第 38 卷　第 1 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 38　No. 1
2017 年 1 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Jan. 2017

doi: 10.11830/ISSN.1000-5013.201701026

一类常微分方程的数值解法

薛雷

(山东财经大学 东方学院, 山东 泰安 271000)

摘要: 研究一类 Sturm-Liouville 微分方程的数值解. 针对$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[p(x)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}]+(\lambda\rho(x)-q(x))T=0$ 微分方程, 提出用更细的粒度估算渐近的特征值, 并对该方法进行论证. 将该方法应用到等式证明中, 结果表明: 证明方法是有效的.

关键词: Sturm-Liouville 微分方程; 边界值; 正解; 微分算子

中图分类号: O 246　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1000-5013(2017)01-0131-04

Numerical Solution for Class of Ordinary Differential Equations

XUE Lei

(Dongfang College, Shandong University of Finance and Economics, Taian 271000, China)

Abstract: One kind of numerical solution for Sturm-Liouville differential equation is studied. As to $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[p(x)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}]+(\lambda\rho(x)-q(x))T=0$. By raising finer granularity for this differential equation to estimate asymptotic eigen value, we prove our conclusion. The result shows that it works well.

Keywords: Sturm-Liouville differential equation; boundary value; positive solution; differential operator

微分算子属于无界限性算子, 在实际中得到了广泛的应用[1-6], 特别是在工程、数学、物理等领域中应用更为广泛. 微分算子理论中包括多种理论知识, 如谱理论、自共轭扩张理论、数值计算、亏指数理论等. 其中, 谱理论在所有知识中又是最重要的, 可以视其为核心. 在数学界, 微观粒子之间的作用一直是研究的热点问题, 而 Sturm-Liouville 这一问题更是成为所有学者的研究焦点. Sturm-Liouville 问题是二阶常微分方程分离变量求解方法的重要理论. 徐有基[7]应用 Leray-Schauder 延拓定理, 得到了二阶广义 Sturm-Liouville 边界条件多点边值问题的可解行. 陈东晓等[8]研究了一类满足 Sturm-Liouville 积分边值条件的二阶非线性微分方程的正解性. 基于以上研究, 本文研究一类正则 Sturm-Liouville 微分方程的数值解.

1　预备知识

Sturm-Liouville 方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[p(x)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}]+(\lambda\rho(x)-q(x))T=0,\qquad a<x<b.$$

上式中: $p(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$在定义域内都是 x 的是函数, 且 $p(x)>0$, $\rho(x)>0$, $q(x)>0$.

在定义域范围内 $p(x)$, $q(x)$及 $p'(x)$连续的. Sturm-Liouville 方程齐边界条件可以归纳为

收稿日期: 2016-12-05

通信作者: 薛雷(1982-), 男, 讲师, 博士, 主要从事微积分及经济数学的研究. E-mail: xue-xiao@163.com.

基金项目: 国家自然科学基金管理科学面上资助项目(70971014)

$$T(a)=T(b)=0, \qquad T'(a)=T'(b)=0, \qquad T(a)=T'(b)=0. \tag{1}$$

由式(1),可以求解 Sturm-Liouville 方程非零解. Sturm-Liouville 的和复的边界条件为

$$A\begin{pmatrix} T(a) \\ p(a)T'(a) \end{pmatrix}+B\begin{pmatrix} T(b) \\ p(b)T'(b) \end{pmatrix}=0.$$

根据 Sturm-Liouville 可积分条件可知,T 和它们的拟导数在区间范围内存在有限的极限. λ 的初始条件为 $\Phi_{11}(a,\lambda)=1, p(x)\ \Phi_{11}(a,\lambda)=0, \Phi_{12}(a,\lambda)=0, p(x)\ \Phi'_{12}(a,\lambda)=1$.

用 Φ_9 和 Φ_{22} 表示 $p(x)\ \Phi_{11}$ 及 $p(x)\ \Phi_{12}$. 令 $\Phi(x,\lambda)$ 为 Sturm-Liouville 方程的解,有

$$\Phi(x,\lambda)=\begin{vmatrix} \phi_{11}(x,\lambda) & \phi_{12}(x,\lambda) \\ \phi_{21}(x,\lambda) & \phi_{22}(x,\lambda) \end{vmatrix},$$

$$\Phi'(x,\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & 1/p(x) \\ p(x)-\lambda\rho(x)-q(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Sturm-Liouville 方程的解可以化简为

$$Y(x)=\begin{pmatrix} p(x) \\ p(x)T' \end{pmatrix}.$$

因此,边界条件可以形成 $AY(a)+BY(b)=0$. 分离边界条件可以表示为

$$\cos\alpha T(\alpha)-\sin\alpha(p(a)T'(a))=0,$$
$$\cos\beta T(\beta)-\sin\beta(p(\beta)T'(\beta))=0.$$

$Y(x)$可以用复数写为

$$Y(b)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}r}KY(a)Y(b).$$

Sturm-Liouville 方程分离边界条件[9]为

$$\cos\alpha T(a)-\sin\alpha(p(a)T'(a))=\cos\beta T(\beta)-\sin\beta(p(\beta)T'(\beta)).$$

上式中:$a\leqslant b$,都为实数;α,β 取值范围为$[0,\pi]$.

2 一些引理及证明

关于 Sturm-Liouville 方程的完整性有如下 3 个引理.

引理 1 设 $q\in L_R^l[0,\pi]$, $\alpha,\beta\in[0,\pi]$,那么,Sturm-Liouville 方程的边界值在 $L^2[0,\pi]$,特征根为$\{\varphi(x,\mu_n,\alpha)\}_{n=0}^{\infty}$. 如果 $T(x)$的值域在$[0,\pi]$是一个连续的函数,那么,有

$$T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi(x,\mu_n,\alpha).$$

上式中:$c_n=(1/a_n)\int_0^{\pi}T(x)\varphi(x,\mu_n,\alpha)\mathrm{d}x$ 在区域为$[0,\pi]$级数收敛的. 对于 $T\in L^2(0,\pi)$,那么,级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi(x,\mu_n,\alpha)$ 在 $L^2(0,\pi)$ 是收敛的. 因此,有$\int_0^{\pi}|T(x)|^2\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}a_n|c_n|^2$(帕谢互尔等式). 以此类推,$q\in L_R^l[0,\pi]$有类似的证明.

引理 2 设 $q\in L_R^l[0,\pi]$, $\alpha=\beta$, β 取值范围在$[0,\pi]$,那么,Sturm-Liouville 方程的边界值 $L^2(0,\pi)$的特征根为$\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. 函数 T 的定义域为$[0,\pi]$,是连续的,有

$$T(x)=\begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n(x)-T(0)\Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{\mu_n\alpha_n}\varphi_n(x)+\dfrac{\varphi_n(x,0,\beta)}{W_{\pi\beta}(0)}\Big), & 0\notin\sigma(L(q,\pi,\beta)), \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n(x)-T(0)\Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{\mu_n\alpha_n}\varphi_n(x)+ \\ \qquad \dfrac{\varphi_n(x,0,\beta)}{V_{\pi\beta}(0)}-\dfrac{\varphi_n(x,0,\beta)V_{\pi\beta}(0)}{V_{\pi\beta}^2(0)}\Big), & 0\notin\mu_{n_0}\in\sigma(L(q,\pi,\beta)). \end{cases}$$

上式中:$c_n=(1/a_n)\int_0^{\pi}T(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x$;级数取值范围为$[a,\pi]$, $a>0$. 对于 $T\in L^2[0,\pi]$,级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n(x)$ 在 $L^2[0,\pi]$ 是收敛的,有

$$\int_0^\pi |T(x)|^2 \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n |c_n|^2.$$

证明　当$|\lambda|\to\infty$时，渐近公式为

$$\varphi(x,\mu,\pi) \equiv \varphi_\pi(x,\mu) \equiv \varphi_\pi(x,\lambda^2) = \frac{\sin \lambda x}{\lambda} + O(\frac{\mathrm{e}^{|\mathrm{Im}\,\lambda| x}}{|\lambda|^2}),$$

$$\varphi'(x,\mu,\pi) \equiv \varphi'_\pi(x,\mu) \equiv \varphi'_\pi(x,\lambda^2) = \cos \lambda x + O(\frac{\mathrm{e}^{|\mathrm{Im}\,\lambda| x}}{|\lambda|}),$$

$$\psi(x,\mu,\beta) \equiv \psi_\beta(x,\mu) \equiv \psi_\beta(x,\lambda^2) = \cos \lambda(\pi - x)\sin \beta + \frac{\sin \lambda(\pi - x)}{\lambda}\cos \beta + O(\frac{\mathrm{e}^{|\mathrm{Im}\,\lambda|(\pi-x)}}{|\lambda|})\sin \beta + O(\frac{\mathrm{e}^{|\mathrm{Im}\,\lambda|(\pi-x)}}{|\lambda|^2})\cos \beta,$$

$$\psi'(x,\mu,\beta) \equiv \psi'_\beta(x,\mu) \equiv \psi'_\beta(x,\lambda^2) = (\lambda\sin \lambda(\pi - x) + O(\frac{\mathrm{e}^{|\mathrm{Im}\,\lambda|(\pi-x)}}{|\lambda|}))\sin \beta - (\cos \lambda(\pi - x) + O(\frac{\mathrm{e}^{|\mathrm{Im}\,\lambda|(\pi-x)}}{|\lambda|}))\cos \beta.$$

因此，估计值为

$$\psi\beta(0,\mu) = -\cos \lambda\pi\sin \beta - \frac{\sin \lambda\pi}{\lambda}\cos \beta + O(\frac{\mathrm{e}^{|\mathrm{Im}\,\lambda|\pi}}{|\lambda|})\sin \beta + O(\frac{\mathrm{e}^{|\mathrm{Im}\,\lambda|\pi}}{|\lambda|^2})\cos \beta.$$

引理 3　假设 $q\in L_R^l[0,\pi]$，$\alpha\in(0,\pi)$，$\beta=0$ 时，那么，$L(q,\alpha,0)$边界值在 $L^2(0,\pi)$时的特征函数为$\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. 设 $T(x)$函数在$[a,\pi]$是连续的，有

$$T(x) = \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x) - T(\pi)(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n b_n}\psi_n(x) + \frac{\varphi_n(x,0,\alpha)}{W_{\alpha,0}(0)}), & 0 \notin \sigma(L(q,\pi,\beta)), \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x) - T(\pi)(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n b_n}\psi_n(x) + \frac{\varphi_n(x,0,\alpha)}{V_{\alpha,0}(0)} - \\ \qquad \frac{\varphi_n(x,0,\alpha)V_{\alpha,0}(0)}{V_{\alpha,0}^2(0)}), & 0 \notin \mu_{n_0} \in \sigma(L(q,\pi,\beta)). \end{cases}$$

上式中：$c_n = (1/a_n)\int_0^\pi T(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x$；级数取值范围为$[a,\pi]$，$a>0$. 对于 $T\in L^2[0,\pi]$，级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_\alpha(x,\mu_n)$ 在区域为 $L^2[0,\pi]$，有

$$\int_0^\pi |T(x)|^2 \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n |c_n|^2.$$

3　主要结果

当 $q\in L_R^l[0,\pi]$时，需要更细的粒度估算渐近的特征值. Harutyunyan[10] 定义 $\sigma_n(\alpha,\beta) = \sqrt{\mu_n(0,\alpha,\beta)}$，并证明了如下等式，即

$$\sigma_n(\alpha,\beta) = \frac{1}{\pi}\arccos \frac{\cos \alpha}{\sqrt{(n+\sigma_n(\alpha,\beta)^2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}} - \frac{1}{\pi}\arccos \frac{\cos \beta}{\sqrt{(n+\sigma_n(\alpha,\beta))^2\sin^2 \beta + \cos^2 \beta)}}.$$

假设 $\lambda_n^2(q,\alpha,\beta) = \mu_n(q,\alpha,\beta)$，那么，有

$$\lambda_n(q,\alpha,\beta) = n + \sigma_n(\alpha,\beta) + \frac{1}{2\pi(n+\sigma_n(\alpha,\beta))} + 1_n(q,\alpha,\beta) + O(\frac{1}{n^2}).$$

上式中：$|q| \frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(x)\mathrm{d}x$；$1_n = 1_n(q,\alpha,\beta) = \frac{1}{2\pi(n+\sigma_n(\alpha,\beta))}\int_0^\pi q(x)\cos 2(n+\sigma_n(\alpha,\beta))x\mathrm{d}x$；$\alpha,\beta\in[0,\pi]$；$q\in L_R^l[0,\pi]$.

当 $\alpha=\pi$，$\beta=\pi$ 时，有

$$l(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \ln(q,\alpha,\beta)\sin(n+\sigma_n(\alpha,\beta))x.$$

a_n，b_n 的计算分别为

$$a_n(q,\alpha,\beta) = \frac{\pi}{2}(1+\frac{S_n(q,\alpha,\beta)}{n+\sigma(\alpha,\beta)} + \gamma_n)\sin^2\alpha + \frac{\pi}{2(n+\sigma(\alpha,\beta))^2}(1+\frac{S_n(q,\alpha,\beta)}{n+\sigma(\alpha,\beta)} + \gamma_n)\cos^2\alpha,$$

$$b_n(q,\alpha,\beta) = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{S_n(q,\alpha,\beta)}{n+\sigma(\alpha,\beta)} + \gamma_n\right)\sin^2\beta + \frac{\pi}{2(n+\sigma(\alpha,\beta))^2}\left(1 + \frac{S_n(q,\alpha,\beta)}{n+\sigma(\alpha,\beta)} + \gamma_n\right)\cos^2\beta.$$

上式中：$S_n = S_n(q,\alpha,\beta) = \frac{-1}{2}\int_0^{\pi}(\pi - x)q(x)\sin 2(n+\sigma_n(\alpha,\beta))x\,\mathrm{d}x$；$r_n = r_n(q,\alpha,\beta) = O\frac{1}{n^3}$.

4 实际的应用

等式 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(n+1/2)x}{n+1/2} = \frac{\pi}{2}$ 成立的证明.

证明　因为 $\frac{\sin(n+1/2)x}{n+1/2} = \frac{\sin(n+1/2)x}{n} - \frac{\sin(n+1/2)x}{2n(n+1/2)} = \cos\frac{x}{2}\frac{\sin nx}{n} + \sin\frac{x}{2}\frac{\cos nx}{n} - \frac{1}{2}\int_0^x\frac{\cos(n+1/2)x}{n}\mathrm{d}x$.

又因为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}$，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n} = -\ln 2\cdot\sin\frac{x}{2}$，则有 $\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+1/2)x}{n}\mathrm{d}x = \int_0^x\cos\frac{x}{2}\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n)x}{n}\mathrm{d}x + \int_0^x\sin\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n)x}{n}\mathrm{d}x = \int_0^x\cos\frac{x(\pi - x)}{4}\mathrm{d}x - \int_0^x\sin\frac{x}{2}\ln 2\cdot\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x = (\pi - x)\times\sin\frac{x}{2} - 4\cos\frac{x}{2} + 4 + 2((\cos\frac{x}{2} - 1)\ln 4\cdot\sin\frac{x}{4} + (\cos\frac{x}{2} + 1)\ln\cos\frac{x}{4})$.

所以 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(n+1/2)x}{n+1/2} = 2\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x(\pi - x)}{4} - \sin\frac{x}{2}\cdot\ln 2\cdot\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}(-2\sin\frac{x}{2}\cdot\ln 2\times\sin\frac{x}{2} + 4\sin\frac{x}{2} + (\pi - x)\cos\frac{x}{2} - \pi) = \frac{\pi}{2}$.

参考文献：

[1] BONHEURE D,GOMES J M,HABETS P. Multiple positive solutions of superlinear elliptic problems with sign-changing weight[J]. Journal of Differential Equations,2005,214(1):36-64.

[2] KHOLKIN A M,ROFE-BEKETOV F S. On spectrum of differential operator with block-triangular matrix coefficients[J]. Journal of Mathematical Physics Analysis Geometry,2014,10(1):44-63.

[3] BASKAKOV A G,DIDENKO V B. Spectral analysis of differential operators with unbounded periodic coefficients [J]. Differential Equations,2015,51(3):325-341.

[4] GRUBB G. Fractional Laplacians on domains, a development of Hörmander's theory of μ-transmission pseudodifferential operators[J]. Advances in Mathematics,2014,268(18):478-528.

[5] GRUBB G. Local and nonlocal boundary conditions for μ-transmission and fractional elliptic pseudo differential operators[J]. Mathematics,2014,7(7):1649-1682.

[6] MIRONOV A E. Self-adjoint commuting ordinary differential operators[J]. Inventiones Mathematicae,2014,197(2):1-15.

[7] 徐有基.一类二阶广义 Sturm-Liouville 边界条件多点边值问题的可解性[J].西北师范大学学报(自然科学版),2008,44(4):1-5.

[8] 陈东晓,陈应生.二阶微分方程积分边值问题正解的存在性[J].华侨大学学报(自然科学版),2013,34(5):587-590.

[9] FELTRIN G,ZANOLIN F. Existence of positive solutions in the superlinear case via coincidence degree: The neumann and the periodic boundary value problems[J]. Advances in Differential Equations,2015,20(9/10):937-982.

[10] HARUTYUNYAN T N. The dependence of the eigenvalues of the Sturm-Liouville problem on boundary conditions[J]. Matematicki Vesnik,2008,60(4):285-294.

(责任编辑：陈志贤　　英文审校：黄心中)

《华侨大学学报(自然科学版)》征稿简则

《华侨大学学报(自然科学版)》是华侨大学主办的，面向国内外公开发行的自然科学综合性学术刊物．本刊坚持四项基本原则，贯彻“百花齐放，百家争鸣”和理论与实践相结合的方针，广泛联系海外华侨和港、澳、台、特区的科技信息，及时反映国内尤其是华侨大学等高等学府在基础研究、应用研究和开发研究等方面的科技成果，为发展华侨高等教育和繁荣社会主义科技事业服务．本刊主要刊登机械工程及自动化、测控技术与仪器、电气工程、电子工程、计算机技术、应用化学、材料与环境工程、化工与生化工程、土木工程、建筑学、数学和管理工程等基础研究和应用研究方面的学术论文，科技成果的学术总结，新技术、新设计、新产品、新工艺、新材料、新理论的论述，以及国内外科技动态的综合评论等内容．

1　投稿约定

1.1　作者应保证文稿为首发稿及文稿的合法性；署名作者对文稿均应有实质性贡献，署名正确，顺序无争议；文稿中所有事实均应是真实的和准确的，引用他人成果时，应作必要的标注；不违反与其他出版机构的版权协议及与其他合作机构的保密协议；无抄袭、剽窃等侵权行为，数据伪造及一稿两投等不良行为．如由上述情况而造成的经济损失和社会负面影响，由作者本人负全部责任．

1.2　自投稿日期起2个月之内，作者不得另投他刊．2个月之后，作者若没有收到反馈意见，可与编辑部联系．无论何种原因，要求撤回所投稿件，或者变更作者署名及顺序，需由第一作者以书面形式通知编辑部并经编辑部同意．

1.3　作者同意将该文稿的发表权，汇编权，纸型版、网络版及其他电子版的发行权、传播权和复制权交本刊独家使用，并同意由编辑部统一纳入相关的信息服务系统．

1.4　来稿一经刊用，作者须按规定交纳版面费，同时编辑部按篇一次性付给稿酬并赠送该期刊物．本刊被国内外多家著名文摘期刊和数据库列为收录刊源，对此特别声明不另收费用，也不再付给稿酬．

1.5　其他未尽事宜，按照《中华人民共和国著作权法》和有关的法律法规处理．

2　来稿要求和注意事项

2.1　来稿务必具有科学性、先进性，论点鲜明、重点突出、逻辑严密、层次分明、文字精练、数据可靠．

2.2　论文题名字数一般不超过18字，必要时可加副题．文中各级层次标题要简短明确，一般不超过15字，且同一层次的标题应尽可能“排比”．

2.3　署名作者应对选题、研究、撰稿等作出主要贡献并能文责自负，一般以不超过3名为宜．作者单位应标明单位、所在城市、省份及邮政编码．

2.4　摘要应包括研究的目的、使用的方法、获得的结果和引出的结论等，应写成独立性短文且不含图表和引用参考文献序号等．其篇幅一般以150～250字左右为宜，关键词以4～8个为宜．

2.5　量和单位符号等要符合国家标准和国际标准．

2.6　能用文字说明的问题，尽量不用图表；画成曲线图的数据，不宜再列表．图表应有中英文标题．

2.7　参考文献仅选最主要的，且已公开发表的，按规范的内容、顺序、标点书写列入，并按其在文中出现的先后次序进行编号和标注．参考文献不少于10篇，未公开发表的资料不引用．

2.8　英文摘要尽可能与中文摘要对应，包括题目、作者姓名、作者单位、摘要、关键词．用过去时态叙述作者工作，用现在时态叙述作者结论，并符合英文写作规范．

2.9　文稿首页地脚处依次注明收稿日期；通信作者为可联系作者的姓名、出生年、性别、职称、学历、研究方向、电子邮件地址；基金项目为课题资助背景及编号，可几项依次排列．

2.10　投稿请直接登陆本刊唯一官方网站(www.hdxb.hqu.edu.cn)在线投稿．

《华侨大学学报(自然科学版)》编辑部

• 《中文核心期刊要目总览》
• RCCSE 中国核心学术期刊
• 中国期刊方阵"双效期刊"
• 中国科技论文在线优秀期刊
• ISTIC 中国科技核心期刊
• 全国优秀科技期刊
• 华东地区优秀期刊

本刊被以下国内外检索期刊和数据库列为固定刊源

• 美国《化学文摘》(CAS)
• 波兰《哥白尼索引》(IC)
• "STN 国际"数据库
• 中国科学引文数据库
• 中国科技论文统计期刊源
• 中国学术期刊(光盘版)
• 中文科技期刊数据库
• 中国力学文摘
• 中国生物学文摘
• 中国数学文摘
• 俄罗斯《文摘杂志》(AJ,VINITI)
• 荷兰《文摘与引文数据库》(Scopus)
• 德国《数学文摘》(Zbl MATH)
• 中国学术期刊综合评价数据库
• 中国期刊网
• 万方数据库
• 中国机械工程文摘
• 中国化学化工文摘
• 中国无线电电子学文摘
• 中国物理文摘

华侨大学学报(自然科学版)
Huaqiao Daxue Xuebao (Ziran Kexue Ban)
(双月刊,1980年创刊)
第38卷 第1期 (总第153期) 2017年1月20日

主管单位: 福建省教育厅
主办单位: 华侨大学
(中国 福建 泉州 362021)
(中国 福建 厦门 361021)
编辑出版: 华侨大学学报自然科学版编辑部
电　话: 0595-22692545
电子信箱: journal@hqu.edu.cn
网　址: www.hdxb.hqu.edu.cn
主　编: 乌东峰
印　刷: 泉州晚报印刷厂
国内发行: 福建省泉州市邮政局
订购处: 全国各地邮政局(所)
国外发行: 中国出版对外贸易总公司
(北京782信箱,邮政编码100011)

JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
(NATURAL SCIENCE)
(Bimonthly, Started in 1980)
Vol. 38 No. 1 (Sum. 153) Jan. 20, 2017

Competent Authority: Department of Education of Fujian Province
Sponsor: Huaqiao University
(Quanzhou 362021, Fujian, China)
(Xiamen 361021, Fujian, China)
Edited and Published by Editorial Department of Journal of Huaqiao University (Natural Science)
Tel: 0595-22692545
E-mail: journal@hqu.edu.cn
Http://www.hdxb.hqu.edu.cn
Editor in Chief: WU Dongfeng
Distributed by China Publication Foreign Trading Corporation
(P. O. Box 782, Beijing, 100011, China)

刊　号: ISSN 1000-5013 / CN 35-1079/N
代　号: 国内邮发 34-41 / 国外 NTZ 1050
国内定价: 8.00元/期 / 48.00元/年

ISSN 1000-5013
01>
9 771000 501170