第 37 卷 第 6 期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 37 No. 6
2016 年 11 月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Nov. 2016

doi:10.11830/ISSN.1000-5013.201606026

费马大定理的初等证明方法

张朝相[1],艾小川[2],黄开林[3],马迪生[4]

(1. 中国石油天然气股份有限公司 吐哈油田分公司,四川 成都 610081;
2. 海军工程大学 理学院,湖北 武汉 430033;
3. 四川永能油气技术开发有限公司,四川 成都 610017;
4. 中国石油天然气股份有限公司 西南油气田分公司,四川 成都 610255)

摘要: 给出不定方程 $X^n+Y^n=Z^n$ 在 n 为奇素数时,无正整数解的初等证明方法,即用初等数学方法证明了费马大定理.通过实例分析,结果显示文中证明方法的正确.

关键词: 费马大定理;初等数学方法;因式分解;多项式互素

中图分类号: O 156.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5013(2016)06-0786-05

Elementary Proof of Fermat Theorem

ZHANG Chaoxiang[1], AI Xiaochuan[2],
HUANG Kailin[3], MA Disheng[4]

(1. Tuha Oilfield Company, China National Petroleum Corporation, Chengdu 610081, China;
2. College of Science, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China;
3. Sichuan Yongneng Petroleum Technology Development Limited Company, Chengdu 610017, China;
4. Southwest Oil and Gasfield Company, China National Petroleum Corporation, Chengdu 610255, Chian)

Abstract: In this paper, an elementary proof method is given for the indefinite equation, $X^n+Y^n=Z^n$, which has no positive integer solution when n is an odd prime number, namely, it proves Fermat theorem with an elementary mathematical method. In addition, an example analysis is also given, and the results show that the proof method is correct.

Keywords: Fermat theorem; elementary mathematical method; factorization; relatively prime of polynomials

1 预备知识

费马大定理也称“费马猜想”,是十七世纪法国数学家费马提出的,他认为:一整数 3 次幂不能表为两个整数的同次幂之和;一个整数 4 次幂不能表为两个整数的同次幂之和;一般地讲,当 $n>2$,一个整数的 n 次幂表为两个整数的同次幂之和,这是不可能的.即对于 $X^n+Y^n=Z^n$,当 $n>2$ 时,不定方程无全正整数解.

“费马猜想”包含两层意义:1) 当 p(p 为任意奇素数)时,X,Y,Z 中一定有一个不为整数;2) 当 $n=4p$ 时,出现两个方程,$(X^p)^4+(Y^p)^4=(Z^p)^4$,$(X^4)^p+(Y^4)^p=(Z^4)^p$,若 X,Y 为正整数,必须首先是 Z^p,Z^4 不为整数,而后得 Z 不为整数.因此,只要证明当 $n=4,n=p$ 时,Z 不为整数即可.以前有种观点,只要证明 $n=4$ 的“费马猜想”成立,随之 $n=4p$ 的“费马猜想”也成立,这是概念上的错误[1].

收稿日期: 2016-11-06
通信作者: 张朝相(1942-),男,高级工程师,主要从事数论的研究.E-mail:zhangchaoxiang99@sohu.com.
基金项目: 四川省杰出青年科研基金资助项目(2011JQ0055)

“费马猜想”被提出后，经无数人辨证，先后证得 $n=3$，$n=4$，$n=5$，$n=7$，以及一些有限数时费马大定理成立.最终，在 1995 年被英国数学家安德鲁·怀尔斯所证明.但怀尔斯的证明高深冗长.费马在提出猜想的同时又说，他有一个绝妙的证明方法，只是“边页太小，写不下了”.他的证明到底是个怎样的证明，至今仍是一个谜.但可以肯定，费马处于当时的数学发展水平，他的证明肯定不是类似怀尔斯的证明，而是一个较为初等的方法[2].

在怀尔斯的证明之后，世界上仍有不少数学志士为此而着迷，极具代表性的是美国数学家科林·迈克拉蒂.2003 年，他称有比怀尔斯的更简单的方法，并先后在美国和加拿大的数学报告会上发表，取得极大的进展.但他使用近代的“群论”思想，这与费马所称的方法仍是相去甚远[3].

2 费马定理的证明

2.1 对 Z 进行因式分解

令 n 为任意奇素数 k，当 $k\geqslant 3$ 时，有

$$Z^k = X^k + Y^k. \tag{1}$$

设式(1)有一组正整数解 X_0，Y_0，Z_0，且 Z_0 是最小的正整数解，则式(1)变换为

$$Z_0^k = X_0^k + Y_0^k. \tag{2}$$

式(2)中：若$(X_0, Y_0)=U_1$，则 $U_1 | Z_0$.于是有 $X'_0=X_0/U_1$，$Y'_0=Y_0/U_1$，$Z'_0=Z_0/U_1$，则式(2)变为

$$Z'^k_0 = X'^k_0 + Y'^k_0 = (Z_0/U_1)^k.$$

2.2 Z_0 的求解

Z 因式分解后，求解 Z_0，由于有

$$\left.\begin{aligned} Z_{01}^k &= U(x,y) = X_0 + Y_0, \\ Z_{02}^k &= V(x,y) = X_0^{(k-1)} + Y_0^{(k-2)}Y_0 + \cdots - X_0Y_0^{(k-2)} + Y_0^{(k-1)}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

将 $X_0=Z_{01}^k-Y_0$ 代入式(2)，可得

$$Z_0^k = (Z_{01}^k - Y_0)^k + Y_0^k =$$
$$(Z_{01}^k)^k - C_k^1(Z_{01}^k)^{(k-1)}Y_0 + C_k^2(Z_{01}^k)^{(k-2)}Y_0^2 - \cdots + C_k^{(k-1)}(Z_{01}^k)Y_0^{(k-1)} - Y_0^k + Y_0^k.$$

上式右端共$(k+1)+1=k+2$ 项，经移项并消项可得

$$(Z_{01}^k)^k - Z_0^k = C_k^1(Z_{01}^k)^{(k-1)}Y_0 - C_k^2(Z_{01}^k)^{(k-2)}Y_0^2 + \cdots + C_k^{k-2}(Z_{01}^k)Y_0^{(k-2)} - C_k^{k-1}(Z_{01}^k)Y_0^{(k-1)}.$$

上式右端 $k-1$ 项，正负相间，Y_0 的系数都为组合数，每一组合数皆含有 k 因子[1]，且有 $C_k^1=C_k^{k-1}=k$，$C_k^2=C_k^{k-2}$，…，每一项皆有 k，Z_{01}^k，y_0 因子.所以，上式可变换为

$$(Z_{01}^k)^k - Z_0^k = Z_{01}^k kY_0\left[(Z_{01}^k)^{(k-2)} - (\frac{C_k^2}{k})(Z_{01}^k)^{(k-3)}Y_0 + \cdots + (\frac{C_k^{k-2}}{k})(Z_{01}^k)Y_0^{(k-3)} - Y_0^{(k-2)}\right]. \tag{4}$$

设上式右端中括号内代数和为 $\sum M'_1$，且将 $Z_{01}^k = X_0 + Y_0$ 代入 $\sum M'_1$，用二项式定理展开得

1) 第 1 项为

$$(X_0 + Y_0)^{(k-2)} = X_0^{(k-2)} + C^{2\,k-2}X_0^{(k-3)}Y_0 + \cdots + C_{k-2}^{(k-3)}X_0Y_0^{(k-3)} + Y_0^{(k-2)};$$

2) 第 2 项为

$$-(\frac{C_k^2}{k})(X_0 + Y_0)^{k-3}Y_0 = -(\frac{C_k^2}{k})[X_0^{(k-3)}Y_0 + C_{k-3}^1X_0^{(k-4)}Y_0^2 + \cdots + 1C_{k-3}^{(k-4)}X_0Y_0^{(k-3)}] - (\frac{C_k^2}{k})Y_0^{(k-2)};$$

3) 第 $k-2$ 项为

$$(\frac{C_k^{k-2}}{k})(X_0 + Y_0)Y_0^{k-3} = (\frac{C_k^{k-2}}{k})X_0Y_0^{(k-3)} + (\frac{C_k^{k-2}}{k})Y_0^{(k-2)};$$

4) 第 $k-1$ 项为

$$-Y_0^{(k-2)} = -Y_0^{(k-2)}.$$

2.3 引理及其证明

引理 1 自然数集合中任意相邻两数 a 和 b，若 $a_i=a+i$，$b_i=b-i$，$a_{i+1}=a+(i+1)$，$b_{i+1}=b-(i+1)$，则存在关系式$[a_ib_i-a_{i+1}b_{i+1}]$为等差数列$(i=0,1,2,3,\cdots)$，且 $ab>a_ib_i>a_{i+1}b_{i+1}$，ab 为最大值.

引理 2 k 为奇素数，如果正整数 Z_0，X_0，Y_0 满足 $X_0^k+Y_0^k=Z_0^k$，则有 $X_0+Y_0-Z_0\equiv 0 \pmod k$，或者

$k|(X_0+Y_0-Z_0)$.

证明:参见参考文献[1].

引理 3 $a^m-1=(a-1)(a^{m-1}+a^{m-2}+\cdots+1)$;若 $a\equiv1(\bmod m^k)$, $m^k|a-1$,因为 $a\equiv1(\bmod m)$,所以 $a^{m-1}+a^{m-2}+\cdots+1\equiv m\equiv0(\bmod m)$,也就有 $m|a^{m-1}+a^{m-2}+\cdots+1$,因此 $m^{k+1}|a^m-1$,即 $a^m\equiv1(\bmod m^{k+1})$,$k>0$,$m\geqslant3$ 的奇素数.

证明:参见参考文献[1].

推论 1 $a^m-1=(a-1)(a^{m-1}+a^{m-2}+\cdots+1)$;若 $a^{m-1}+a^{m-2}+\cdots+1\equiv m\equiv0(\bmod m)$;$m|a^{m-1}+a^{m-2}+\cdots+1$;因为 $a^{m-1}+a^{m-2}+\cdots+1\equiv0(\bmod m)$;所以 $m|a-1$,即 $m^2|a^m-1$,$a^m\equiv1(\bmod m^2)$.

注 1 引理和推论不同,引理有 $m^{k+1}|a^m-1$,$k\geqslant1$,而推论仅有 $m^2|a^m-1$,$m\geqslant3$ 的奇素数[4-8].

引理 4 p 为奇素数,C_{p-1}^k 是 $(a+b)^{p-1}$ 展开式 b_k 的系数,存在关系式

$$C_{p-1}^k\equiv(-1)^k(\bmod p),\quad k=0,1,2,3,\cdots,p-1.$$

证明:参见参考文献[1].

2.4 实例证明

实例 1 证明 1:假设 $d_0=1$,X_0,Y_0 为一偶一奇,或同为奇数,引入 $(-1)^e(e=1,2,3,\cdots,k-1)$ e 是 y_0 的幂指数,则有

$$Z_{02}^k=X_0^{(k-1)}-X_0^{(k-2)}Y_0+X_0^{(k-3)}Y_0^2-\cdots+(-1)^eX_0^{(k-e-1)}y_0^e-\cdots-X_0Y_0^{(k-2)}+Y_0^{(k-1)}.\tag{5}$$

将 $X_0=X_1$,$Y_0=Y_1$ 代入上式,并两端同减 1 可得

$$Z_{02}^k-1=X_0^{(k-1)}-X_0^{(k-2)}Y_1+X_0^{(k-3)}Y_1^2-\cdots+(-1)^eX_1^{(k-e-1)}y_1^e-\cdots-X_1Y_1^{(k-2)}+Y_1^{(k-1)}-1.\tag{6}$$

根据引理 2 可知 $k|(X_0+Y_0-Z_0)$,又有 $Z_{01}|(X_0+Y_0-Z_0)$,以及因为 $X_0+Y_0=Z_{01}^k$,$Z_0=Z_{01}-Z_{02}$,所以有 $\dfrac{X_0+Y_0-Z_0}{Z_{01}}=Z_{01}^{k-1}-Z_{02}=Z_{01}^{k-1}-1-(Z_{02}-1)$,$k|Z_{01}^{k-1}-1-(Z_{02}-1)$.

因 $(k,Z_{01})=1$,根据费马定理,$k|Z_{01}^{k-1}-1$,所以 $k|Z_{02}-1$,即 $Z_{02}\equiv1(\bmod k)$,$Z_{02}^k-1=(Z_{02}-1)\times(Z_{02}^{k-1}+Z_{02}^{k-2}+\cdots+1)$.

因为 $(k,Z_{02})=1$,根据引理 3 有 $k^2|Z_{02}^k-1$,所以 $Z_{02}^k\equiv1(\bmod k^2)$,因此存在 $Z_{02}^k-1=k^2b$. 其中:b 是 Z_{02}^k-1 与 k^2 相除的倍数.

证明 2:当 $d_0=k$ 时,有

$$\left.\begin{aligned}&Z_0^k=k^kZ_{01}^kZ_{02}^k,\qquad Z_0=kZ_{01}Z_{02},\\&U(x,y)=X_0+Y_0=k^{k-1}Z_{01}^k,\\&V(x,y)=kZ_{02}^k=X_0^{(k-1)}-X_0^{(k-2)}Y_0+X_0^{(k-3)}Y_0^2-\cdots-X_0Y_0^{(k-2)}+Y_0^{k-1}.\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

假设 $X_1=\dfrac{X_0+Y_0+1}{2}=\dfrac{k^{k-1}Z_{01}^k+1}{2}$,$Y_1=\dfrac{X_0+Y_0-1}{2}=\dfrac{k^{k-1}Z_{01}^k-1}{2}$,将 X_1,Y_1 代入式(2)可得

$$\left.\begin{aligned}&Z_0^k=\left(\frac{k^{k-1}Z_{01}^k+1}{2}\right)^k=\left(\frac{k^{k-1}Z_{01}^k-1}{2}\right)^k,\\&2^kZ_0^k=(k^{k-1}Z_{01}^k+1)^k+(k^{k-1}Z_{01}^k-1)^k=\\&[(k^{k-1}Z_{01}^k)^k+C_k^1(k^{k-1}Z_{01}^k)^{k-1}+C_k^2(k^{k-1}Z_{01}^k)^{k-2}+\cdots+\\&C_k^{k-2}(k^{k-1}Z_{01}^k)^2+C_k^{k-1}(k^{k-1}Z_{01}^k)+1]+[(k^{k-1}Z_{01}^k)^k-C_k^1(k^{k-1}Z_{01}^k)^{k-1}+\\&C_k^2(k^{k-1}Z_{01}^k)^{k-2}-\cdots-C_k^{k-2}(k^{k-1}Z_{01}^k)^2+C_k^{k-1}(k^{k-1}Z_{01}^k)-1],\\&2^{k-1}Z_0^k=(k^{k-1}Z_{01}^k)^k+C_k^2(k^{k-1}Z_{01}^k)^{k-2}+\cdots+C_k^{k-3}(k^{k-1}Z_{01}^k)^3+C_k^{k-1}(k^{k-1}Z_{01}^k).\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

上式右端组合数含 1 次 k 因子,第 1 项含 k 因子高次幂,且都有 $(k^{k-1}Z_{01}^k)$ 因子,因此可改写为

$$2^{k-1}Z_0^k=kk^{k-1}Z_{01}^k\left[\frac{(k^{k-1}Z_{01}^k)^{k-1}}{k}+(\frac{C_k^2}{k})(k^{k-1}Z_{01}^k)^{k-3}+\cdots+(\frac{C_k^{k-3}}{k})(k^{k-1}Z_{01}^k)^2+1\right].\tag{9}$$

因为 $Z_0^k=kk^{k-1}Z_{01}^kkZ_{02}^k$,故可改为

$$2^{k-1}Z_{02}^k=\frac{(k^{k-1}Z_{01}^k)^{k-1}}{k}+(\frac{C_k^2}{k})(k^{k-1}Z_{01}^k)^{k-3}+\cdots+(\frac{C_k^{k-3}}{k})(k^{k-1}Z_{01}^k)^2+1.\tag{10}$$

上式两端同减 2^{k-1} 后,再同除以 2^{k-1},可得

$$Z_{02}^{k}-1=\frac{(k^{k-1}Z_{01}^{k})^{2}\Big[\frac{(k^{k-1}Z_{01}^{k})^{k-3}}{k}+(\frac{C_{k}^{2}}{k})(k^{k-1}Z_{01}^{k})^{k-5}+\cdots+(\frac{C_{k}^{k-3}}{k})\Big]-2^{k-1}-1)}{2^{k-1}}.\tag{11}$$

费马定理表明：$a^{m-1}\equiv 1(\mathrm{mod}\ m)$；$(a,m)=1$；若 $a=b^{m}$，则为 $(b^{m-1})m\equiv 1(\mathrm{mod}\ m^{2})$

根据对费马定理的解释，式(11)中$(2^{k-1}-1)$只能是 $2^{k-1}\equiv 1(\mathrm{mod}\ k^{1})$，即 $k|2^{k-1}-1$ ；$2^{k-1}-1=kC_{2}$（C_{2} 是 $2^{k-1}-1$ 除以 k 的倍数），$(k,C_{2})=1$．则式(11)可变换为

$$Z_{02}^{k}-1=k\frac{(k^{2k-3}Z_{01}^{2k})\Big[\frac{(k^{k-1}Z_{01}^{k})^{k-3}}{k}+(\frac{C_{k}^{2}}{k})(k^{k-1}Z_{01}^{k})^{k-5}+\cdots+(\frac{C_{k}^{k-3}}{k})\Big]-C_{2}}{2^{k-1}}.\tag{12}$$

设上式中括号内代数和为 $\sum C_{1}$，则式(12)可改为

$$Z_{02}^{k}-1=k\frac{(k^{2k-3}Z_{01}^{2k})\sum C_{1}-C_{2}}{2^{k-1}}.\tag{13}$$

式(13)中，因为 $k\mid(k^{2k-3}Z_{01}^{2k})\sum C_{1}$，$(k,C_{2})=1$，所以$(k,[(k^{2k-3}Z_{01}^{2k})\sum C_{1}-C_{2}])=1$；又因$(k,2^{k-1})=1$，所以$\frac{(k^{2k-3}Z_{01}^{k})\sum C_{1}-C_{2}}{2^{k-1}}$为整数，设为 a_{3}，即有 $(k,a_{3})=1$．故式(13)可改为

$$(Z_{02}-1)(Z_{02}^{k-1}+Z_{02}^{k-2}+\cdots+1)=ka_{3}.\tag{14}$$

因为 a_{3} 为整数，所以 $k|Z_{02}^{k}-1$；又因 k 是奇素数，根据整除定理，$k|Z_{02}-1$，或 $k|(Z_{02}^{k-1}+Z_{02}^{k-2}+\cdots+1)$．若 $k|Z_{02}-1$，即 $Z_{02}\equiv 1(\mathrm{mod}\ k)$．根据引理 3 可知，$Z_{02}^{k-1}+Z_{02}^{k-2}+\cdots+1\equiv k\equiv 0(\mathrm{mod}\ k)$，故 $k|(Z_{02}^{k-1}+Z_{02}^{k-2}+\cdots+1)$，所以 $k^{2}|Z_{02}^{k}-1$．若 $k|Z_{02}^{k-1}+Z_{02}^{k-2}+\cdots+1$，即有 $Z_{02}^{k-1}+Z_{02}^{k-2}+\cdots+1\equiv k\equiv 0(\mathrm{mod}\ k)$，故有 $Z_{02}\equiv 1(\mathrm{mod}\ k)$，所以有 $k^{2}|Z_{02}^{k}-1$；$Z_{02}^{k}-1=k^{2}b_{3}$（b_{3} 是 $Z_{02}^{k}-1$ 除以 k^{2} 的倍数）．于是有

$$k^{2}b_{3}=ka_{3},\qquad b_{3}=a_{3}/k.$$

由于$(k,a_{3})=1$，所以 b_{3} 为既约分数．如设 $a_{1}=Z_{02}-1$，$a_{2}=Z_{02}^{k-1}+Z_{02}^{k-2}+\cdots+1$，则有 $a_{1}a_{2}=ka_{3}$．因为 a_{3} 是整数，所以式中 $k|a_{1}a_{2}$．由于 k 是奇素数，若 a_{1}，a_{2} 为整数，就有 $k|a_{1}$或 $k|a_{2}$，根据引理 3 就有 $k^{2}|a_{1}a_{2}$，而实际是 $k^{2}\nmid a_{1}a_{2}$，从而产生矛盾．因此，可以证明 a_{1}，a_{2} 不为整数，Z_{02}不为整数而为无理数．由此可得 $Z_{0}=kZ_{01}Z_{02}$，又因 k，Z_{01}为整数，Z_{02}为无理数，证明 Z_{0}为无理数．

实例 2　假设 Z_{0}为偶数，X_{0}，Y_{0} 为奇数，Z_{01}为偶数，则有

$$X_{1}=\frac{X_{0},Y_{0}+2}{2}=(k^{k-1}\frac{Z_{01}^{k}}{2})+1,\qquad Y_{1}=\frac{X_{0},Y_{0}-2}{2}=(k^{k-1}\frac{Z_{01}^{k}}{2})-1.\tag{15}$$

将 X_{1}，Y_{1} 代入式(2)可得

$$\begin{aligned}Z_{0}^{k}=&\Big[\Big(k^{k-1}\frac{Z_{01}^{k}}{2}\Big)+1\Big]^{k}+\Big[\Big(k^{k-1}\frac{Z_{01}^{k}}{2}\Big)-1\Big]^{k}=\\&\Big[\Big(k^{k-1}\frac{Z_{01}^{k}}{2}\Big)^{k}+C_{k}^{1}\Big(k^{k-1}\frac{Z_{01}^{k}}{2}\Big)^{k-1}+\cdots+C_{k}^{k-3}\Big(k^{k-1}\frac{Z_{01}^{k}}{2}\Big)^{3}+\\&C_{k}^{k-2}\Big(k^{k-1}\frac{Z_{01}^{k}}{2}\Big)^{2}+C_{k}^{k-1}\Big(k^{k-1}\frac{Z_{01}^{k}}{2}\Big)+1\Big]+\Big[\Big(k^{k-1}\frac{Z_{01}^{k}}{2}\Big)^{k}+C_{k}^{1}\Big(k^{k-1}\frac{Z_{01}^{k}}{2}\Big)^{k-1}+\cdots+\\&C_{k}^{k-3}\Big(k^{k-1}\frac{Z_{01}^{k}}{2}\Big)^{3}+C_{k}^{k-2}\Big(k^{k-1}\frac{Z_{01}^{k}}{2}\Big)^{2}+C_{k}^{k-1}\Big(k^{k-1}\frac{Z_{01}^{k}}{2}\Big)-1\Big].\end{aligned}\tag{16}$$

上式消项后提取公因数 2，k，$\Big(k^{k-1}\frac{Z_{01}^{k}}{2}\Big)$，加之有 $Z_{0}^{k}=k^{k-1}Z_{01}^{k}kZ_{02}^{k}$，可得

$$Z_{02}^{k}=\Big(k^{k-1}\frac{Z_{01}^{k}}{2}\Big)^{k-1}\Big/\Big(k+\cdots+\Big(\frac{C_{k}^{k-3}}{k}\Big)\Big(k^{k-1}\frac{Z_{01}^{k}}{2}\Big)^{2}+1\Big).\tag{17}$$

上式两端同减 1，右端提取公因数$(k^{k-1})^{2}$，可得

$$Z_{02}^{k}-1=(k^{k-1})^{2}\Big[(k^{k-1})^{k-3}\Big(\frac{Z_{01}^{k}}{2}\Big)^{k-1}\Big/\Big(k+\cdots+\Big(\frac{C_{k}^{k-3}}{k}\Big)\Big(\frac{Z_{01}^{k}}{2}\Big)^{2}\Big]\Big).\tag{18}$$

设中括号内代数和为 $\sum C_{3}$，则有

$$Z_{02}^{k}-1=(k^{k-1})^{2}\sum C_{3}.\tag{19}$$

上式中，$(k,\left(\frac{C_k^{k-3}}{k}\right)\left(\frac{Z_{01}^k}{2}\right)^2)=1$，$k \mid \sum C_3-\left(\frac{C_k^{k-3}}{k}\right)\left(\frac{Z_{01}^k}{2}\right)^2)$，因此有$(k,\sum C_3)=1$. 因为$\sum C_3$为整数，所以$(k^{k-1})^2 \mid Z_{02}^k-1$. 又因为$Z_{02}^k-1=(Z_{02}^k-1)(Z_{02}^{k-1}+Z_{02}^{k-2}+\cdots+1)$；$k$为奇素数，根据整除定理，$(k^{k-1})^2$整除$Z_{02}-1$，或$(k^{k-1})^2 \mid Z_{02}^{k-1}+Z_{02}^{k-2}+\cdots+1$，再根据引理3，$Z_{02}^{k-1}+Z_{02}^{k-2}+\cdots+1 \equiv k \equiv 0 \pmod k$)，所以$(k^{k-1})^2 \nmid Z_{02}^{k-1}+Z_{02}^{k-2}+\cdots+1$；$(k^{k-1})^2 \mid Z_{02}-1$.

如此根据引理3有，$k \mid Z_{02}^{k-1}+Z_{02}^{k-2}+\cdots+1$，$k^{2k-1} \mid Z_{02}^k-1$；即$Z_{02}^k \equiv 1 \pmod{k^{k-1}}$. 设$Z_{02}^k-1=k^{2k-1}b_4$（$b_4$是$Z_{02}^k-1$除以$k^{2k-1}$的倍数），于是可得

$$k^{2k-1}b_4=(k^{k-1})^2\sum C_3,\qquad b_4=\frac{\sum C_3}{k}. \tag{20}$$

因为$(k,\sum C_3)=1$，所以b_4为既约分数.

如设$a_1=Z_{02}-1$，$a_2=Z_{02}^{k-1}+Z_{02}^{k-2}+\cdots+1$，$a_3=\sum C_3$，则有

$$a_1a_2=(k^{k-1})^2a_3. \tag{21}$$

同前面的分析一样，可以证明Z_{02}为无理数，Z_0为无理数，Z_0无最小正整数解和正整数解.

3 结论

上面已证明$X^k+Y^k=Z^k$无全正整数解，若将n进行素因数分解，则有

$$n=2^l\cdot p_1^{l_1}\cdot p_2^{l_2}\cdot\cdots\cdot p_l^{l_l}.$$

式中：$l=0,1,2,3,\cdots$，$p_l^{l_l}$，为相异奇素因数之积，n简化为$n=2^lp_l^{l_l}$，如此有

$$X^{(2^lp_l^{l_l})}+Y^{(2^lp_l^{l_l})}=Z^{(2^lp_l^{l_l})}.$$

若$l=1$，例$X'^6+Y'^6=Z'^6$，可设$l=2$，$p_l^{l_l}=3$，则有$X^{12}+Y^{12}=Z^{12}$. 若证明其无全正整数解，就可得$(X^2)^6+(Y^2)^6=(Z^2)^6$无全正整数解，即$X'^6+Y'^6=Z'^6$无全正整数解.

因为$n=4$，$n=p_l^{l_l}$时费马大定理成立，并做如上例中的变换，所以$X^n+Y^n=Z^n$，$n\geqslant 3$，不定方程无全正整数解，即证明费马大定理成立[9-13].

参考文献：

[1] 陈梅香.响应率法求解二阶部分极点配置问题[J].华侨大学学报(自然科学版)，2015，36(1)：107-110. doi：10.11830/ISSN.1000-5013.2015.01.0107.

[2] 饶世麟，饶雪芳.一个猜想与费马大定理[J].装备指挥技术学院学报，2010，21(6)：128-130.

[3] 李宏棋.费马大定理的初等证明[J].西安工程大学学报，2008，22(5)：650-662.

[4] 饶世麟，饶雪梅，饶雪芳，等.费马大定理的一种证明方法[J].电子科技，2011，24(6)：11-12，22.

[5] 星河，李萌.费马大定理：求证历程[J].知识就是力量，2012(1)：74-75.

[6] 王志兰.费马小定理的几种证法及应用[J].廊坊师范学院学报(自然科学版)，2009，9(6)：11-13.

[7] 吴延东.符号动力系统与费马小定理[J].大学数学，2009，25(5)：120-123.

[8] 袁合才，辛艳辉.费马大定理巧妙证明的注记[J].高等继续教育学报，2010，23(4)：13，25.

[9] 刘向晖.高斯和希尔伯特在费马大定理上的不同认识[J].西北大学学报(自然科学版)，2000，30(2)：176-180.

[10] 刘文忠，孙艳春，张同杰.对一个费马大定理证明的分析[J].北京师范大学学报(自然科学版)，2013，49(5)：462-465.

[11] 杨孝斌，袁梓瀚.关于n次费马解通解的探究与证明[J].湖南科技大学学报(自然科学版)，2016，31(2)：117-121.

[12] 田枫，黄秦安.数学证明严格性之相对意义与综合评判标准[J].自然辩证法通讯，2016，38(1)：51-55.

[13] 史仲夏.用初等数学方法证明费马大定理[J].数学学习与研究，2015(15)：127-128.

（**责任编辑：**黄晓楠 **英文审校：**黄心中）

第 37 卷总目次

第 1 期

第 2 期

第3期

第 4 期

第 5 期

第 6 期

Total Contents of Vol. 37

No. 1

No. 2

No. 3

No. 4

No. 5

No. 6

《华侨大学学报(自然科学版)》简介

BRIEF INTRODUCTION TO JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE)

《华侨大学学报(自然科学版)》(下称《学报》)创刊于1980年,是福建省教育厅主管,华侨大学主办,面向国内外公开发行的自然科学综合性学术理论刊物.

《学报》的办刊宗旨是:坚持四项基本原则,贯彻“百花齐放,百家争鸣”和理论与实践相结合的方针,广泛联系海外华侨和港、澳、台、特区的科技信息,及时反映国内尤其华侨大学等高等学府在理论研究、应用研究和开发研究等方面的科技成果,为发展华侨高等教育和繁荣社会主义科技事业服务.

《学报》以创新性、前瞻性、学术性为办刊特色,主要刊登机械工程及自动化、测控技术与仪器、电气工程、电子工程、计算机技术、应用化学、材料与环境工程、化工与生化工程、土木工程、建筑学、应用数学等基础研究和应用研究方面的学术论文,科技成果的学术总结,新技术、新设计、新产品、新工艺、新材料、新理论的论述,以及国内外科技动态的综合评论等内容.

《学报》既是中文综合性科学技术类核心期刊,又是国内外重要数据库和权威性文摘期刊固定收录的刊源.在历次全国及福建省的科技期刊评比中,《学报》都荣获过大奖.曾获得1995年“全国高等学校自然科学学报系统优秀学报一等奖”,1997年“第二届全国优秀科技期刊奖”,1999年,2008年“全国优秀自然科学学报及教育部优秀科技期刊”,并于2001年入选“中国期刊方阵‘双效期刊’”.

《学报》现为双月刊,A4开本.中国标准连续出版物号:CN 35-1079/N;国际标准连续出版物号:ISSN 1000-5013;国内邮发代号:34-41;国外发行代号:NTZ1050.

Journal of Huaqiao University (Natural Science) (abbreviated to the Journal), started publication in 1980, is a comprehensive and academic journal about natural science, open distribution at home and abroad, sponsored by Huaqiao University; Fujian Bureau of Education is responsible for its work.

The Journal has its purpose: adhering to the four cardinal policies, carrying out the principles of the “Flowers Blossom; Schools of Thought Contend” and theory combined with practice, collecting information of science and technology from overseas and those in Hong Kong, Macao, Taiwan and special economic zones and all sides, and in time reflecting the scientific and technological achievements about domestic theoretical research, applied research and development research in our university and others, and serving for development of the overseas Chinese higher education and the socialist prosperity on science and technology.

The Journal, with characteristics of creative, perspective and academic study, publishes the articles of fundamental and applied research on mechanical engineering and automation, observing and controlling technology and instruments, electric and electronic engineering, computer, applied chemistry, materials and environmental engineering, chemical and biochemical engineering, civil engineering, architecture, applied mathematics, etc. and the academic reports on achievements of science and technology, theses on new technology, new design, new products, new crafts, new materials, new theories, and the comprehensive reviews on scientific and technological developments at home and abroad.

The Journal is not only a core Chinese periodical on comprehensive science and technology, but also an important data base at home and abroad and periodical source that the authoritative abstracts have been recorded regularly. The Journal won the prices among the national and provincial evaluation of scientific and technological periodicals such as “the first prize of good natural science of the national higher education periodicals” in 1995, “the good prize of the second national periodicals of science and technology” in 1997, “the good scientific and technological periodicals of the national natural science journals and the State Education Department” in 1999 and 2008, and selected into “‘double-effect periodical’ of the China periodicals matrix” in 2001. The Journal welcomes the contributors from our university and others.

The Journal is bimonthly publication, with format of A4. China standard serial number: CN 35-1079/N; International standard serial number: ISSN 1000-5013; Domestic mail number: 34-41; International issue number: NTZ1050.

- 《中文核心期刊要目总览》
- RCCSE 中国核心学术期刊
- 中国期刊方阵“双效期刊”
- 中国科技论文在线优秀期刊
- ISTIC 中国科技核心期刊
- 全国优秀科技期刊
- 华东地区优秀期刊

本刊被以下国内外检索期刊和数据库列为固定刊源

- 美国《化学文摘》(CAS)
- 波兰《哥白尼索引》(IC)
- “STN 国际”数据库
- 中国科学引文数据库
- 中国科技论文统计期刊源
- 中国学术期刊(光盘版)
- 中文科技期刊数据库
- 中国力学文摘
- 中国生物学文摘
- 中国数学文摘
- 俄罗斯《文摘杂志》(AJ,VINITI)
- 荷兰《文摘与引文数据库》(Scopus)
- 德国《数学文摘》(Zbl MATH)
- 中国学术期刊综合评价数据库
- 中国期刊网
- 万方数据库
- 中国机械工程文摘
- 中国化学化工文摘
- 中国无线电电子学文摘
- 中国物理文摘

华侨大学学报(自然科学版)
Huaqiao Daxue Xuebao (Ziran Kexue Ban)
(双月刊,1980年创刊)
第37卷 第6期 (总第152期) 2016年11月20日

主管单位：福建省教育厅
主办单位：华侨大学
(中国 福建 泉州 362021)
(中国 福建 厦门 361021)
编辑出版：华侨大学学报自然科学版编辑部
电　　话：0595-22692545
电子信箱：journal@hqu.edu.cn
网　　址：www.hdxb.hqu.edu.cn
主　　编：乌东峰
印　　刷：泉州晚报印刷厂
国内发行：福建省泉州市邮政局
订 购 处：全国各地邮政局(所)
国外发行：中国出版对外贸易总公司
(北京782信箱,邮政编码100011)

JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
(NATURAL SCIENCE)
(Bimonthly, Started in 1980)
Vol. 37 No. 6 (Sum. 152) Nov. 20, 2016

Competent Authority: Department of Education of Fujian Province
Sponsor: Huaqiao University
(Quanzhou 362021, Fujian, China)
(Xiamen 361021, Fujian, China)
Edited and Published by Editorial Department of Journal of Huaqiao University (Natural Science)
Tel: 0595-22692545
E-mail: journal@hqu.edu.cn
Http://www.hdxb.hqu.edu.cn
Editor in Chief: WU Dongfeng
Distributed by China Publication Foreign Trading Corporation
(P.O. Box 782, Beijing, 100011, China)

刊　号：ISSN 1000-5013 / CN 35-1079/N
代　号：国内邮发 34-41 / 国外 NTZ 1050
国内定价：8.00元/期 / 48.00元/年

ISSN 1000-5013