

doi: 10.11830/ISSN.1000-5013.201604005



# 球面螺旋曲面在夹紧机构中的应用

冯凯, 顾立志

(华侨大学 机电及自动化学院, 福建 厦门 361021)

**摘要:** 基于球面螺旋曲面的成形与运动特性,运用微分几何学对球体上的球面螺旋曲线和球面螺旋曲面进行描述和数学模型构建.提出一种球面螺旋面与滑块相啮合的滑块式球面螺旋副,对其进行啮合面的摩擦力和自锁特性研究,设计一种运用此球面螺旋面副的夹紧机构.结果表明:该机构结构紧凑、动作灵活、运动安全可靠,并能对多种不同尺寸的物体进行精准和可靠装夹.

**关键词:** 微分几何学; 球面螺旋曲面; 夹紧机构; 曲率; 挠率

**中图分类号:** TH 112.6      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1000-5013(2016)04-0416-06

## Application of Spherical Helical Curved Surface in Clamping Mechanism

FENG Kai, GU Lizhi

(College of Mechanical Engineering and Automation, Huaqiao University, Xiamen 361021, China)

**Abstract:** Based on the forming and movement characteristics of the spherical helical curved surface, using the differential geometry to describe and establish mathematical model of the spherical spiral curve and the spherical helical curved surface on the sphere. Put forward a kind of slipper type spherical helical pair of spherical helical surface meshing with slider, research on the meshing surface friction and the self-locking feature, and design a kind of clamping mechanism using this spherical helicoid vice. The results show that the mechanism is compact, flexible safe and reliable, and can clamp a variety of objects of different sizes accurately and reliably.

**Keywords:** differential geometry; spherical helical curved surface; clamping mechanism; curvature; torsion

螺旋曲面的相关产品在制造业内不断发展革新,随着研究的深入,其应用领域不断扩大<sup>[1-4]</sup>. 复杂螺旋曲面具有独特的几何学、运动学、力学和动力学特性<sup>[5-6]</sup>. 众多研究者运用微分几何学、运动学和啮合原理研究螺旋曲面的成形原理,并采用包络理论得到共轭螺旋啮合面的数学方程,获得了许多理论成果<sup>[7-24]</sup>. 迄今,螺旋曲面的研究和应用主要建立在圆柱体或圆锥体上,对球体上的螺旋曲面(简称球面螺旋曲面)及其运动副(简称球面螺旋副)的研究鲜见报道. 夹紧机构是机械中对工件固定的一种重要机构. 夹紧机构的一个重要特性是实现自锁功能. 目前,夹紧机构主要通过连杆机构的死点实现机构自锁,这决定了一种夹紧机构只能对某一固定尺寸的物体进行装夹. 夹紧机构、机械手或夹持机构主要采用液压缸和电机通过连杆机构驱动卡爪运动<sup>[25]</sup>. 但液压缸和电机遇到故障时,难以保证卡爪的安全性能. 本文通过对球面螺旋曲面的深入研究和分析,在构建球面螺旋副的基础上,将球面螺旋曲面上不同纬度的独特运动和力学特性映射到被执行件的运动中.

**收稿日期:** 2015-01-23

**通信作者:** 顾立志(1956-),男,教授,博士,主要从事数字化设计制造的研究. E-mail: gulizhi888@163.com.

**基金项目:** 福建省自然科学基金资助项目(2010J0101); 福建省科技重点项目(2014J0101)

# 1 球面螺旋线与球面螺旋面的数学建模

## 1.1 构建空间坐标系

建立两个坐标系(图 1),分别为定坐标系  $OXYZ$  和动坐标系  $OX_1Y_1Z_1$ . 在初始位置时,动坐标系  $OX_1Y_1Z_1$  的  $Y_1$  轴与定坐标系  $OXYZ$  的  $Y$  轴重合, $OZ_1X_1$  标架相对固定坐标系的  $OZX$  标架绕共同轴  $Y$  轴倾斜转过  $\theta$ . 动点在动系中绕  $Z$  轴以角度参数  $u_2$  做圆周运动. 同时,动系统定系的  $X$  轴以角度参数  $u_1$  做等速圆周运动. 动点的 2 个圆周运动的合成运动在定坐标系中的运动轨迹即为球面螺旋线(图 2). 为方便研究螺旋曲面的螺旋角,取定比关系  $u_2/u_1 = \sin \theta$ .

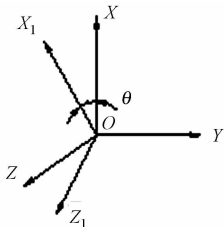


图 1 空间坐标系

Fig. 1 Space coordinate system

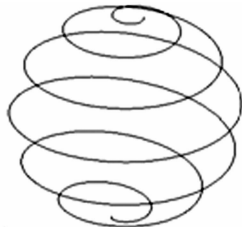


图 2 球螺旋线的成型图

Fig. 2 Spherical helix forming graph

## 1.2 构建球面螺旋线的数学模型

当取动点  $M$  初始位置在  $Y$  轴上,即动点坐标为  $M(0,b,0)$ 时,根据对球面螺旋曲线的定义,由空间矩阵转换理论可以得到球螺旋线的数学模型,即

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos u_1 & -\sin u_1 \\ 0 & \sin u_1 & \cos u_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos u_2 & \sin u_2 & 0 \\ -\sin u_2 & \cos u_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} b \sin u_2 \cdot \cos \theta \\ b(\cos u_2 \cdot \cos u_1 + \sin u_2 \cdot \sin \theta \cdot \sin u_1) \\ b(\cos u_2 \cdot \sin u_1 - \sin u_2 \cdot \sin \theta \cdot \cos u_1) \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{1}$$

## 1.3 构建球面螺旋面的数学模型

球面螺旋线的成形原理是质点的成形运动(图 3(a));而球面螺旋面的成形原理是基于直线或者曲线的成形运动. 因此,为了获得球面螺旋面方程的数学表达,只需将端面为质点的球面螺旋线换为端面为直线或曲线的端面形线,端面形线以原球面螺旋线为轨迹,运动形成所需球面螺旋面(图 3(b)).

根据球面螺旋面的成形原理,取端面型线的一般方程为  $\boldsymbol{r}=[x_0 \ y_0 \ z_0]^T$ . 由此可知:将端面型线代替质点成形可得到球面螺旋面的数学表达式,即

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta_0 & -\sin \beta_0 \\ 0 & \sin \beta_0 & \cos \beta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \lambda & 0 & \sin \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \lambda & 0 & \cos \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha_0 & \sin \alpha_0 & 0 \\ -\sin \alpha_0 & \cos \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

# 2 特性参数分析

球面螺旋面有别于在圆柱体和圆锥体上形成的螺旋面. 因此,特别提出球面螺旋面特征参数,包括螺旋角、压力角、曲率和挠率等.

## 2.1 曲率和挠率

采用微分几何学偏微分方程求得球面螺旋线在任意一点处的曲率和挠率. 因为  $u_2 = u_1 \sin \theta$ ,可以得

到球螺旋线关于参数  $u_1$  的偏导数,即

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} = b \begin{pmatrix} \cos u_2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \\ -\cos u_2 \cdot \sin u_1 \cdot \cos^2 \theta \\ \cos u_2 \cdot \cos u_1 \cdot \cos^2 \theta \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u_1^2} = b \begin{pmatrix} -\sin u_2 \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos \theta \\ -\cos^2 \theta (\cos u_2 \cdot \cos u_1 - \sin u_2 \cdot \sin u_1 \cdot \cos^2 \theta) \\ -\cos^2 \theta (\cos u_2 \cdot \cos u_1 + \sin u_2 \cdot \cos u_1 \cdot \sin^2 \theta) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^3 \mathbf{r}}{\partial u_1^3} = b \begin{pmatrix} -\cos u_2 \cdot \sin^3 \theta \cdot \cos \theta \\ \cos^2 \theta (2\sin u_2 \cdot \cos u_1 \cdot \sin \theta + \cos u_2 \cdot \sin u_1 (1 + \sin^2 \theta)) \\ -\cos^2 \theta (-2\sin u_2 \cdot \sin u_1 \cdot \sin \theta + \cos u_2 \cdot \cos u_1 (1 + \sin^2 \theta)) \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \times \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u_1^2} \right| = b^2 \cos^2 u_2 \cdot \cos^3 \theta, \tag{6}$$

$$\left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}, \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u_1^2}, \frac{\partial^3 \mathbf{r}}{\partial u_1^3} \right) = b^3 \cos^3 u_2 \cdot \cos^5 \theta \cdot \sin \theta. \tag{7}$$

曲率和挠率分别为

$$\kappa = \frac{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \times \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u_1^2} \right|}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \right|^3} = \frac{1}{b \cos u_2}, \tag{8}$$

$$\tau = \frac{\left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}, \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u_1^2}, \frac{\partial^3 \mathbf{r}}{\partial u_1^3} \right)}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \times \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u_1^2} \right|} = \frac{\sin \theta}{b \cos u_2 \cdot \cos \theta}. \tag{9}$$

2.2 螺旋角

球面螺旋线的螺旋角定义为:球面螺旋线上每一点的切矢与球面轴线  $X$  的夹角. 在  $X$  轴上取一个单位向量  $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ , 将切向量单位化为

$$\mathbf{t} = \frac{\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u_1}}{\left| \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u_1} \right|} = (\sin \theta, -\sin u_1 \cdot \cos \theta, \cos u_1 \cdot \cos \theta). \tag{10}$$

单位切向量与  $X$  轴上的单位向量间的夹角为

$$(\mathbf{i}, \mathbf{t}) = \arccos(\mathbf{i}, \mathbf{t}) = \frac{\pi}{2} - \theta, \tag{11}$$

即螺旋角为

$$\alpha_{\text{螺}} = \frac{\pi}{2} - \theta. \tag{12}$$

把球面螺旋曲面投影到旋转轴所在的平面内时(图 4), 在轮廓圆上将运动分解成轴向和径向, 当运动方向靠近赤道圆时, 投影在径向上的运动速度由最大值趋于零, 在赤道圆上为零. 将运动映射到夹紧机构的卡爪手上, 夹紧机构要夹持物体时, 卡爪与固定托台处于分离状态, 且卡爪手与被夹持物体间存在一定间隙. 爪手从最大分离状态到刚好接触物体时的运动称为空载运动, 行程相对长, 应满足运动快、力小的要求. 将爪手从刚好接触到持物体到把物体夹紧时的运动称为有载运动, 行程相对较短, 应满足运动慢、力大的要求. 此外, 螺旋啮合面采用滑动接触通过控制螺旋角的大小完全可以实现啮合副的自锁特性.

2.3 球面螺旋面圆柱滚子啮合的压力角

球面螺旋面的压力角定义为:过球面螺旋面上一点与球螺旋体中心确定出一条直线, 过此点在球面体上的纬度圆平面内得到切线, 此直线与切线所在平面的法向量与该点在球面螺旋面上的法向量的夹角为球面螺旋面在接触啮合表面的压力角. 压力角分析图, 如图 5 所示. 图 5 中:取螺旋曲面上一点与球体径向的夹角为  $\psi$ , 该点出切向量与纬度圆平面的夹角为  $\phi$ .

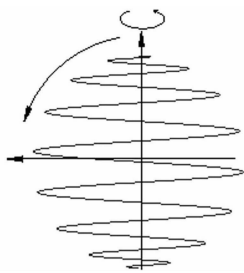
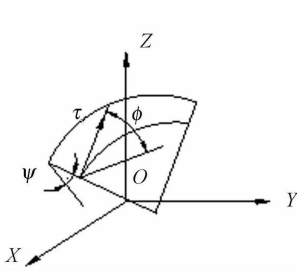
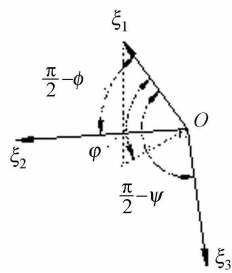


图 4 质点在球面螺旋线上的运动特性

Fig. 4 Particle movement characteristics in spherical helix



(a) 压力角



(b) 在螺旋面上

图 5 压力角分析图

Fig. 5 Pressure angle analysis diagram

根据定义和图 5, 可以得到角度关系, 即

$$(\cos(\frac{\pi}{2} - \phi))^2 + (\cos(\frac{\pi}{2} - \psi))^2 = (\cos \varphi)^2. \tag{13}$$

由此, 可得

$$\varphi = \sqrt{(\cos(\frac{\pi}{2} - \phi))^2 + (\cos(\frac{\pi}{2} - \psi))^2}. \tag{14}$$

由定义和图 5, 可得压力角( $\alpha_{\text{压}}$ )和角度( $\varphi$ )的关系  $\alpha_{\text{压}} = \frac{\pi}{2} - \varphi$ . 因此, 压力角为

$$\alpha_{\text{压}} = \frac{\pi}{2} - \sqrt{(\cos(\frac{\pi}{2} - \phi))^2 + (\cos(\frac{\pi}{2} - \psi))^2}. \tag{15}$$

### 3 基于球面螺旋面副的夹紧机构设计

#### 3.1 基于球面螺旋面副的设计

设计的球面螺旋副采用滑动形式的啮合副, 由滑块、滑槽和球螺旋体组成, 球螺旋体上是与滑块相啮合的球面螺旋曲面, 如图 6 所示.

螺旋副应用在夹紧机构中时, 一个重要性能是能够实现机构自锁功能, 而滑块与球螺旋体间的滑动接触形式就是滑块在斜面上受力和运动形式. 由此可知: 控制球面螺旋副的自锁特性的参数为球面螺旋面的螺旋角.

根据对滑块与球面螺旋曲面间的受力分析(图 7), 得到夹紧机构实现自锁的条件为

$$(G + F) \sin \alpha \leq f = \mu F_N = \mu(G + F) \cos \alpha. \tag{16}$$

可得

$$\alpha \leq \alpha_0 = \arctan \mu. \tag{17}$$

式(16), (17)中:  $G$  为滑块的自身重力;  $F$  为传动机构所给的反作用力;  $\alpha_0$  为摩擦角, 即自锁的临界角;  $\mu$  为滑块与球螺旋面之间的滑动摩擦系数;  $f$  为最大滑动摩擦力.

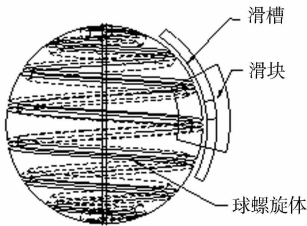


图 6 球面螺旋副

Fig. 6 Spherical helical pair

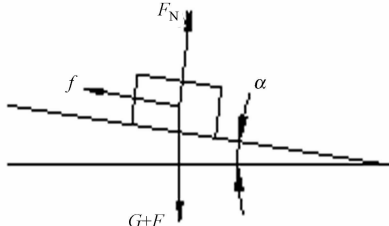


图 7 机构自锁受力分析图

Fig. 7 Mechanism self-locking force analysis diagram

#### 3.2 基于球面螺旋面副的夹紧机构

根据球面螺旋副的特性, 研究球面螺旋副在夹紧机构中的应用, 如图 8 所示. 球面螺旋副应用于夹紧机构, 具有结构紧凑、加紧牢固、自锁性能好和安全可靠等优点.

机构的运动副有几何闭合方式和加力闭合方式. 综合考虑机构的特性和工作要求, 夹紧机构中滑块与球螺旋面间的接触啮合方式选择采用几何闭合方式, 以此提高运动的紧凑性、精确性和稳定性. 机构的极限位置主要由滑槽的弧度、连杆的尺寸及位置关系决定.

3.3 机构性能分析

根据球面螺旋面的几何特征, 可得

$$\frac{2\pi\eta}{\omega_0} = \frac{\pi}{\omega_1}, \tag{18}$$

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{2\eta}. \tag{19}$$

式(18), (19)中:  $\omega_0$  为球螺旋体的旋转角速度;  $\omega_1$  为滑块沿着圆周滑槽的角速度;  $\eta$  为球螺旋体上螺旋圈数.

夹紧机构运动分析图, 如图 9 所示. 由图 9 可得运动学公式, 即

$$v_2 = v_1 + v_{21}. \tag{20}$$

可得

$$v_2 = \frac{v_1 \cos \beta_0}{\cos \alpha_0}. \tag{21}$$

又因  $v_1 = \omega_1 r$ , 可得

$$v_2 = \frac{\omega_1 r \cos \beta_0}{\cos \alpha_0}. \tag{22}$$

式(20)~(22)中:  $v_1$  为滑块的绝对速度;  $v_2$  为夹持梁上  $B$  点的绝对速度;  $v_{21}$  为  $B$  点相对于  $A$  点的相对速度;  $r$  为球面螺旋体的半径. 由式(22)可知: 夹紧机构在夹紧物体时, 滑块由低端向上移动, 以  $\omega_1$  作匀角速度转动, 随着时间的变化,  $B$  点处的压力角  $\alpha_0$  减小, 而  $A$  点处的压力角  $\beta_0$  增大. 又因  $\alpha_0, \beta_0$  都是锐角, 因此, 随着时间变化, 速度  $v_2$  减小.  $B, D$  围着  $C$  点作圆周运动, 所以满足关系式  $v_2/L_2 = v_3/L_3$ , 易得  $D$  点的绝对速度  $v_3 = v_2 L_3/L_2$ , 可得

$$v_3 = \frac{\omega_0 r L_3 \cos \beta_0}{2\eta L_2 \cos \alpha_0}. \tag{23}$$

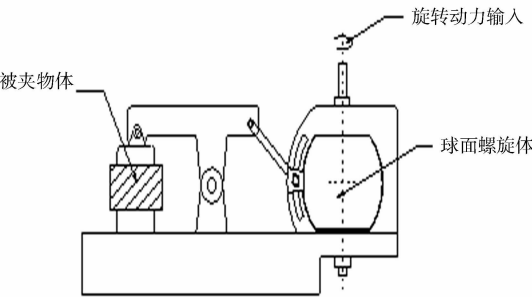


图 8 基于球面螺旋副的夹紧机构  
Fig. 8 Clamping mechanism based on spherical helical pair

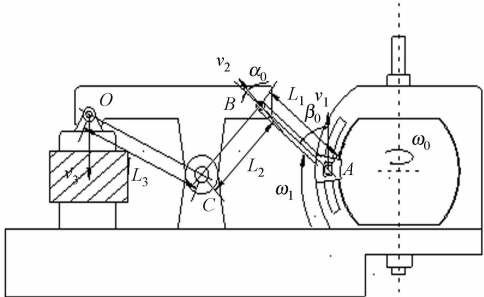


图 9 夹紧机构运动分析图  
Fig. 9 Motion analysis diagram of clamping mechanism

4 结论

- 1) 在探索球面螺旋面成形与运动特性的基础上, 分别构建了以角度参数  $u_1, u_2, \theta$ , 线性参数  $b$  为特性参数的球面螺旋线数学模型, 以及在球面螺旋线基础上加端面型线的球面螺旋面的数学模型.
- 2) 运用微分几何学的偏导数计算研究了球面螺旋线在任意一点处的曲率和挠率, 并得到曲率、挠率与球面螺旋线的螺旋角和成形角度参数的关系式. 根据球面螺旋面的几何和运动特性设计了一种滑块式球面螺旋副, 此球面螺旋副可以根据要求控制螺旋角来实现机构啮合过程中的自锁性能.
- 3) 给出球面螺旋副在夹紧机构中的一个应用实例. 通过驱动球螺旋面绕固定轴旋转, 带动与之配合的滑块运动, 通过连杆机构最终驱动卡爪夹紧被夹持物体, 从而实现对目标物体的操作. 普通连杆夹

紧机构只有在死点处实现夹紧自锁,而此机构可实现在任一点处自锁,满足了对不同尺寸物体的夹紧。

## 参考文献:

- [1] 王道林. 冲击式手动夹紧机构设计[J]. 机械传动, 2012(10):110-111.
- [2] 马尚君,刘更,周建星,等. 行星滚柱丝杠副运转过程动态特性分析[J]. 振动与冲击, 2013,32(3):167-171.
- [3] 姜洪奎,宋现春,李保民,等. 基于滚珠丝杠副流畅性的滚珠返回器型线优化设计[J]. 振动与冲击, 2012,31(2):38-42.
- [4] 刘志强,龚宪生. 大扭矩螺旋传动器的设计与研究[EB/OL]. [2010-04-07]. <http://www.paper.edu.cn/releasepaper/content/201004-227>.
- [5] 梁瑜轩,黎向锋,左敦稳,等. 内螺纹低频振动冷挤压振动加工装置动力学仿真分析[J]. 振动与冲击, 2012,31(22):143-146.
- [6] LI Zhongqun, LIU Qiang. Surface topography and roughness in hole-making by helical milling[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2013,66(9/10/11/12):1415-1425.
- [7] 魏小莉. 双螺杆压缩机螺杆加工可转位铣刀结构设计及分析[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学, 2012:10.
- [8] 万晓鹏,沙永柏,赵晓影. 基于 ADAMS 的钻杆夹持机械手的动力学仿真[J]. 机床与液压, 2013,41(13):142-143.
- [9] 宋晓华,吴忠,周明安. 计算机仿真在机构动力学分析中的应用[J]. 轻工机械, 2005,23(2):52-54.
- [10] 付振山,冯显英,于春玲. 滚珠型弧面凸轮分度机构的运动分析和仿真[J]. 制造技术与机床, 2012(12):86-89.
- [11] MOHAN L V, SHUNMUGAM M S. Geometrical aspects of double enveloping worm gear drive[J]. Mechanism and Machine Theory, 2009,44(11):2053-2065.
- [12] BYRTUS M, ZEMAN V. On modeling and vibration of gear drives influenced by nonlinear couplings[J]. Mechanism and Machine Theory, 2011,46(3):375-397.
- [13] 李增亮,李风涛. 双螺杆泵转子型线啮合特性分析[J]. 石油机械, 2009,37(6):28-32.
- [14] 王启东,刘战强,汤爱民,等. 平头螺旋刃立铣刀切削力预报模型的建立与数值仿真(一):刀具几何参数对铣削力的影响[J]. 工具技术, 2011,45(3):17-22.
- [15] 王启东,刘战强,汤爱民,等. 平头螺旋刃立铣刀切削力预报模型的建立与数值仿真(二):切削参数对铣削力的影响[J]. 工具技术, 2011,45(4):8-14.
- [16] 徐健,余宾宴,余小玲,等. 螺杆压缩机转子型线设计方法[J]. 压缩机技术, 2012(2):1-6.
- [17] 徐健,周恩民,许岭松,等. 螺杆转子刀具设计方法[J]. 压缩机技术, 2013(6):1-8.
- [18] 王树强,王可,孙兴伟,等. 螺旋定子内螺旋曲面切削加工方法及仿真试验研究[J]. 机床与液压, 2012,40(9):42-44.
- [19] 王树强,王可,刘希敏. 盘铣刀铣削螺旋定子内螺旋曲面方法及工件廓形算法[J]. 组合机床与自动化加工技术, 2013(3):24-26.
- [20] ARTONI A, GABICINI M, KOLIVAND M. Ease-off based compensation of tooth surface deviations for spiral bevel and hypoid gears: Only the pinion needs corrections[J]. Mechanism and Machine Theory, 2013,61(1):84-101.
- [21] WALTON D J, MEEK D S. Curve design with more general planar Pythagorean-hodograph quintic spiral segments[J]. Computer Aided Geometric Design, 2013,30(7):707-721.
- [22] D'AGOSTINO F, FERRARA F, GENNARELLI C, et al. Experimental assessment of an effective near-field-far-field transformation with spherical spiral scanning for quasi-planar antennas[J]. Antennas and Wireless Propagation Letters, 2013,12:670-673.
- [23] D'AGOSTINO F, FERRARA F, GENNARELLI C, et al. Far-field reconstruction from near-field data acquired via a fast spherical spiral scan: Experimental evidences[J]. Progress in Electromagnetics Research, 2013,140:719-732.
- [24] SARACOGU S, YAYLI Y. Special space curves characterized by  $\det(\alpha(3), \alpha(4), \alpha(5))=0$ [J]. Ukrainian Mathematical Journal, 2014,66(4):638-644.
- [25] 王道林,刘滨. 单臂铰链夹紧机构的设计与分析[J]. 煤矿机械, 2014,35(6):117-118.

(责任编辑: 钱筠 英文审校: 杨建红)