第 38 卷 第 2 期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 38 No. 2
2017 年 3 月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Mar. 2017

doi:10.11830/ISSN.1000-5013.201702026

弱收敛在勒贝格积分中存在性证明及其具体应用

吴志勇

(遵义师范学院 继续教育学院, 贵州 遵义 563002)

摘要: 为了证明勒贝格积分是否具有弱收敛性,基于勒贝格相关理论,得到勒贝格积分存在弱收敛的充要条件为$\{f_k\}$在L^p空间中有界;同时,得出需满足$\{f_k\}$在测度E范围内的积分极限值等于其积分值的条件.最后,将勒贝格积分应用在概率统计方面,并采用Lebesgue-Stieltjes积分分别表示随机变量及数学期望.

关键词: 勒贝格积分;弱收敛;测度;概率统计;随机变量;Lebesgue-Stieltjes 积分

中图分类号: O 10 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5013(2017)02-0271-05

Existence Proof of Weak Convergence in Lebesgue Integral and Its Application

WU Zhiyong

(College of Extended Education, Zunyi Normal College, Zunyi 563002, China)

Abstract: In order to prove the Lebesgue integral is of weak convergence, basing on Lebesgue theory, we prove the necessary and sufficient conditions for the existence of the weak convergence of Lebesgue integral sequence $\{f_k\}$ are that the sequence are bounded in L^p space; at the same time, it must satisfy that the integral limit value of $\{f_k\}$ in the measure range of E is equal to the integral value. Finally, by the application of Lebesgue integral to probability statistics, we use Lebesgue-Stieltjes integral to represent the random variables and mathematical expectation respectively.

Keywords: Lebesgue integral; weak convergence; measure; statistical probability; random variable; Lebesgue-Stieltjes integral

勒贝格控制收敛定理的证明及其应用是经典实变函数论中的重要课题,得到了相当广泛深刻的研究.勒贝格L^p可积函数空间中的收敛性以勒贝格积分中的各种收敛性质为工具,深入到测度收敛、集中紧致、补偿紧致等[1].虽然勒贝格积分已经应用于少数领域之中[2],但目前有关空间勒贝格积分中的许多收敛性是分散在各文献中,大部分没有系统全面地总结[3].本文通过阐述黎曼积分及勒贝格积分理论,研究弱收敛在勒贝格积分中存在性证明及其具体应用.

1 黎曼积分定义

设$f(x)$是$[a,b]$上的有界函数,任意分点满足以下关系[4],即

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b. \tag{1}$$

收稿日期: 2017-02-14

通信作者: 吴志勇(1963-),男,副教授,主要从事函数论的研究. E-mail:zysfjks484@163.com.

基金项目: 贵州省高校人文社会科学资助项目(2015JD114)

如果将区间$[a,b]$分成 n 部分,对小区域$[x_{i-1},x_i]$内的任意一点 $\xi_i(i=1,2,3,\cdots)$求和,有

$$S=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i,x_{i-1}).\tag{2}$$

假设 $r=\max\limits^{i=1}(x_i,x_{i-1})$,则当 $r\to 0$ 时,S 为有限的极限,此时,S 是 $f(x)$在区域$[a,b]$内的黎曼积分,表示为

$$I=R\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.\tag{3}$$

2 勒贝格积分定义

2.1 分划

设 $E\subset R^q$ 是一非空可测集,如果 $E=\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i$,其中,各个 E_i 为互不相交的非空可测集,则称有限集合族 $D=\{E_i\}$是 E 的一个可测分划,简称分划[5].

设 $D=\{E_i\}$是 E 的另一分划,如果对于任一 $E'_j\in D'$,存在 $E_i\in D$,使 $E'_j\in E_i$,称 D'比 D 细.

引理 1 给定 E 任意两个分划 D',D,必存在比其细的第 3 分划,即

$$D''=\{E_i\cap E'_j\mid E_i\in D,E'_j\in D',E_i\cap E'_j\neq\varnothing\}.\tag{4}$$

2.2 大和与小和

设 $f(x)$为定义在 R^q 中测度有限的集 E 上的有界函数,对于 E 的任一分划 $D=\{E_i\}$,则可令 $B_i=\sup\limits_{x\in E_i}f(x)$,$b_i=\inf\limits_{x\in E_i}f(x)$,则 $\sum\limits_i B_i mE_i$,$\sum\limits_i b_i mE_i$ 分别称为 $f(x)$关于分划 D 的大和及小和(由 D 完全确定),并分别记为 $S(D,f)$及 $s(D,f)$[6].

引理 2 1)设 $B=\sup\limits_{x\in E}f(x)$,$b=\inf\limits_{x\in E}f(x)$,则有

$$bmE\leqslant s(D,f)\leqslant S(D,f)\leqslant BmE;\tag{5}$$

2)设分划 D'比 D 细,则 $s(D,f)\leqslant s(D',f)$, $S(D,f)\leqslant S(D',f)$;

3)对于任两个分划 D',D,有 $s(D,f)\leqslant S(D',f)$;

4)$\sup\limits_{D}\leqslant\inf\limits_{D}S(D,f)$,这里上、下确界是对 E 的所有可能的分划取的.

设 $f(x)$是 $E\subset R^q(mE<\infty)$的有界函数,

$$\overline{\int_E}f(x)\mathrm{d}x=\inf S(D,f),\qquad \underline{\int_E}f(x)\mathrm{d}x=\sup(D,f),\tag{6}$$

分别称为 $f(x)$在 L 上、下积分,当 $f(x)$满足

$$\overline{\int_E}f(x)\mathrm{d}x=\underline{\int_E}f(x)\mathrm{d}x,\tag{7}$$

则称 $f(x)$在 E 上 L 可积,并称此共同值为 $f(x)$在 E 上的 L 积分,记为 $\int_E f(x)\mathrm{d}x$.

以上是 R^q 中测度有限可测集上有界函数的 L 积分定义,形式上同 R 积分完全类似.除了积分区域更一般之外,主要不同之处在于采用的测度和分划的不同[4].

2.3 有界函数的勒贝格积分

设 $f(x)$定义在 $E\subseteq R^q$ 测度有限集 E 上的有界函数[7],

$$\overline{\int_E}f(x)\mathrm{d}x=\inf S(D,f),\qquad \int_E f(x)\mathrm{d}x=\inf\limits_{D}s(D,f).\tag{8}$$

分别称为 $f(x)$在 E 上的 L 上、下积分.

如果 $\overline{\int_E}f(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$,则 $f(x)$ 在 E 上是可积的,且 $f(x)$ 在 E 上 L 积分,记为$\int_E f(x)\mathrm{d}x$.

2.4 勒贝格积分的充要条件

设 $f(x)$是定义在 $E\subset R^q$ 测度有限集 E 上的有界函数[8],则 $f(x)$在 E 上 L 可积的充要条件为:对

任何 $\varepsilon<0$，存在 E 的分划 D，使

$$S(D,f)-\sup_{D}(D,f)=\sum_{i}\omega_i mE_i<\varepsilon,\qquad \omega_i=B_i-b_i. \tag{9}$$

也即 $\inf[S(D,f)-s(D,f)]=\inf\limits_{D}\sum\limits_{i}\omega_i mE_i=0.$

定理 1　设 $f(x)$是定义在 $E\subset R^q$ 测度有限的集 E 上的有界函数，则 $f(x)$在 E 上 L 可积的充要条件是 $f(x)$在 E 上可测.

定理 2　设 $f(x)$在 E 上 L 可积，且 $f(x)=g(x)$，a. e. 于 E，则 $g(x)$在 E 上 L 可积，且 $\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E g(x)\mathrm{d}x$.

根据上述阐述的黎曼积分与勒贝格积分定义可知，黎曼积分在实际应用过程中存在一定的局限性，而勒贝格积分的可积范围更加广泛，有效地克服黎曼积分的局限性.

3　勒贝格积分弱收敛存在的充要条件

3.1　强收敛与弱收敛定义

1）设 X 是赋范线性空间，X 为 X' 共扼空间，$\{x_n\}\subset X'$，如果存在 $f\in X'$，有

$$\lim\|f_n-f\|=0, \tag{10}$$

则称$\{x_n\}$强收敛于 x.

2）设 X 是赋范线性空间，$\{x_n\}\subset X$，如果存在 $f\in X$，使得 $\forall f\in X^*$，有

$$\lim f(x_n)=f(x), \tag{11}$$

则称$\{x_n\}$弱收敛于 x，记为 $x\xrightarrow{W}x$，x 称为$\{x_n\}$的弱极限. 把序列$\{x_n\}$按范数收敛称为强收敛，相应的极限称为序列的强极限，记为 $x_n\xrightarrow{S}x$.

根据强收敛与弱收敛定义，强收敛必定弱收敛，但弱收敛不一定强收敛.

3.2　勒贝格积分弱收敛存在的充要条件

设 Ω 为 R^n 中可测集，测度 mes $\Omega>0$，$\{f_k\}$在 $L^p(\Omega)(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 弱收敛于 $f\in L^p(\Omega)$.

证明　如果$\{f_k\}$弱收敛 f，则根据勒贝格积分及弱收敛定义，$\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k\mathrm{d}x=\int_E f\mathrm{d}x$ 对每一个可测度集有 $E\in\Omega$. 由于$\{f_k\}$弱收敛 f，则任意的 $x\in L^p(\Omega)$有$\{f_k\}$收敛，根据共鸣定理[5]可知，$\{f_k\}$在 $L^p(\Omega)$中有界.

设 $\|f_n\|\leqslant M(n=1,2,\cdots)$，$f\in L^p(\Omega)$，令 $\varphi\in L^{p'}(\Omega)(1-p'<\infty)$，根据函数集在 $L^p(\Omega)$上的稠密性，当 m 无限大时，则有任意的 $\delta>0$，满足

$$\int_{\Omega-\Omega_m}|\varphi|^{p'}\mathrm{d}x<\delta,\qquad \Omega_m=\Omega\cap\{|x|<m\},$$

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega(f_k-\varphi)\varphi\mathrm{d}x\right|=&\left|\left[\int_{\Omega-\Omega_m}+\int_{\Omega-\Omega_m}\right](f_k-f)\varphi\mathrm{d}x\right|\leqslant\\
&\|f_k-f\|_p\|\varphi\|_{L^p(\Omega-\Omega_m)}+\left|\left[\int_{\Omega_m\cap E_k}+\int_{\Omega_m-E_k}\right](f_k-f)\varphi\mathrm{d}x\right|\leqslant\\
&2C\|\varphi\|_{L^p(\Omega-\Omega_m)}+\|f_kf\|_p\|\varphi\|_{L^p(E\cap\Omega_m)}+\varepsilon|\Omega_m|^{1/p}\|\varphi\|_{p'}\leqslant\\
&2C\delta+2C\|\varphi\|_{L^{p'}(E_k\cap\Omega_m)}+\varepsilon|\Omega_m|^{1/p}\|\varphi\|_{p'}.
\end{aligned}\tag{12}$$

令 $k\to\infty$，$\varepsilon\to0$，$\delta\to0$，则有

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega f_k\varphi\mathrm{d}x=\int_\Omega f\varphi\mathrm{d}x. \tag{13}$$

因此，$\{f_k\}$弱收敛于 f 的充要条件为

1）$\{f_k\}$在 $L^p(\Omega)$中有界；

2）$\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k\mathrm{d}x=\int_E f_k\mathrm{d}x$ 对每一个可测度集 $E\in\Omega$.

如果 $f\in L^p(\Omega)1<p'<\infty$，$\{f_k\}(k=1,2,\cdots)$在 $L^p(\Omega)$有界，则$\{f_k\}$中存在$\{f_j\}$及函数，使任一 $\varphi\in L^{p'}(\Omega)$，满足

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega f_{k_j}\varphi\mathrm{d}x=\int_\Omega f\varphi\mathrm{d}x. \tag{14}$$

当 $p=1$ 时，则式(11)的关系式不成立. 根据式(11)，(12)中的 $\|f_k\|_1=1$，且任意 $t\in(0,1)$，则 $\lim_{k\to\infty}\int_0 f_k(x)\mathrm{d}x$ 有界. 若 $f\in L^{-1}[0,1]$，对任一的 $\varphi\in L^{p'}(\Omega)$不存在，则

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^1 f_k\varphi\mathrm{d}x=\int_0^1 f\varphi\mathrm{d}x. \tag{15}$$

由此可知，当 $p=1$ 时，式(13)关系不成立.

定理 3 根据以上定理，当 $1<p<\infty$，$\{f_k\}$，$f\in L^p(\Omega)$，$f_k\to f$，$x\in\Omega$ 时，满足$\lim_{k\to 0}\|f_k-f\|^p=0$ 的充要条件为$\lim_{k\to 0}\|f_k-f\|^p=\|f\|^p$.

证明 充分性. 由于 $f\in L^p(\Omega)$，因此对于任一的 $\varepsilon>0$，均存在无限大的 m，满足

$$\int_{\Omega_m}|f|^p\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon/4,\qquad \Omega_m=\Omega\cap\{|x|<m\}. \tag{16}$$

根据相关定理，$\lim_{k\to 0}\int_{\Omega-\Omega_m}|f_k|^p\mathrm{d}x=\int_{\Omega-\Omega_m}|f|^p\mathrm{d}x$，则有

$$\lim_{k\to 0}\int_{\Omega-\Omega_m}|f_k|^p\mathrm{d}x\leqslant\int_{\Omega-\Omega_m}|f_k-f|^p\mathrm{d}x\leqslant$$
$$2^{p-1}(\int_{\Omega-\Omega_m}|f_k|^p\mathrm{d}x+\int_{\Omega-\Omega_m}|f|^p\mathrm{d}x)\leqslant 2^{p-1}\varepsilon. \tag{17}$$

由于积分具有绝对连续性，因此，任一 $e\subset\Omega$，mes $e<\delta$，满足

$$\int_e|f|^p\mathrm{d}x)\leqslant\varepsilon/4,\qquad \int_e|f_k|^p\mathrm{d}x)\leqslant\varepsilon/2. \tag{18}$$

根据叶果洛夫定理，$f_k\to f$，$x\in\Omega_m$，对于以上的 $\delta>0$，存在 $F\subset\Omega_m$，使 $\mathrm{mes}(\Omega_m-F)<\delta$，$f_k\to f$ 在 F 内是一致收敛的，则有

$$\int_{\Omega_m}|f_k-f|^p\mathrm{d}x=\int_F|f_k-f|^p\mathrm{d}x+\int_{\Omega_m-F}|f_k-f|^p\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\sup|f_k-f|^p\mathrm{mes}\,F+2^{p-1}\varepsilon. \tag{19}$$

根据上述充分证明，有

$$\lim_{k\to 0}\int_\Omega|f_k-f|^p\mathrm{d}x\leqslant 2^p\varepsilon. \tag{20}$$

由于式(20)中的 $\varepsilon>0$ 具有任意性，则存在 ε，有

$$\lim_{k\to 0}\int_\Omega|f_k-f|^p\mathrm{d}x=0. \tag{21}$$

根据定理 3，必要性显然是成立的.

4 勒贝格积分在概率中的应用

4.1 Lebesgue-Stieltjes 积分理论

若 μ 是 $f(x)$是 Lebesgue-Stieltjes 测度(简称 L-S 测度)，则 f 是(R^n,B^n)或(R^n,B^n_μ)上的可测函数，B^n_μ 是 B 对测度的完全化，则称(R^n,B^n_μ,μ)为 L-S 空间. 若 F 是与 μ 对应的分布函数，则 f 是关于 μ 或的 L-S 积分，其在 R^n 上的积分为 $\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}F(x_1,\cdots,x_n)$ 或$\int_{R_n}f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}u$[9].

4.2 L-S 积分表示的随机变量函数

设 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$为(Ω,A,P)的 n 维随机变量，其中，分布函数为 $F(x_1,\cdots,x_n)$，$g_kk=1,\cdots,m$ 是 n 维实空间的有限 Borel 函数. 若 $\eta_k=g_k(\xi_1,\cdots,\xi_n)(k=1,\cdots,m)$，则有

$$\{\eta_1<y_1,\cdots,\eta_m<y_m\}=\{\varepsilon:g_1(\xi_1(\omega),\cdots,\xi_n(\omega))<y_1,\cdots,g_k(\xi_1(\omega),\cdots,\xi_n(\omega))<y_m\}=$$
$$\{\varepsilon:(\xi_1(\omega),\cdots,\xi_n(\omega))\in G\}=\{(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in G\}. \tag{22}$$

根据 L-S 积分定义[10]，有

$$F_{\eta_1,\cdots,\eta_m}(y_1,\cdots,y_m)=P(\eta_1<y_1,\cdots,\eta_m<y_m)=P((\xi_1,\cdots,\xi_n)\in G)=\int_G\cdots\int \mathrm{d}F(x_1,\cdots,x_n). \tag{23}$$

4.3　L-S 积分表示的数学期望

若 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$为(Ω,A,P)的 n 维随机变量，其中，分布函数为 $F(x_1,\cdots,x_n)$是 n 维实空间的有限 Borel 函数，则 $\eta=g(\xi_1,\cdots,\xi_n)$存在数学期望则需满足如下 2 个条件.

1）分布函数 $F(x_1,\cdots,x_n)$存在积分；

2）$E_\eta=E_g(\xi_1,\cdots,\xi_n)=\int\cdots\int g(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}F(x_1,\cdots,x_n)$.

证明　根据积分变换定理，有

$$\int_{\xi^{-1}(R^n)} g_\xi \mathrm{d}P=\int_{R^n}\cdots\int \mathrm{d}g(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}P_\xi. \tag{24}$$

式(24)中：左、右两端分别等于

$$\left.\begin{aligned}&\int_{\xi^{-1}(R^n)} g(\xi)\mathrm{d}P=\int_\Omega g(\xi(\omega))\mathrm{d}P=\int g(\xi_1,\cdots,\xi_n)\mathrm{d}P=E\eta,\\&\int_{R^n}\cdots\int g(\xi_1,\cdots,\xi_n)\mathrm{d}P_\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi_1,\cdots,\xi_n)\mathrm{d}F(x_1,\cdots,x_n).\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

4.4　实例应用

设随机变量 ξ 的分布函数为 $F(x)$，随机变量的分布函数为 $\eta=a\xi+b$(a，b 均为实数)；$\eta=\cos\xi$.

证明　令 F_η 为 η 的分布函数，有

$$F_\eta(y)=F(\eta<y)=F(ax+b<y)=\int_G\cdots\int \mathrm{d}F(x). \tag{26}$$

式(26)中：$G=\{x,ax+b<y\}$. 同理，令 $F_\eta(y)$为 η 的分布函数，有

$$F_\eta(y)=F(\eta<y)=F(\cos x<y)=\int_G\cdots\int \mathrm{d}F(x). \tag{27}$$

式(27)中：$G=\{x,\cos x<y\}$. 故例题得证.

5　结束语

勒贝格积分的创立，是弥补了黎曼积分的不足. 文中在介绍勒贝格积分概念的同时，证明了勒贝格积分弱收敛存在的充要条件；同时，将勒贝格积分应用在概率统计上，并采用 Lebesgue-Stieltjes 积分分别表示随机变量及数学期望 .

参考文献：

[1]　赵建英，李海英. 函数空间类 Vitali 覆盖证明及其应用[J]. 华侨大学学报(自然科学版)，2016，6(2)：88-91.
[2]　杨洁. 关于可测函数数列各种收敛性的几点注记[J]. 工科数学，1998，14(2)：120-123.
[3]　程基骧，张奠宇，魏国强，等. 实变函数论与泛函分析基础[M]. 北京：高等教育出版社，2003：121-122.
[4]　姚建武. 极限与三种收敛之间的关系[J]. 陕西教育学院学报，2003，19(1)：70-73.
[5]　赵目，赵玉华. 关于弱收敛的一些结果[J]. 安徽教育学院学报，2007，25(3)：9-10.
[6]　黄永峰. 也谈黎曼积分与勒贝格积分的区别及联系[J]. 时代教育(教育教学)，2011，31(9)：212-214.
[7]　刘皓春晓. 勒贝格控制收敛定理及其应用[J]. 品牌：下半月，2015，13(3)：67-68.
[8]　柴平分. 关于可测函数列积分的收敛性[J]. 青海师范大学学报(自然科学版)，1996，21(2)：33-35.
[9]　侯英. 勒贝格控制收敛定理的应用[J]. 中国新技术新产品，2010，22(23)：12-15.
[10]　何婷妹. 浅析黎曼积分与勒贝格积分[J]. 科技经济导刊，2016，36(14)：321-323.

（**责任编辑：** 陈志贤　　**英文审校：** 黄心中）