

doi: 10.11830/ISSN.1000-5013.201702003



受扰线性不确定系统鲁棒 H_∞ 混合镇定

庄梁, 林灿煌, 孙洪飞

(厦门大学 航空航天学院, 福建 厦门 361005)

摘要: 针对受外界扰动和参数不确定性影响的线性系统,同时考虑其暂态性能和稳态性能,提出基于混合稳定的鲁棒 H_∞ 控制概念和控制方法. 给出闭环系统混合稳定且抑制外部扰动对被控输出影响的充分条件,并将这些条件转化为线性矩阵不等式约束. 所设计的是一个关于时间连续的 H_∞ 混合镇定控制器,简化了设计过程,避免控制器切换导致的抖振. 仿真结果表明:在外界扰动和参数不确定影响的情况下,该控制方法达到预期的暂态性能和稳态性能的要求,且有效抑制了干扰对系统状态的影响.

关键词: H_∞ 混合镇定控制器; 鲁棒 H_∞ 控制; 线性不确定性系统; 外界扰动; 闭环系统

中图分类号: TP 273

文献标志码: A

文章编号: 1000-5013(2017)02-0147-06

Robust H_∞ Mixed Stabilization of Uncertain Linear Systems With Disturbances

ZHUANG Liang, LIN Canhuang, SUN Hongfei

(School of Aerospace Engineering, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: To guarantee both the transient and steady performances of a linear system with uncertainties and disturbances, a new control method called mixed-stability-based H_∞ stabilization is proposed. The solvable conditions of mixed-stability-based H_∞ stabilization are presented by using the linear matrix inequalities. The mixed-stability-based H_∞ stabilization controller given in this paper is continuous in time domain, thus simplifies the design process and avoids the potential chattering. Finally, a numerical simulation is conducted to demonstrate the effectiveness and feasibility of the proposed method.

Keywords: H_∞ hybrid stabilization controller; robust H_∞ control; linear uncertain system; external disturbance; closed loop system

在实际应用中,除了研究控制系统的稳态性能^[1]外,更加注重的是控制系统能否满足相应的暂态性能指标要求^[2]. 为了研究系统的暂态性能,Dorato 首先提出了“短时间稳定性”的概念,即后来所谓的有限时间稳定(finite-time stable, FTS),并得到学术界的广泛关注和研究. 有限时间稳定要求在给定时间区间内,系统的状态始终不超过给定界限^[3-4]. 有限时间稳定和李亚普若夫渐近稳定(Lyapunov asymptotic stability, LAS)是两个互相独立的概念^[5]. 对于控制过程比较短暂的系统,如机器人操控系统、导弹系统等,除了研究控制系统的稳态性能外,更加注重的是控制系统能否满足相应的暂态性能指标要求. 林灿煌等^[6]研究了输入受限不确定线性系统的镇定问题,并首次提出了混合稳定的概念,给出混合

收稿日期: 2016-08-02

通信作者: 孙洪飞(1970-),男,教授,博士,主要从事混合系统控制、基于网络的系统控制和非线性控制理论及在运动体控制上的应用的研究. E-mail: sunhf@xmu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61273153, 61374037)

稳定的稳定性条件. 目前, 控制系统扰动抑制采用的控制策略主要有内模原理^[7]、滑模控制^[8-10]、自适应干扰抑制^[11]和 H_∞ 控制理论^[12-13]. 申铁龙^[12]在控制器设计过程中不仅能实现对干扰的抑制, 且考虑了系统数学模型在一定范围内存在的不确定性影响. Sun 等^[13]通过 H_∞ 控制和非线性干扰观测器解决了系统含有周期扰动时的控制问题. 本文针对受外界扰动和参数不确定性影响的线性系统, 同时考虑系统控制过程中的暂态性能和稳态性能, 提出一种基于混合稳定的鲁棒 H_∞ 控制概念和控制方法.

1 问题描述

考虑如下受扰线性不确定系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= [A + \Delta A(t)]x + [B + \Delta B(t)]u + Gw, \\ z &= Cx + Du. \end{aligned} \right\} \tag{1}$$

式(1)中: $x \in \mathbb{R}^n$ 为系统的状态变量; $z \in \mathbb{R}^p$ 为系统的被调输出; $u \in \mathbb{R}^m$ 为系统的控制向量; $w \in \mathbb{R}^q$ 为能量有限的外部干扰信号; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $G \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ 为描述标称系统的矩阵. ΔA , ΔB 是系统的不确定参数矩阵并假设它们是范数有界的, 则有形式^[14]为

$$[\Delta A \quad \Delta B] = F\Delta_1[E_1 \quad E_2]. \tag{2}$$

式(1)中: 不确定性摄动矩阵 $\Delta_1 \in \mathbb{R}^{d \times e}$ 是一个满足 $\Delta_1^T \Delta_1 \leq I$ 的矩阵, $F \in \mathbb{R}^{n \times d}$, $E_1 \in \mathbb{R}^{e \times n}$, $E_2 \in \mathbb{R}^{e \times m}$ 是反映系统不确定性结构的常数矩阵.

外部扰动条件应满足

$$\int_0^\infty w^T(t)w(t)dt < d^2. \tag{3}$$

定义 1^[3] 考虑如下线性系统, 有

$$\dot{x}(t) = Ax(t). \tag{4}$$

对于给定的四元数组 (c_1, c_2, T, R) , 其中, $c_2 > c_1 > 0, R > 0$, 当 $x_0^T R x_0 \leq c_1$ 时, 有

$$x^T(t)R x(t) \leq c_2, \quad \forall t \in [0, T],$$

则称该系统关于 (c_1, c_2, T, R) 是有限时间稳定的, 其中, $x_0 = x(0)$ 是系统的初始状态.

定义 2^[6] 如果系统(4)关于 (c_1, c_2, T, R) 是有限时间稳定的, 且在无穷时间区间上是李雅普诺夫渐近稳定(LAS)的, 则称系统是混合稳定的.

问题 1 (H_∞ 混合镇定)对系统(1)设计一个状态反馈控制器, 即

$$u = Kx(t), \tag{5}$$

使得系统(1)连同控制器(5)形成的闭环系统. a) 当 $w = 0$ 时, 混合稳定; b) 当 $x(0) = 0$ 时, 从外部扰动 w 到被控输出中 z 的 L_2 增益小于给定正数 γ . K 为需要设计的控制器增益矩阵, 称具有性质 a) 和 b) 的控制器 u 为 H_∞ 混合镇定控制器.

2 H_∞ 混合镇定控制器设计

混合控制需要同时考虑系统的暂态性能和稳态性能. 文献[6]给出的混合控制器本质上包含两部分, 暂态过程控制器 $u_1 = K_1 x$ 和稳态过程控制器 $u_2 = K_2 x$, 其中, K_1, K_2 为控制器增益矩阵. 控制器 u_1 的作用是使闭环系统满足暂态过程性能要求, 控制器 u_2 的作用是使闭环系统满足稳态过程性能要求. 一般的混合控制器的形式为

$$u = \begin{cases} K_1 x, & t \leq T, \\ K_2 x, & t > T. \end{cases} \tag{6}$$

上述混合控制器是关于时间的切换控制器, 在 $t = T$ 时刻, 由于控制输入的不连续性会导致系统状态出现跳变甚至抖振. 文献[6]通过引入缓冲时间消除潜在抖振, 得到控制器形式为

$$u = \begin{cases} K_1 x, & t \leq T, \\ kx, & T < t \leq T + t_s, \\ K_2 x, & t > T + t_s. \end{cases} \tag{7}$$

式(7)中: t_s 为切换缓冲时间; $k = K_1 + (K_2 - K_1)(t - T)/t_s$ 为过渡时间段控制器增益矩阵.

仿真结果表明: 通过引入缓冲时间可以在一定程度上消除抖振, 但无法在理论上保证闭环系统混合稳定. 以下给出控制器简化的设计过程, 所设计关于时间连续的 H_∞ 混合镇定控制器使 H_∞ 混合镇定问题 1 可解.

引理 1^[15] 给定适当维数的矩阵 N, E 和 M , 其中, N 是对称的, 则

$$N + E\Delta(t)M + M^T\Delta^T(t)E^T < 0$$

对所有满足 $\Delta^T(t)\Delta(t) \leq I$ 的矩阵 $\Delta(t)$ 成立, 当且仅当存在数 $\epsilon > 0$, 使

$$N + \epsilon EE^T + \epsilon^{-1}M^TM < 0.$$

下面定理通过给出一个关于时间连续的 H_∞ 混合镇定控制器, 使当系统受到外界干扰和不确定影响时, 满足有限时间稳定和渐近稳定.

定理 1 如果存在标量 $\alpha \geq 0, \gamma > 0, \epsilon > 0$, 矩阵 $L \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 和正定对称矩阵 $Q \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 使

$$\begin{bmatrix} A\tilde{Q} + \tilde{Q}A^T + BL + L^TB^T + \epsilon FF^T & (E_1\tilde{Q} + E_2L)^T & (C\tilde{Q} + DL)^T & G \\ E_1\tilde{Q} + E_2L & -\epsilon I & 0 & 0 \\ C\tilde{Q} + DL & 0 & -I & 0 \\ G^T & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (8)$$

$$\frac{c_1}{\lambda_{\min}(Q)} < \frac{c_2 \exp(-\alpha T)}{\lambda_{\max}(Q)} \quad (9)$$

成立. 其中, $\tilde{Q} = R^{-1/2}QR^{-1/2}$. 则 H_∞ 混合镇定问题 1 可解, 且 H_∞ 混合镇定控制器增益矩阵 $K = L\tilde{Q}^{-1}$.

证明 设 $V(x) = x^T\tilde{Q}^{-1}x$, 则 V 沿系统轨线的导数为

$$\dot{V} = x^T[A_1^T\tilde{Q}^{-1} + \tilde{Q}^{-1}A_1]x + w^TG^T\tilde{Q}^{-1}x + x^T\tilde{Q}^{-1}Gw. \quad (10)$$

式(10)中: $A_1 = A + \Delta A + (B + \Delta B)K$, 且有

$$\dot{V} = \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_1^T\tilde{Q}^{-1} + \tilde{Q}^{-1}A_1 & \tilde{Q}^{-1}G \\ G^T\tilde{Q}^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}. \quad (11)$$

另一方面, 由 Schur 补引理可知, 式(8)等价于

$$\begin{bmatrix} A + \epsilon^{-1}(E_1\tilde{Q} + E_2L)^T(E_1\tilde{Q} + E_2L) + (C\tilde{Q} + DL)^T(C\tilde{Q} + DL) & G \\ G^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (12)$$

式(12)中: $A = A\tilde{Q} + \tilde{Q}A^T + BL + L^TB^T + \epsilon FF^T$.

因为 $K = L\tilde{Q}^{-1}$, 则可得 $L = K\tilde{Q}$, 代入式(12), 可得

$$\begin{bmatrix} A_1 + \epsilon^{-1}(E_1\tilde{Q} + E_2K\tilde{Q})^T(E_1\tilde{Q} + E_2K\tilde{Q}) + \epsilon FF^T & G \\ G^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (13)$$

式(13)中: $A_1 = A\tilde{Q} + \tilde{Q}A^T + BK\tilde{Q} + (BK\tilde{Q})^T + (C\tilde{Q} + DK\tilde{Q})^T(C\tilde{Q} + DK\tilde{Q})$.

再由引理 1 可知, 式(13)等价于

$$\begin{bmatrix} A_1\tilde{Q} + \tilde{Q}A_1^T + \tilde{Q}C_1^TC_1\tilde{Q} & G \\ G^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (14)$$

式(14)中: $C_1 = C + DK$.

因为 $\tilde{Q}C_1^TC_1\tilde{Q} \geq 0$, 则有 $\begin{bmatrix} A_1\tilde{Q} + \tilde{Q}A_1^T & G \\ G^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0$. 将式左右同乘 $\begin{bmatrix} \tilde{Q}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$, 可得

$$\begin{bmatrix} \tilde{Q}^{-1}A_1 + A_1^T\tilde{Q}^{-1} & \tilde{Q}^{-1}G \\ G^T\tilde{Q}^{-1} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (15)$$

对比式(11)和式(15)可得 $\dot{V} - \gamma^2 w^T(t)w(t) < 0$. 当外扰 $w = 0$ 时, 可改为 $\dot{V} < 0$. 所以当外扰为零时, 闭环系统渐近稳定.

接下来证明当外扰为零时, 闭环系统在时间 $[0, T]$ 上有限时间稳定. 由 $\dot{V} < 0$ 及 $\alpha \geq 0$, 可得 $\dot{V} < 0 \leq \alpha V$, 即 $\dot{V} - \alpha V < 0$. 将其乘以 $\exp(-\alpha t)$, 可得

$$\frac{d}{dt}(\exp(-\alpha t)V) < 0. \quad (16)$$

对式(16)从 0 到 t 积分, $\forall t \in [0, T]$, 可得

$$V(x(t)) < \exp(-\alpha t)V - x(0), \tag{17}$$

则有

$$x^T(t)R^{1/2}Q^{-1}R^{1/2}x(t) < \exp(-\alpha t)[x^T(0)R^{1/2}Q^{-1}R^{1/2}x(0)] \leq [\lambda_{\max}(Q^{-1})x^T(0)Rx(0)]. \tag{18}$$

又因 $x^T R^{1/2} Q^{-1} R^{1/2} x(t) \geq \lambda_{\min}(Q^{-1})x(t)^T R x(t)$, 则 $\lambda_{\min}(Q^{-1})x(t)^T R x(t) \leq x^T R^{1/2} Q^{-1} R^{1/2} x(t) \leq \exp(\alpha T)[\lambda_{\max}(Q^{-1})x(0)^T R x(0)]$, 由此可得

$$\lambda_{\min}(Q^{-1})x(t)^T R x(t) \leq \exp(\alpha T)\lambda_{\max}(Q^{-1})x(0)^T R x(0). \tag{19}$$

则有

$$x(t)^T R x(t) \leq \frac{\exp(\alpha T)\lambda_{\max}(Q^{-1})c_1}{\lambda_{\min}(Q^{-1})} = \frac{\exp(\alpha T)\lambda_{\max}(Q^{-1})c_1}{\lambda_{\min}(Q)}.$$

再由式(9)可得 $x(t)^T R x(t) < c_2$, 满足有限时间稳定条件.

因此, 当外扰为零时, 闭环系统在时间 $[0, T]$ 上有限时间稳定, 在无穷时间内渐近稳定, 即当外扰为零时, 闭环系统混合稳定.

接下来证明当 $x(0) = 0$ 时, 从外扰 w 到受控输出 z 的 L_2 增益小于指定的正数 γ . 对式(14)左右同乘 $\begin{bmatrix} \tilde{Q}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$, 可得

$$\begin{bmatrix} \tilde{Q}^{-1}A_1A_1^T\tilde{Q}^{-1} + C_1^T & \tilde{Q}^{-1}G \\ G^T\tilde{Q}^{-1} & -\gamma^2I \end{bmatrix} < 0. \tag{20}$$

对比式(11)和式(20)可得

$$\dot{V} - \gamma^2 w^T(t)w(t) + z^T(t)z(t) < 0. \tag{21}$$

两边对式(21)积分, 可得

$$V < \int_0^t [\gamma^2 w^T(s)w(s) - z^T(s)z(s)]ds. \tag{22}$$

由于 $V(x) = x^T \tilde{Q}^{-1} x$, 则有

$$\int_0^t z^T(s)z(s)ds < \gamma^2 \int_0^t w^T(s)w(s)ds, \tag{23}$$

即 $\|z\| < \gamma \|w\|$. 故 $x(0) = 0$ 时, 从外部扰动 w 到被控输出 z 的 L_2 增益小于 γ .

因此, 当条件(8), (9)满足时, H_∞ 混合镇定问题 1 可解, 且 H_∞ 混合镇定控制器增益矩阵 $K = I\tilde{Q}^{-1}$, 证毕.

注 1 文献[6]中使用的是两个不同的李雅普诺夫函数, 分别刻画系统的有限时间稳定和渐近稳定性; 而定理 1 中使用的是一个李雅普诺夫函数, 同时刻画系统的有限时间稳定和渐近稳定性, 具有一定的保守性. 定理 1 给出的 H_∞ 混合镇定控制器是一个关于时间连续的控制, 简化了设计过程, 避免了控制器切换过程存在的潜在抖振.

由定理 1 可知, 式(8)是一个线性矩阵不等式形式, 而式(9)不是线性矩阵不等式形式. 为了方便控制器求解, 将定理 1 转化为如下基于线性矩阵不等式(LMI)的可行解问题.

推论 1 如果存在标量 $\alpha \geq 0, \gamma > 0, \epsilon > 0$, 矩阵 $L \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 和正定对称矩阵 $Q \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 使式(8)和下列 LMI 成立, 即

$$\frac{c_1}{c_2} \exp(\alpha T)I < Q < I. \tag{24}$$

式(24)中: $\tilde{Q} = R^{-1/2}QR^{-1/2}$, 那么, H_∞ 混合镇定问题 1 可解, 且 H_∞ 混合镇定控制器增益矩阵 $K = I\tilde{Q}^{-1}$.

证明 容易验证式(24)能保证条件(9)成立, 则式(9)和式(24)可以保证定理 1 成立. 由定理 1 可知, H_∞ 混合镇定问题 1 可解, 且 H_∞ 混合镇定控制器增益矩阵 $K = I\tilde{Q}^{-1}$, 证毕.

3 数值仿真

考虑外界干扰和不确定影响, 设计 H_∞ 混合镇定控制器, 将得到的控制器在线性系统上进行仿真.

使过渡时间在 10 s 内, 超调量不超过 10%, 系统状态稳定到平衡点且对外界干扰有一定的抑制作用.

假设受控系统(1)参数为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0], \quad D = 1, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$\Delta A, \Delta B$ 分别满足 $\|\Delta A\| \leq 0.1, \|\Delta B\| \leq 0.1$, 将不确定性矩阵 $\Delta A, \Delta B$ 写成式(2)形式, 其中

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}.$$

状态变量的初值为

$$x_0 = [1 \quad -1.5]^T.$$

给定的外部扰动具有衰减特性, 由如下线性系统描述

$$\dot{\eta}(t) = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.5 \\ -0.1 & 0 \end{bmatrix} \eta(t), \quad w(t) = [1 \quad 0] \dot{\eta}(t).$$

为了实现控制目的, 取 $(c_1, c_2, T, R) = (1, 4, 10, I_{2 \times 2})$, 给定 $\alpha = 0.2, \gamma = 1.3$. 由推论 1 可得 H_∞ 混合镇定控制器 $u = Kx$, 其中 $K = [-1.355 \ 760 \ 0 \quad -1.013 \ 010 \ 4]$. 将得到的控制器在本节给出的线性系统上进行仿真, 仿真结果如图 1, 2 所示.

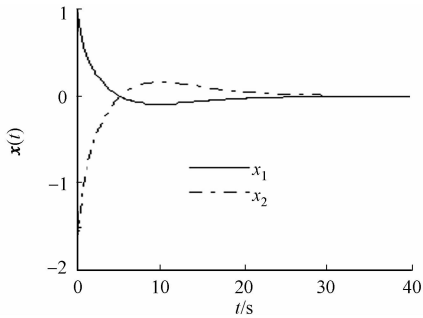


图 1 系统状态变化曲线

Fig. 1 Curves of state

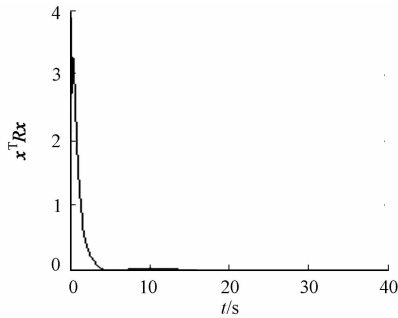


图 2 $x^T R x$ 变化曲线图

Fig. 2 Curves of $x^T R x$

为了说明 H_∞ 混合控制器的优越性, 对给出的系统分别使用 H_∞ 混合镇定控制器、渐近控制器^[15]、混合稳定控制器^[6]进行仿真. 其中: H_∞ 渐近控制器增益矩阵 $K_{\text{渐近}} = [-2.796 \ 947 \ 3 \quad -7.591 \ 343 \ 0]$; 混合稳定控制器中的有限时间稳定控制器增益矩阵 $K_1 = [-1.097 \ 713 \ 1 \quad -2.865 \ 556 \ 4]$; 渐近稳定控制器增益矩阵 $K_2 = [-3.526 \ 577 \ 2 \quad -7.020 \ 336 \ 6]$. 在 H_∞ 混合镇定控制器和 H_∞ 渐近控制器作用下, 系统状态 1 的变化曲线, 如图 3 所示. 在 H_∞ 混合镇定控制器和混合稳定控制器作用下, 系统状态 1 的变化曲线, 如图 4 所示.

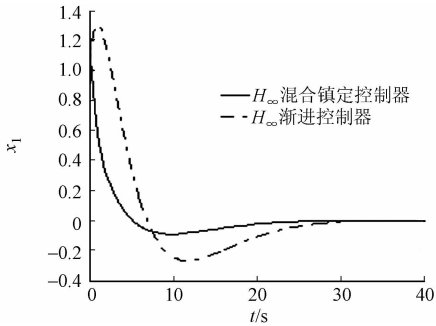


图 3 使用 H_∞ 混合镇定控制器和 H_∞ 渐近控制器系统状态 1 变化曲线

Fig. 3 Curves of state under H_∞ mixed

stabilization controller and H_∞ asymptotic controller

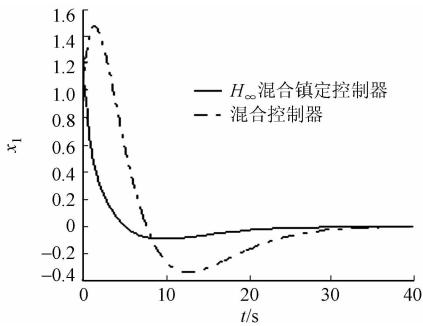


图 4 使用 H_∞ 混合镇定控制器和混合稳定控制器系统状态 1 变化曲线

Fig. 4 Curves of state under H_∞ mixed

stabilization controller and mixed controller

由图 3, 4 可知: 系统在受到外界扰动和不确定影响的情况下, 系统状态最终能稳定到平衡点, 超调量小且系统的状态不超过给定的界限. 由图 3 可知: 单独使用渐近控制器, 系统状态稳定到平衡点过渡

时间长,超调量大.由图4可知: H_∞ 混合镇定控制器相对于一般的混合稳定控制器能有效抑制干扰对系统状态的影响.这说明设计的 H_∞ 混合镇定控制器的有效性和优越性,保证了系统的暂态性能和稳态性能要求,且对外界扰动有一定的抑制作用.

4 结束语

针对受外界扰动和参数不确定性影响的系统,提出了基于混合稳定意义下的鲁棒 H_∞ 控制方法.同时考虑系统的暂态性能和稳态性能,给出了闭环系统混合稳定且抑制外部扰动对被控输出影响的充分条件,将这些条件转化为线性矩阵不等式约束.本文设计的 H_∞ 混合镇定控制器是一个关于时间连续的函数,简化了控制器设计过程.如何将文中结果应用于不仅需要满足稳态性能指标要求,而且需要满足相应暂态性能指标要求的系统,如机器人操控系统、导弹系统、宇航控制系统等控制过程比较短暂的实际系统,有待于进一步研究.

参考文献:

- [1] KHALIL H K, GRIZZLE J W. Nonlinear systems[M]. New Jersey: Prentice Hall, 1996: 112-118.
- [2] AMATO F, AMBROSINO R, ARIOLA M, *et al.* Finite-time stability and control[J]. London: Springer, 2014: 9-17.
- [3] AMATO F, CARANNANTE G, DE TOMMASI G, *et al.* Necessary and sufficient conditions for input-output finite-time stability of linear time-varying systems[C]//IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference. Orlando: IEEE Press, 2011: 1933-1937.
- [4] DORATO P. Short-time stability in linear time-varying systems[C]//Proceedings of the IRE International Convention Record. New York: IEEE Press, 1961: 83-87.
- [5] AMATO F, ARIOLA M, DORATO P. Finite-time control of linear systems subject to parametric uncertainties and disturbances[J]. Automatica, 2001, 37(9): 1459-1463.
- [6] 林灿煌, 孙洪飞. 输入受限不确定线性系统混合镇定[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 2016, 55(2): 244-250.
- [7] LU Jin, BROWN L J. A combination of open and closed-loop control for disturbance rejection[C]//24th Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering. Niagara Falls: IEEE Press, 2011: 563-568.
- [8] TANG Gongyou, LU Shanshan, DONG Rui. Optimal sliding mode control for linear time-delay systems with sinusoidal disturbances[J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 304(1/2): 263-271.
- [9] YOUNG K D, UTKIN V I, OZGUNER U. A control engineer's guide to sliding mode control[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 1999, 7(3): 328-342.
- [10] NA S, LIBRESCU L, KIM M. H, *et al.* Robust aeroelastic control of flapped wing systems using a sliding mode observer[J]. Aerospace Science and Technology, 2006, 10(2): 120-126.
- [11] FUENTES R J, BALAS M J. Direct adaptive rejection of persistent disturbances[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2000, 251(1): 28-39.
- [12] 申铁龙. H_∞ 控制理论及应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 1996: 121-124.
- [13] SUN Haibin, HOU Linlin, ZONG Guangdeng. Asymptotic attenuation and rejection for systems with general periodic disturbances via nonlinear disturbance observer and H_∞ control[C]//Proceedings of the 34th Chinese Control Conference. Hangzhou: IEEE Press, 2015: 710-715.
- [14] QIAN Chengshan, WU Qingxian, JIANG Changsheng, *et al.* H_∞ tracking control for a class of uncertain nonlinear systems with time-delay by using multi-model switching[J]. Journal of Shandong University, 2008, 42(12): 4150-4154.
- [15] 俞立. 鲁棒控制: 线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002: 87-88.

(责任编辑: 钱筠 英文审校: 崔长彩)