

doi: 10.11830/ISSN.1000-5013.201604008



# 采用类桁架优化方法研究 大跨桥梁的构形

乔升访, 胡杰云, 周克民

(华侨大学 土木与工程学院, 福建 厦门 361021)

**摘要:** 采用类桁架拓扑优化方法研究大跨桥梁的选型. 通过求解应力约束体积最小类桁架结构拓扑优化问题, 得到不同跨高比下桥梁结构的拓扑构形, 验证了桥梁构形与跨高比有关. 典型算例结果表明: 文中方法在大跨桥梁选型中可以节约成本、提高结构性能和缩短设计周期.

**关键词:** 类桁架; 拱桥; 悬索桥; 斜拉桥; 拓扑优化

**中图分类号:** TU 323 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5013(2016)04-0431-05

## Structural Topology Optimization of Configuration in Long-Span Bridge Based on Truss-Like Material Model

QIAO Shengfang, HU Jieyun, ZHOU Kemin

(College of Civil Engineering, Huaqiao University, Xiamen 361021, China)

**Abstract:** The configuration of long-span bridge is studied by the topology optimization method based on truss-like material model. By solving topology optimization of truss-like structures with minimal volume under stress constraints, the bridge configurations are established under different span-depth ratio, it's found that the configurations are related to the span-depth ratio. The calculation results indicates that the optimal configurations are conducive to save the cost, improve the performance of structure and shorten the design cycle in typical long-span bridge structure.

**Keywords:** truss-like; arch bridge; suspension bridge; cable-stayed bridge; topology optimization

随着跨度的增加, 简支梁式桥中弯矩增长很快, 弯矩过大制约了梁式桥的跨度. 当跨度较大时, 人们尝试把大跨度划分为若干个较小的跨度, 但跨度仍然受到极大地限制. 当前应对大跨度桥梁, 多采用拱桥、斜拉桥等. 桥梁构形的选择主要依据工程人员的经验和力学概念, 尚未形成系统的方法. 结构拓扑优化在结构概念设计阶段引入, 既能有效地节约材料, 缩短设计周期, 又能设计出高性能结构<sup>[1-6]</sup>. Michell 桁架解析解表明: 拓扑优化结构由无限多、无限密的各向异性类桁架连续体构成<sup>[7]</sup>. 结构拓扑优化方法大多采用各向同性材料, 以单元的有和无表示优化结果, 普遍存在单元依赖性、优化边界模糊粗糙等数值不稳定现象. 本文根据类桁架的性质, 采用类桁架材料模型拓扑优化方法研究大跨桥梁的构形<sup>[8-11]</sup>.

### 1 类桁架模型优化分析

#### 1.1 类桁架材料模型

假设杆件在设计域内无间隙非均匀致密分布. 致密分布的杆件在任一点沿两个正交方向布置. 沿

**收稿日期:** 2015-01-05

**通信作者:** 周克民(1962-), 男, 教授, 博士, 主要从事结构优化的研究. E-mail: zhoukm@hqu.edu.cn.

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(11172106)

两个正交方向的杆件密度分别为  $t_1, t_2$ , 方向角分别为  $\alpha_1, \alpha_2$ . 其中:  $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi/2$ . 二杆类桁架模型, 如图 1 所示. 沿坐标轴方向的弹性矩阵<sup>[9]</sup>为

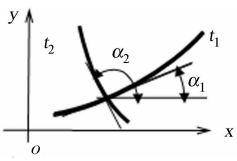


图 1 二杆类桁架模型  
Fig. 1 Two-member truss-like material model

$$\boldsymbol{D}(t_1, t_2, \alpha_1) = Et_m \begin{bmatrix} 1 + R_t \cos 2\alpha_1 & 0 & 0.5R_t \sin 2\alpha_1 \\ 0 & 1 - R_t \cos 2\alpha_1 & 0.5R_t \sin 2\alpha_1 \\ 0.5R_t \sin 2\alpha_1 & 0.5R_t \sin 2\alpha_1 & 0.5 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

式(1)中:  $E$  为弹性模量;  $t_m = \frac{t_1 + t_2}{2}$ ;  $R_t = \frac{t_1 - t_2}{t_1 + t_2}$ .

采用有限元分析方法, 结点  $j$  位置的两个正交方向杆件密度分别为  $t_{1,j}$ ,  $t_{2,j}$ , 方向角分别为  $\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j}$ . 单元内部杆件的分布由杆件在节点位置的分布插值得到. 因此, 单元刚度矩阵为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{k}_e &= \int_{V_e} \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{B} dV = E \sum_{j \in S_e} \sum_b t_{b,j} \sum_r g_r(\alpha_{b,j}) \int_{V_e} \boldsymbol{N}_j \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{A}_r \boldsymbol{B}^T dV = \\ &\sum_{j \in S_e} \sum_b t_{b,j} \sum_r g_r(\alpha_{b,j}) \boldsymbol{H}_{e,j,r}. \end{aligned} \quad (2)$$

式(2)中:  $\boldsymbol{B}$  为几何矩阵;  $\boldsymbol{H}_{e,j,r} = E \int_{V_e} \boldsymbol{N}_j \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{A}_r \boldsymbol{B} dV$  为常数矩阵;  $E$  为弹性模量;  $e$  为单元号;  $\boldsymbol{N}_j$  为形函数;  $S_e$  是属于单元  $e$  的节点集合;  $g_r$  为杆件角度的函数<sup>[10]</sup>;  $\boldsymbol{A}_r$  为常数矩阵<sup>[10]</sup>. 单元采用四节点矩形单元. 对式(2)进行累加, 可得总刚度矩阵, 即

$$\boldsymbol{K} = \sum_e \boldsymbol{K}_e = \sum_j \sum_{e \in S_j} \sum_b t_{b,j} \sum_r g_r(\alpha_{b,j}) \boldsymbol{H}_{e,j,r}. \quad (3)$$

1.2 有限元分析

有限元的平衡方程为

$$\boldsymbol{K} \boldsymbol{U} = \boldsymbol{F}. \quad (4)$$

式(4)中:  $\boldsymbol{K}$  为结构总刚度矩阵;  $\boldsymbol{U}$  为结点位移;  $\boldsymbol{F}$  为结点力列向量. 单元应变  $\epsilon$  为

$$\epsilon = \boldsymbol{B} \boldsymbol{U}_e. \quad (5)$$

式(5)中:  $\boldsymbol{U}_e$  为单元  $e$  的结点位移. 由弹性矩阵  $\boldsymbol{D}$  可以进一步计算出应力  $\sigma$  为

$$\sigma = \boldsymbol{D} \boldsymbol{B} \boldsymbol{U}_e. \quad (6)$$

式(6)中:  $\sigma = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_{x,y}]$ . 则主应力的方向  $\alpha$  为

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \frac{\tau_{x,y}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (7)$$

主应力为

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \frac{\tau_{x,y}^2}{4}}. \quad (8)$$

沿着主方向  $\alpha, \alpha + \frac{\pi}{2}$  布置二向正交杆件, 由满应力准则可得其密度为

$$t_{b,j}^{i+1} = \max(\underline{t}, t_{b,j}^i \sigma_{b,j}^i / \sigma_p), \quad b = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

式(9)中:  $i$  为迭代次数;  $\underline{t}$  是为了防止刚度矩阵奇异而设置的密度下限;  $\sigma_p$  为应力容许值.

1.3 优化模型

优化模型为应力约束下体积最小问题, 即

$$\begin{cases} \text{find } \alpha_j, t_{b,j} \geq \underline{t}, \\ \text{min } V, \\ \text{s. t. } \sigma_{b,j} \leq \sigma_p. \end{cases}$$

其中:  $b=1, 2$  对应结点两个方向杆件;  $j=1, 2, \dots, n$  对应结点;  $n$  为结点总数;  $V$  为体积.

1.4 迭代求解过程

- 1) 划分单元网格, 采用四结点矩形单元. 初始结点位置杆件密度为  $t_{b,j}^0$ , 初始角度为  $\alpha_j^0$ .
- 2) 利用式(7)计算得到最大应力方向  $\alpha_j^i$ ; 利用式(9)优化各结点位置的杆件密度  $t_j^i$ .

3) 前后两次迭代结点密度变化最大值记为  $\delta = \max_{\substack{j=1,2,n \\ b=1,2}} \left| \frac{t_{b,j}^{i+1} - t_{b,j}^i}{t_{b,j}^i} \right|$ .  $\delta$  足够小(文中取 1%), 停止迭代; 否则, 返回 2). 最终得到类桁架材料分布场.

在迭代过程中, 节点位置杆件密度大小和方向由该点主应力大小和方向调整. 其余位置的大小和方向由节点位置插值得到. 最终结果取决于结构最优传力路径, 与初始设计变量无关. 优化过程中不删除单元格, 不以单元有或无表示优化结果, 根本解决了数值不稳定的问题. 优化结果以材料分布场表示, 与单元大小、类型无关<sup>[8,11]</sup>.

### 1.5 工程结构的形成

工程结构的形成有以下 2 个步骤.

**步骤 1** 类桁架材料分布场可离散成结构<sup>[8,11]</sup>. 理论上是由无限多、无限密的各向异性类桁架连续体构成<sup>[7]</sup>, 实际上选取部分杆件构成工程结构. 选取不同数量的杆件会有不同的结构, 杆件越多, 越接近解析结果. 杆件数量的选取主要取决于工程的需要.

**步骤 2** 由于有限元数值计算的误差, 步骤 1 中杆件组成的图形不能直接作为结构使用. 借助结构力学的基本概念, 删除重叠或接近的线段, 合并接近的结点, 可以得到近似的杆系结构, 即为建议的优化结构. 实际上, 拓扑优化结构中杆件一般是密布在设计域的<sup>[10]</sup>.

## 2 算例分析

### 2.1 单塔斜拉桥

图 2 为单塔斜拉桥 1. 其跨度为 200 m; 设计区域长 200 m; 高度为 100 m; 跨高比为 1 : 1. 考虑桥梁的通航作用, 桥面板以下预留足够的通航空间. 将桥面板设在最下面, 跨中支座延伸至顶端部分为不可设计区域. 桥面均布力( $q$ )为  $30 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$ ; 材料的弹性模量  $E$  为 210 GPa; 容许应力为 160 MPa; 有限元网格划分为  $40 \times 20$ .

优化的类桁架材料分布场, 如图 2(b) 所示. 图 2(b) 中: 结点位置线段长度表示杆件的密度; 线段的角度表示杆件的角度. 由 Michell 桁架的解析解特点可知: 类桁架连续体密布整个设计区域, 且是非均匀各向异性的. 然而, 在实际中很难得到这样的结构. 因此, 需要进一步离散<sup>[8]</sup>, 保留部分杆件. 根据类桁架材料分布场, 采用离散化方法可以得到保留的杆件分布. 优化前, 中间支座 A 弯矩最大, 采用梁式桥不能充分发挥材料性能.

优化后形成的杆件分布, 如图 2(c) 所示. 由图 2(c) 可知: 跨中的不可优化区域形成竖向杆件(类似于斜拉桥主塔), 竖杆与桥梁承载面之间形成大量的拉杆(实际可以得到无限多拉杆). 结构依靠这些拉杆将桥面荷载传递给竖杆, 竖杆承担主要竖向力, 最终把荷载传递给桥梁下部结构, 且大量的拉杆作用减小桥面弯矩. 拉杆适合采用抗拉强度高的材料. 在杆件分布场中, 由于拉杆与桥面板连接不是正交的, 因此, 多出两个斜杆过渡传力.

在实际工程中, 可以不设此斜杆, 进一步简化结构, 如图 2(d) 所示. 这与工程中常用的斜拉桥一致, 如广东西樵山大桥. 在工程中, 斜拉桥依靠拉索的拉力传递荷载, 拉索传递给主塔, 主塔承受巨大的压力, 最终将质量转移到底部结构.

图 3 为单塔斜拉桥 2. 其设计区域长 400 m; 高度为 100 m; 跨高比为 2 : 1. 由图 3 可知: 跨高比较大时, 桥面板和主塔之间需要更多斜杆传力. 在实际工程中, 一般不设斜杆, 跨高比通常小于 2.

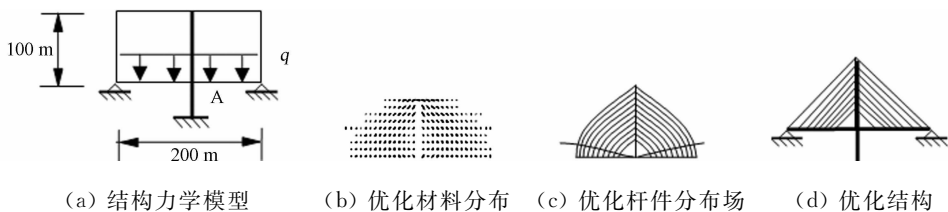


图 2 单塔斜拉桥 1 的优化构形

Fig. 2 Topology configuration of single tower cable-stayed bridge 1

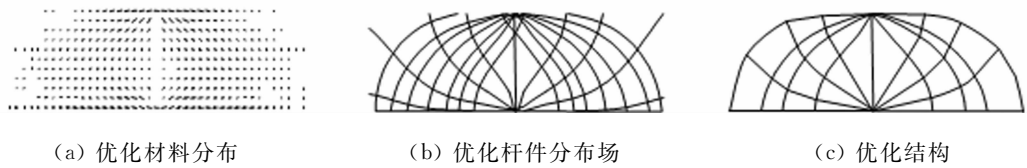


图 3 单塔斜拉桥 2 的优化构形

Fig. 3 Topology configuration of single tower cable-stayed bridge 2

2.2 双塔斜拉桥

图 4 为双塔斜拉桥 1. 其桥梁结构全长  $L_0$  为 600 m; 边跨  $L_1$  为 100 m; 主跨度  $L_2$  为 400 m; 设计区域长 600 m; 高度为 100 m. 其余设计条件与单塔斜拉桥相同. 优化后的类桁架材料分布场, 如图 4(b) 所示. 两端距支座 100 m 处延伸至顶端部分为不可设计区域, 跨高比为 4 : 1. 根据类桁架材料分布场, 采用离散化方法得到杆件分布场, 如图 4(c) 所示.

由图 4(c) 可知: 结构以跨中不可优化区域为竖向杆件, 竖杆与桥梁承载面之间形成大量的拉杆. 结构依靠这些拉杆将桥面荷载传递给竖杆, 竖杆承担主要竖向力, 然后把荷载传递给桥梁底部结构. 根据杆件分布场, 结合结构力学概念, 可以进一步简化结构, 如图 4(d) 所示. 这与工程中常用的双塔斜拉桥一致, 如苏通大桥.

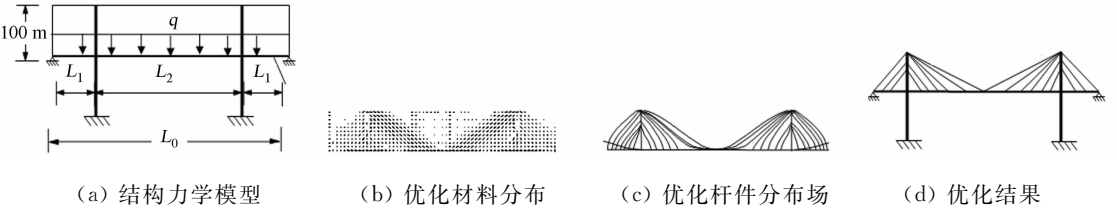


图 4 双塔斜拉桥 1 的优化构形

Fig. 4 Topology configuration of double tower cable-stay bridge 1

图 5 为双塔斜拉桥 2. 其桥梁结构全长  $L_0$  为 700 m; 边跨  $L_1$  为 100 m; 主跨度  $L_2$  为 500 m; 跨高比为 5 : 1. 由图 5 可知: 优化结果变化不大.

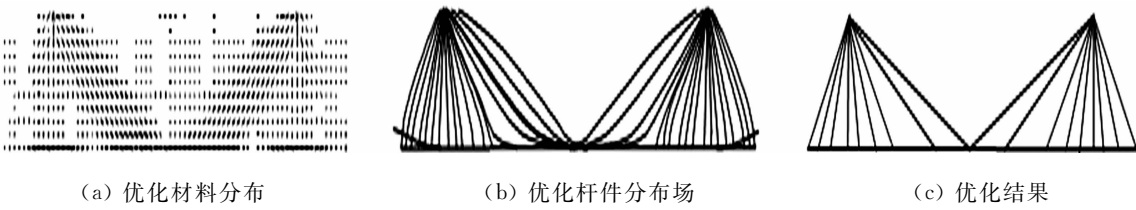


图 5 双塔斜拉桥 2 的优化构形

Fig. 5 Topology configuration of double tower cable-stay bridge 2

图 6 为双塔斜拉桥 3. 其桥梁结构全长  $L_0$  为 800 m; 边跨  $L_1$  为 100 m; 主跨度  $L_2$  为 600 m; 跨高比为 6 : 1. 优化后的类桁架材料分布场, 如图 6(a) 所示. 根据类桁架材料分布场, 采用离散化方法得到杆件分布场, 如图 6(b). 由图 6(b) 可知: 结构以跨中不可优化区域为竖向杆件, 竖杆与桥梁承载面之间形成大量的拉杆. 由于拉杆与水平夹角不能太小, 因此, 跨中出现曲拱将中间的荷载由拱内部的拉杆通过拱向两边传递, 这样避免了角度过小的拉杆, 传力效果得到改善. 进一步得到简化结构, 如图 6(c) 所示.

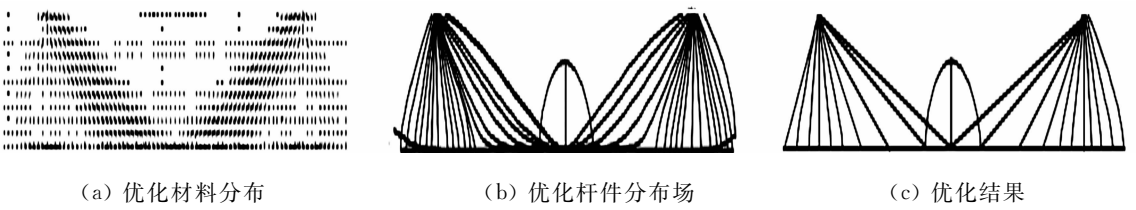


图 6 双塔斜拉桥 3 的优化构形

Fig. 6 Topology configuration of double tower cable-stay bridge 3

图 7 为双塔斜拉桥 4. 其桥梁结构全长  $L_0$  为 1 000 m; 边跨  $L_1$  为 100 m; 主跨度  $L_2$  为 800 m; 跨高比为 8 : 1. 由图 7 可知: 桥梁的主跨与索塔之比较大时, 跨中需要更多曲拱将中间的荷载由拱内部的拉

杆通过拱向两边传递, 在实际工程中, 一般不设跨中曲拱, 跨高比大多小于 4.

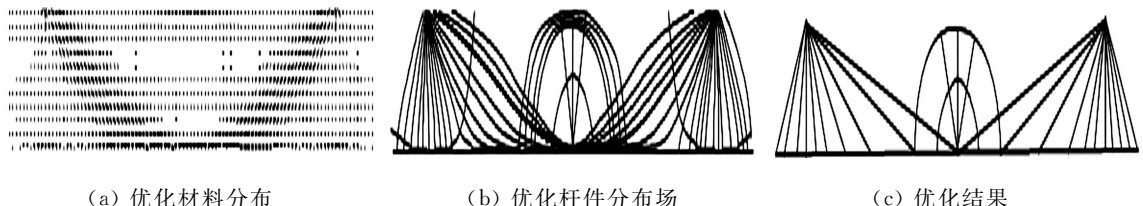


图 7 双塔斜拉桥 4 的优化构形

Fig. 7 Topology configuration of double tower cable-stay bridge 4

### 3 结论

梁式桥的限制条件较多, 很难实现大跨度. 拱桥依靠支座水平推力降低结构中的弯矩, 从而实现大跨度. 但拱桥的矢跨比不能太小, 较小的矢跨比不仅无法有效地提供水平推力, 影响桥梁结构的美观性, 而且对周围岩石和土承载力要求较高. 在实际工程中, 拱桥的矢跨比通常在 0.2 以上. 斜拉桥很好地克服了拱桥的缺点. 斜拉桥依靠拉索直接传递荷载, 桥面弯矩较小, 跨越能力很强. 斜拉索与桥面夹角影响其力学性能, 斜拉索与桥面夹角越大, 传力效果越好. 实际工程中主塔不可能太高, 因此, 引入双桥塔来解决跨度更大的问题. 双塔斜拉桥的拉索与桥面的夹角得到有效地提高, 力学性能也更优越. 但双塔斜拉桥的主跨与索塔之比较大时, 跨中需要更多曲拱传力. 在实际工程中, 一般不设跨中曲拱, 跨高比大多小于 4. 当跨度很大时, 双塔斜拉的水平角度也会受到限制, 因此, 需要采用悬索桥. 目前, 超过 1 000 m 以上的桥梁主要采用悬索桥.

文中研究类桁架材料优化方法在大跨桥梁构形中的应用. 通过几种常见桥梁结构的算例分析, 证实了方法的有效性. 结构拓扑优化作为新型的结构设计方法, 在限定的约束条件下能找到最优传力路径, 指导桥梁设计人员选择合适的结构形式, 有效地节约材料并缩短设计周期.

### 参考文献:

[1] BENDSOE M P, KIKUCHI N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1988, 71(2): 197-224.

[2] XIE Yimin, STEVEN G P. A simple evolutionary procedure for structural optimization [J]. Computers and Structures, 1993, 49(5): 885-896.

[3] 程耿东, 张东旭. 受应力约束的平面体的拓扑优化[J]. 大连理工大学学报(自然科学版), 1995, 35(1): 1-9.

[4] SUI Yunkang, YANG Deqing. New method for structural topological optimization based on the concept of independent continuous variables and smooth model [J]. Acta Mechanica Sinica, 1998, 18(2): 179-185.

[5] SETHIAN J A, WIEGMANN A. Structural boundary design via level set and immersed interface methods[J]. Journal of Computational Physics, 2000, 163(2): 489-528.

[6] 荣见华, 梁清泉, 杨端生. 基于结构拓扑随机变异的水平集优化方法[J]. 力学学报, 2007, 39(6): 796-803.

[7] 周克民, 李俊峰, 李霞. 结构拓扑优化研究方法综述[J]. 力学进展, 2005, 35(1): 69-76.

[8] 周克民, 胡云昌. 利用有限元构造 Michell 桁架的一种方法[J]. 力学学报, 2002, 34(6): 935-944.

[9] 张莉, 周克民. 基于类桁架连续体的结构拓扑优化方法与应用[J]. 应用力学学报, 2007, 24(3): 412-416.

[10] ZHOU Kemin, LI Xia. Topology optimization of structures under multiple load cases using a fiber-reinforced composite material model [J]. Computational Mechanics, 2005, 38(2): 163-170.

[11] 李霞, 周克民. 基于类桁架材料模型优化方法计算稳定性研究[J]. 湖北大学学报(自然科学版), 2013, 35(3): 315-319.

(责任编辑: 钱筠 英文审校: 方德平)