

doi: 10.11830/ISSN.1000-5013.201702025



食饵有病的生态-流行病模型的 稳定性分析

傅金波¹, 陈兰荪^{1,2}

(1. 福建师范大学 闽南科技学院, 福建 泉州 362332;
2. 中国科学院 数学与系统科学研究院, 北京 100080)

摘要: 研究一类具有双线性发生率 and 功能反应且食饵染病的生态-流行病模型的动力学行为. 通过构造适当的 Lyapunov 函数, 运用 LaSalle 不变集原理, 获得保证系统的无捕食者无病平衡点、疾病主导平衡点、捕食者主导平衡点和正平衡点全局渐近稳定的阈值条件. 通过疾病流行的阈值和捕食机制形成的阈值, 以及疾病与捕食两者竞争占优的阈值, 共同刻画生态-流行病系统的演变规律性.

关键词: 生态-流行病模型; Lyapunov 函数; LaSalle 不变集原理; 功能性反应; 平衡点; 全局稳定性

中图分类号: O 175.13 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5013(2017)02-0266-05

Stability Analysis of Eco-Epidemiologic Model With Disease in Prey

FU Jinbo¹, CHEN Lansun^{1,2}

(1. Minnan Science and Technology Institute, Fujian Normal University, Quanzhou 362332, China;
2. Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract: In this paper, the dynamical behaviors of the eco-epidemiologic model with double linearity incidence rate, functional response and disease in the prey are studied. By constructing suitable Lyapunov function and using LaSalle invariance principle, the global asymptotic stable threshold conditions of non-predator disease-free equilibrium, disease dominant equilibrium, predator dominant equilibrium and positive equilibrium in the system are obtained. The threshold of disease popularity, the threshold of formation of predation mechanism and the threshold of dominance of disease or predator in their competition depict the evolvement law of the eco-epidemiologic system.

Keywords: eco-epidemiologic model; Lyapunov function; LaSalle invariance principle; functional response; equilibrium point; global stability

1 预备知识

近年来,许多学者利用种群动力学原理^[1]和 Kermack^[2]的流行病学建模机理,分析了大量的食饵-捕食者系统^[3-8]和多种形式的传染病模型^[9-14]. 然而,在已有的生物动力学模型建模中考虑疾病影响却不多见. 疾病对种群的影响是一个不可忽视的重要问题. 将种群动力学与传染病学结合起来所建立的

收稿日期: 2016-09-09

通信作者: 傅金波(1978-),男,副教授,主要从事生物数学的研究. E-mail: fujinbomnkjxy@sina.com.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11371306); 福建省教育厅自然科学基金资助项目(JA13370); 福建师范大学闽南科技学院青年骨干教师重点项目(MKQ201006)

生态-流行病模型, 对于探讨疾病流行对生态环境的影响, 乃至改善生态环境以控制疾病的流行, 无疑是一个新的研究方向, 更富有实际应用价值^[15]. 据此, 考虑疾病只在食饵之间传播, 且食饵种群分为易感者和染病者两类, 建立食饵有病的生态-流行病模型为

$$\left. \begin{aligned} S' &= A - d_1 S - \beta IS - pSY, \\ I' &= \beta IS - d_1 I - pIY, \\ Y' &= g(S + I)Y - d_2 Y. \end{aligned} \right\} \tag{1}$$

式(1)中: S, I 分别为 t 时刻食饵种群中易感者和染病者两类的数量; Y 为 t 时刻捕食者种群的数量; A 为易感者种群的增长率; β 为接触率; p 为捕食率; $d_i (i=1, 2)$ 为自然死亡率; g 为捕食者种群的增长率; 所有参数均为正的常数, 且 $g < p$.

基于生物学意义, 模型(1)的初值条件为 $S(0) > 0, I(0) > 0, Y(0) > 0$. 定义 3 个阈值依次为

$$\left\{ \begin{aligned} R_0 &= \frac{\beta A}{d_1^2}, \\ R_1 &= \frac{Ag}{d_1 d_2}, \\ R_2 &= \frac{\beta d_2^2}{Ag^2}, \end{aligned} \right.$$

且

$$\left\{ \begin{aligned} S_0 &= \frac{A}{d_1}, & S_1 &= \frac{d_1}{\beta}, & S_2 &= \frac{d_2}{g}, & S_3 &= \frac{Ag}{\beta d_2}, \\ I_1 &= \frac{\beta A - d_1^2}{\beta d_1}, & I_3 &= \frac{\beta d_2^2 - Ag^2}{\beta d_2 g}, & Y_2 &= Y_3 &= \frac{Ag - d_1 d_2}{pd_2}. \end{aligned} \right.$$

文中主要研究模型(1)的无捕食者无病平衡点、疾病主导平衡点、捕食者主导平衡点和正平衡点的全局渐近稳定性, 从理论上阐明捕食与疾病流行的演变规律性.

2 相关引理及其证明

引理 1 模型(1)满足初值条件的任意解 (S, I, Y) 皆为正解.

证明 模型(1)等价于

$$\left. \begin{aligned} S &= \exp\left[-\int_0^t (d_1 + \beta I(\tau) + pY(\tau)) d\tau\right] \{S(0) + \int_0^t A \cdot \exp\left[\int_0^u (d_1 + \beta I(\tau) + pY(\tau)) d\tau\right] d\tau\}, \\ I &= I(0) \exp\left[\int_0^t (\beta S(\tau) - d_1 - pY(\tau)) d\tau\right], \\ Y &= Y(0) \exp\left[\int_0^t (gS(\tau) + gI(\tau) - d_2) d\tau\right]. \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

由此可见, 在初值条件下, 模型(1)的任意解 (S, I, Y) 皆为正解. 证毕.

引理 2 模型(1)满足初值条件的任意正解 (S, I, Y) 均为最终有界的.

证明 令 $L = S + I + Y$, 由模型(1)得 $L' \leq A - d_1 S - d_1 I - d_2 Y$. 取 $\mu = \min\{d_1, d_2\}$, 故有

$$L' \leq A - \mu L, \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} L \leq \frac{A}{\mu} := M_0.$$

由微分方程比较定理可知, 存在 $t_0 > 0, M \geq M_0$, 当 $t \geq t_0$ 时, 恒有 $L \leq M$. 进而, 集合 $\Omega = \{(S, I, Y) \in R^3 : 0 < S \leq M, 0 \leq I \leq M, 0 \leq Y \leq M\}$ 是模型(1)的正向不变集和最终有界区域. 证毕.

模型(1)的非负平衡点满足

$$\left. \begin{aligned} A - d_1 S - \beta IS - pSY &= 0, \\ \beta IS - d_1 I - pIY &= 0, \\ g(S + I)Y - d_2 Y &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

根据方程组(3), 易获得如下结论.

引理 3 模型(1)总存在着无捕食者无病平衡点 $P_0=(S_0,0,0)$. 当 $R_0>1$ 时,存在疾病主导平衡点 $P_1=(S_1,I_2,0)$;当 $R_1>1$ 时,存在捕食者主导平衡点 $P_2=(S_2,0,Y_2)$;当 $R_1>1$,且 $R_2>1$ 时,还存在正平衡点 $P_3=(S_3,I_3,Y_3)$.

3 主要结果与证明

定理 1 当 $R_0\leqslant 1,R_1\leqslant 1$ 时,模型(1)的无捕食无病平衡点 P_0 在域 Ω 上是全局渐近稳定.

证明 将模型(1)改为如下等价系统,即

$$\left. \begin{aligned} S' &= -d_1(S-S_0) - \beta IS - pSY, \\ I' &= \beta IS - d_1 I - pIY, \\ Y' &= g(S+I)Y - d_2 Y. \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

设 (S,I,Y) 是系统(4)的任意正解,利用函数 $F(\xi)=\xi-1-\ln \xi$ 在 $(0,+\infty)$ 存在唯一最小值点 $\xi=1$ 且 $F(\xi)\geqslant F(1)=0$ 的性质,构造 Lyapunov 泛函为

$$V_0(t) = S_0 F(\frac{S}{S_0}) + I + \frac{p}{g} Y.$$

易见正定函数 $V_0(t)$ 在无捕食无病平衡点 P_0 处取得唯一最小值为零. 当 $R_0\leqslant 1,R_1\leqslant 1$ 时,直接计算 $V_0(t)$ 沿着系统(4)轨线的全导数,可得

$$\frac{dV_0(t)}{dt} = -\frac{d_1}{S}(S-S_0)^2 + d_1(R_0-1)I + \frac{pd_2}{g}(R_1-1)Y \leqslant 0,$$

当且仅当 $(S,I,Y)=(S_0,0,0)$,有 $V_0'(t)=0$.

根据 LaSalle 不变性原理^[16]可知:模型(1)的无捕食无病平衡点 P_0 在域 Ω 上是全局渐近稳定的. 证毕.

定理 2 当 $R_0>1\geqslant R_1$ 时,模型(1)的疾病主导平衡点 P_1 在域 Ω 上是全局渐近稳定.

证明 将模型(1)改为如下等价系统,有

$$\left. \begin{aligned} S' &= -d_1(S-S_1) - \beta(IS-I_1S_1) - pSY, \\ I' &= \beta(IS-I_1S_1) - d_1(I-I_1) - pIY, \\ Y' &= g(S+I)Y - d_2 Y. \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

设 (S,I,Y) 是系统(5)的任意正解,利用函数 $F(\xi)=\xi-1-\ln \xi$ 在 $(0,+\infty)$ 上的非负性质,构造 Lyapunov 泛函为

$$V_1(t) = S_1 F(\frac{S}{S_1}) + I_1 F(\frac{I}{I_1}) + \frac{p}{g} Y.$$

由此可见,正定函数 $V_1(t)$ 在疾病主导平衡点 P_1 处取得唯一最小值为零.

当 $R_0>1\geqslant R_1$ 时,注意到 $\beta S_1=d_1$,直接计算 $V_1(t)$ 沿着系统(5)轨线的全导数,可得

$$\frac{dV_1(t)}{dt} = -\frac{d_1+\beta I_1}{S}(S-S_1)^2 + \frac{pd_2}{g}(R_1-1)Y \leqslant 0.$$

当且仅当 $(S,I,Y)=(S_1,I_1,0)$,有 $V_1'(t)=0$. 又因为模型(1)在 P_1 处 Jacobian 矩阵的特征方程为 $[\lambda^2+(d_1+\beta I_1)\lambda+\beta^2 S_1 I_1][\lambda-d_2(R_1-1)]=0$.

当 $R_0>1,R_1>1$ 时,特征方程存在一个正特征值,故 P_1 是不稳定的;当 $R_0>1\geqslant R_1$ 时,特征方程的非零特征值均具有负实部,而且零特征值为特征单根,故 P_1 是局部渐近稳定.

由 LaSalle 不变性原理^[16]可以得到,模型(1)的疾病主导平衡点 P_1 在域 Ω 上是全局渐近稳定的. 证毕.

定理 3 当 $R_1>1\geqslant R_2$ 时,模型(1)的捕食者主导平衡点 P_2 在域 Ω 上是全局渐近稳定.

证明 将模型(1)改为如下等价系统,有

$$\left. \begin{aligned} S' &= -d_1(S-S_2) - \beta IS - p(SY-S_2Y_2), \\ I' &= \beta IS - d_1 I - pIY, \\ Y' &= g(SY-S_2Y_2) + gIY - d_2(Y-Y_2). \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

设 (S, I, Y) 是系统 (6) 的任意正解, 利用函数 $F(\xi) = \xi - 1 - \ln \xi$ 在 $(0, +\infty)$ 上的非负性质, 构造 Lyapunov 泛函为

$$V_2(t) = S_2 F\left(\frac{S}{S_2}\right) + I + \frac{p}{g} \cdot Y_2 F\left(\frac{Y}{Y_2}\right).$$

由此可知, 正定函数 $V_2(t)$ 在捕食者主导平衡点 P_2 处取得唯一最小值为零.

当 $R_1 > 1 \geq R_2$ 时, 注意到 $gS_2 = d_2$, 沿着系统 (6) 轨线计算 $V_2(t)$ 的全导数, 可得

$$\frac{dV_2(t)}{dt} = -\frac{d_1 + pY_2}{S}(S - S_2)^2 + \frac{Ag}{d_2}(R_2 - 1)I \leq 0.$$

当且仅当 $(S, I, Y) = (S_2, 0, Y_2)$, 有 $V_2'(t) = 0$. 又因为模型 (1) 在 P_2 处 Jacobian 矩阵的特征方程为 $[d_2\lambda - Ag(R_2 - 1)][\lambda^2 + (d_1 + pY_2)\lambda + pgS_2Y_2] = 0$.

当 $R_1 > 1, R_2 > 1$ 时, 特征方程存在一个正特征值, 故 P_2 是不稳定的; 当 $R_1 > 1 \geq R_2$ 时, 特征方程的非零特征值均具有负实部, 而且零特征值作为特征单根, 故 P_2 是局部渐近稳定.

根据 LaSalle 不变性原理^[16]可知: 模型 (1) 的捕食者主导平衡点 P_2 在域 Ω 上是全局渐近稳定的. 证毕.

定理 4 当 $R_1 > 1, R_2 > 1$ 时, 模型 (1) 的正平衡点 P_3 在域 Ω 内是全局渐近稳定.

证明 将模型 (1) 改为如下等价系统, 有

$$\left. \begin{aligned} S' &= -d_1(S - S_3) - \beta(IS - I_3S_3) - p(SY - S_3Y_3), \\ I' &= \beta(IS - I_3S_3) - d_1(I - I_3) - p(IY - I_3Y_3), \\ Y' &= g(SY - S_3Y_3) + g(IY - I_3Y_3) - d_2(Y - Y_3). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

设 (S, I, Y) 是系统 (7) 的任意正解, 利用函数 $F(\xi) = \xi - 1 - \ln \xi$ 在 $(0, +\infty)$ 上的非负性质, 构造 Lyapunov 泛函为

$$V_3(t) = S_3 F\left(\frac{S}{S_3}\right) + I_3 F\left(\frac{I}{I_3}\right) + \frac{p}{g} Y_3 F\left(\frac{Y}{Y_3}\right).$$

易于验证正定函数 $V_3(t)$ 在正平衡点 P_3 处取得唯一最小值为零.

当 $R_1 > 1, R_2 > 1$ 时, 注意到 $R_2 R_1^2 = R_0$ 必有 $R_0 > 1, g(S_3 + I_3) = d_2, \beta I_3 S_3 = d_1 I_3 + p I_3 Y_3$, 所以直接计算 $V_3(t)$ 沿着系统 (7) 轨线的全导数, 有

$$\frac{dV_3(t)}{dt} = \frac{d_1 + \beta I_3 + pY_3}{S}(S - S_3)^2 \leq 0.$$

同时, 模型 (1) 在 P_3 处 Jacobian 矩阵的特征方程为

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0.$$

其中: $a_1 = d_1 + \beta I_3 + pY_3; a_2 = \beta^2 S_3 I_3 + pgS_3 Y_3 + pgI_3 Y_3; a_3 = pgI_3 Y_3 (d_1 + \beta I_3 + pY_3)$.

又因为 $\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = a_1 a_2 - a_3 = (d_1 + \beta I_3 + pY_3)(\beta^2 S_3 I_3 + pgS_3 Y_3), \Delta_3 = a_3 \Delta_2$ 皆为正数, 故由 Routh-Hurwitz 判据^[16]可知: 当 $R_1 > 1, R_2 > 1$ 时, P_3 总是局部渐近稳定.

由 LaSalle 不变性原理^[16]可知: 模型 (1) 的正平衡点 P_3 在域 Ω 内是全局渐近稳定的. 证毕.

4 结论

由定理 1 可知: 当食饵种群的易感者染病数量不多于 1 个, 且捕食者种群的捕食数量也不多于 1 个时, 该生态-流行病系统中的疾病尚未流行, 且捕食机制也尚未形成, 疾病和捕食者种群将在该系统中很快被消除, 食饵种群的易感者数量将全局渐近稳定在一个正常数上.

由定理 2 可知: 当食饵种群的易感者染病数量大于 1 个, 且捕食者种群的捕食数量不多于 1 个时, 该生态-流行病系统中疾病流行, 且捕食机制尚未形成, 捕食者种群在系统中趋于灭绝, 食饵种群的易感者和染病者数量将全局渐近稳定在一组正常数上.

由定理 3 可知: 当捕食者种群的捕食数量大于 1 个, 且疾病低于捕食对食饵种群的侵害, 该生态-流行病系统中疾病尚未流行, 且捕食机制已形成, 疾病在系统中很快消除, 食饵种群的易感者和捕食者数量将全局渐近稳定在一组正常数上.

由定理 4 可知:当捕食者种群的捕食数量大于 1 个,且疾病还高于捕食对食饵种群的侵害,该生态-流行病系统中捕食机制已形成且疾病流行,食饵种群的易感者、染病者和捕食者种群共存并将全局渐近稳定在一组正常数上.

综上所述, R_0 是疾病是否流行的阈值, R_1 是捕食机制是否形成的阈值, R_2 是疾病与捕食两者占优比较的阈值,三者共同刻画了生态-流行病系统(1)的演变规律性.

参考文献:

[1] 陈兰荪,陈键. 非线性生物动力系统[M]. 北京:科学出版社,1993:102-130.

[2] KERMACK W O, MCKENDRICK A G. Contributions to the mathematical theory of epidemics[J]. Bulletin of Mathematical Biology, 1991, 53(1): 33-55.

[3] 李林. 一个环境数学模型的一致持久性与稳定性[J]. 应用数学学报, 2003, 26(1): 149-157.

[4] 程荣福,李辉. 一个具功能性反应的微分生态系统的定性分析[J]. 东北师大学报(自然科学版), 2005, 37(1): 11-15.

[5] CHEN Fengde, SHI Jinlin. Periodicity in a logistic type system with several delays[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2004, 48(1/2): 35-44.

[6] 张正球,王志成. 基于比率的三种群捕食者-食饵扩散系统的周期解[J]. 数学学报, 2004, 47(3): 531-540.

[7] 范猛,王克. 一类具有 Holling II 型功能性反应的捕食者-食饵系统全局周期解的存在性[J]. 数学物理学报, 2001, 21(4): 83-91.

[8] 徐瑞,陈兰荪. 具有时滞和基于比率的三种群捕食系统的持久性与全局渐近稳定性[J]. 系统科学与数学, 2001, 21(2): 204-212.

[9] YOSHIDA N, HARA T. Global stability of a delayed SIR epidemic model with density dependent birth and death rates[J]. Computational and Applied Mathematics, 2007, 201(2): 339-347.

[10] 侯强,靳祯. 一个基于修正的 Leslie-Gower 生态传染病模型的研究[J]. 中北大学学报(自然科学版), 2012, 33(2): 98-101.

[11] 张少辉,靳祯. 具有非线性发生率的传染病模型性态分析[J]. 中北大学学报(自然科学版), 2012, 33(4): 353-357.

[12] 刘玉英,肖燕妮. 一类受媒体影响的传染病模型的研究[J]. 应用数学和力学, 2013, 34(4): 399-407.

[13] 傅金波,陈兰荪,程荣福. 具有潜伏期和免疫应答的时滞病毒感染模型的全局稳定性[J]. 高校应用数学学报(A 辑), 2015, 30(4): 379-388.

[14] 傅金波,陈兰荪,程荣福. 具有 Logistic 增长和治疗的 SIRS 传染病模型的后向分支[J]. 吉林大学学报(理学版), 2015, 53(6): 1166-1170.

[15] LI Jianquan, ZHANG Juan, MA Zhien. Global analysis of some epidemic models with general contact rate and constant immigration[J]. Applied Math Mech, 2004, 25(4): 396-404.

[16] 马知恩,周义仓. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京:科学出版社, 2004: 178-192.

(责任编辑: 钱筠 英文审校: 黄心中)