通过引入个体收敛值之差,设计离散多智能体分组一致协议,并利用图论和矩阵论的方法,得到系统实现分组一致的充要条件.数值仿真结果表明:系统实现分组一致仅要求有向图 G_n 含有一个有向生成树,不要求拓扑结构满足入度平衡条件.

参考文献:

- [1] COUZIN I D, KRAUSE J, JAMES R, *et al.* Collective memory and spatial sorting in animal groups[J]. *Journal of Theoretical Biology*, 2002, 218(1): 1-11.
- [2] PARRISH J K, VISCIDO S V, GRUNBAUM D. Self-organized fish schools: An examination of emergent properties [J]. *Biology Bull*, 2002, 202(2): 296-305.
- [3] 唐贤伦,张衡,周家林,等.基于多 Agent 混沌粒子群优化的磁悬浮系统 PID 控制器[J]. *信息与控制*, 2013, 42(6): 758-764.
- [4] WERFEL J, PETERSEN K, NAGPAL R. Designing collective behavior in a termite-inspired robot construction team [J]. *Science*, 2014, 343(6172): 754-758.
- [5] SHARMA A, SRIVASTAVA S C, CHAKRABARTI S. Multi-agent-based dynamic state estimator for multi-area power system[J]. *IET Generation, Transmission and Distribution*, 2016, 10(1): 131-141.
- [6] VICSEK T, CZIROOK A, BEN-JACOB E, *et al.* Novel type of phase transition in a system of self-driven particles [J]. *Physical Review Letters*, 1995, 75(6): 1226-1229.
- [7] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1520-1533.
- [8] XIE Guangming, WANG Long. Consensus control for a class of networks of dynamic agents[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2007, 17(10/11): 941-959.
- [9] YU Wenwu, CHEN Guanrong, CAO Ming, *et al.* Second-order consensus for multi-agent systems with directed topologies and nonlinear dynamics[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics*, 2010, 40(3): 881-891.
- [10] 许耀焜,田玉平.线性及非线性一致性问题综述[J]. *控制理论与应用*, 2014, 31(7): 837-849.
- [11] YU Junyan, WANG Long. Group consensus in multi-agent systems with switching topologies and communication delays[J]. *System and Control Letters*, 2010, 59(6): 330-348.
- [12] YU Junyan, WANG Long. Group consensus of multi-agent systems with undirected communication exchange[J]. *International Journal of Systems Science*, 2012, 43(2): 334-348.
- [13] 王强,王玉振,杨仁明.一类多智能体系统分组一致控制协议的设计与分析[J]. *控制与决策*, 2013, 28(3): 369-373, 378.
- [14] XIA Hong, HUANG Tingzhu, SHAO Jinliang, *et al.* Group consensus of multi-agent systems with communication delays[J]. *Neurocomputing*, 2016(171): 1666-1673.
- [15] XIA Weiguo, CAO Ming. Clustering in diffusively coupled networks[J]. *Automatica*, 2011, 47(11): 2395-2405.
- [16] WANG Yuzhen, ZHANG Chenghui, LIU Zhenbin. A matrix approach to graph maximum stable set and coloring problems with application to multi-agent system[J]. *Automatica*, 2012, 48(7): 1227-1236.
- [17] 纪良浩,廖晓峰,刘群.时延多智能体系统分组一致性分析[J]. *物理学报*, 2012, 61(22): 5-12.
- [18] QIN Jiahu, YU Changbin. Cluster consensus control of generic linear multi-agent systems under directed topology with acyclic partition[J]. *Automatica*, 2013, 49(2): 2898-2905.
- [19] HORN R A, JOHNSON C R. *Matrix analysis*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985: 344, 498, 503.

(责任编辑:钱筠 英文审校:崔长彩)