

相干态在量子相空间中二维正态分布

李海英^{1,2}, 赵建英²

(1. 内蒙古师范大学 数学系, 内蒙古 呼和浩特 010022;

2. 内蒙古商贸职业学院 社科与基础教学部, 内蒙古 呼和浩特 010070)

摘要: 将数理统计中的正态分布与物理学中的量子力学不确定性有效结合,通过二维正态分布密度函数和有序算符内的积分技术,简单有效地求得量子空间中粒子坐标 $|x\rangle$,动量本征态 $|p\rangle$ 及相干态 $|z\rangle$ 在 Fock 表象中的表达式,并证明其完备性.结果表明:通过采用数理统计及正规乘积方法,求证结果准确,且大大简化了求证过程.

关键词: 正态分布;量子空间;相干态;分布密度;正规乘积

中图分类号: O 211.3; O 413.1

文献标志码: A

德国物理学家海森堡通过矩阵、正则变换、算符等数学语言创建算符与矩阵的关系式,提出物质系统的光谱关系式、海森堡对易关系式、测不准关系式、海森堡的矩阵力学方程等,以及数学化的矩阵力学理论阐述微观世界的本质.利用具有统计性质的几率密度描述量子在空间中的运动情况,量子的粒子状态则采用波函数描写.通过宏观的轨道参数方程无法判定量子某一时刻是出现在 A 点或是 B 点,只能通过波函数测算量子出现在空间中某一点的概率,微观粒子无固定轨道运动.数学方法在科学技术中的应用已有很多报道^[1].本文根据微观粒子的不确定性(统计性质)与数学概率统计中概率密度函数的相似性,利用二维正态分布的概率密度函数研究粒子的运动状态.

1 一维正态分布

一维随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad -\infty < x < +\infty. \quad (1)$$

式(1)中: μ, σ 均为常数,若 $\sigma > 0$,则变量 X 服从常数 μ, σ 的正态分布.

2 二维正态分布

如果二维随机变量 (X, Y) 联合分布函数为 $F(x, y)$,当 $f(x, y) \geq 0$ 时,对任意实数 x, y 都满足

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv. \quad (2)$$

函数 $f(x, y)$ 是二维连续型随机变量 (X, Y) 的概率密度或分布密度,如果其概率密度满足

$$f(x, y) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1. \quad (3)$$

则二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{-1}{1-\rho^2} \left[\frac{(x-u_1)^2}{2\sigma_1^2} - \rho \frac{(x-u_1)(y-u_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-u_2)^2}{2\sigma_2^2} \right]\right). \quad (4)$$

收稿日期: 2016-03-03

通信作者: 李海英(1968-),女,副教授,主要从事高等数学的研究. E-mail:sunjinpo838@163.com.

基金项目: 内蒙古自治区高等学校科学研究基金资助项目(NJZY16399);中国教育学会“十一五”科研规划重点基金资助项目(ZY0084)

式(4)中: $\sigma_1, \sigma_2, u_1, u_2, \rho$ 均为已知参数,如果 $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, -1 < \rho < 1$, 则二维随机变量 (X, Y) 服从参数 $\sigma_1, \sigma_2, u_1, u_2$ 的二维正态分布. 当 x, y, u_1, u_2 的物理意义确定后, 同样可采用量子力学中的算符代替.

3 正规乘积

力学量在量子力学中不一定是确定值, 不能直接采用力学量的时间变化函数衡量微观粒子的运动状态. 因此, 引入力学算符描述粒子运动状态时的力学量信息. 算符指作用在一个函数上, 得出另一个函数的运算符号, 如 $\frac{d}{dx}u = v, \frac{d}{dx}$ 为微商算符. 其中, 位置算符、动量算符分别为 $\hat{x} = x$ 和 $\hat{p}_x = -i\hbar(\partial/\partial x)$. 物理学家 Louisell 为了简化算符计算过程, 在量子场论中, 提出任意 1 个包含玻色湮灭算符 a 和产生算符 a^+ 的多项式算符 $f(a, a^+)$ 可分解成 $f(a, a^+) = \sum_i \cdots \sum_j a^{+j} a^{+l} a^{+k} \cdots a^m a^n f(j, l, k \cdots, m, n)$. 其中, j, l, k, \cdots, m, n 为非负整数. 上述为正规乘积的概念^[2]. 湮灭算符 a 和产生算符 a^+ 满足对易 $[a, a^+] = 1$, 如果所有的 a^+ 都移到 a 左边, 则 $f(a, a^+)$ 为正规乘积形式, 采用 $:$ 标记, 且满足以下 6 点性质. 1) $f(a, a^+)$ 的正规乘积中 a 和 a^+ 是相互对易, 且 $a^+a = :a^+a: = :aa^+:$; 2) 所有非算符数在正规乘积符号中出入, 不影响计算结果; 3) 正规乘积中正规乘积符号可进行合并; 4) 正规乘积中, $:W: + :V: = :(W+V):$; 5) 真空投影算符 $|0\rangle\langle 0|$ 的正规乘积展开式为 $: \exp(aa^+) : = |0\rangle\langle 0|$; 6) 正规乘积内, 有 $:\frac{\partial}{\partial a}f(a, a^+): = [:f(a, a^+):, a^+], :\frac{\partial}{\partial a^+}f(a, a^+): = [a, :f(a, a^+):]$. 正规乘积的以上性质可简化量子力学算符符号的积分运算, 即正规乘积内的积分技术.

4 坐标和动量表象

狄拉克最早把“表象”引入量子力学中, 表象主要描述在不同坐标系下, 体系的状态和力学量的具体表示形式^[3]. 他把系统状态的波函数看成抽象空间中的态矢量在某个表象中的表示, 力学量的本征函数即此空间的一组基矢, 完备性是基矢成为表象的必要条件.

设 Q, P 分别为量子力学中坐标表象的坐标算符和动量表象的动量, Q, P 本征态分别为 $|x\rangle$ 和 $|p\rangle$. 由狄拉克符合表示方法, 有

$$|x\rangle\langle x| = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} (x_1^*, x_2^*, \cdots), \quad |p\rangle\langle p| = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \end{bmatrix} (p_1^*, p_2^*, \cdots). \tag{5}$$

式(5)中: x_i^* 为 x_i 的共轭函数, 且 $|x\rangle = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} (x_1^*, x_2^*, \cdots), |p\rangle = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \end{bmatrix} (p_1^*, p_2^*, \cdots)$. 由对易关系, 有

$$[Q, P] = i\hbar. \tag{6}$$

式(6)中: \hbar 为普朗克常数, 引用 Q, P 的湮灭算符 a 和产生算符 a^+ , a 和 a^+ 满足厄米共扼关系, 一维谐振子的哈密顿量^[4]为

$$H = \frac{1}{2m}P^2 + \frac{1}{2}m\omega^2Q^2. \tag{7}$$

由式(7)可知: a, a^+ 满足

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{m\omega}{\hbar}Q + i\frac{P}{\sqrt{m\omega\hbar}}\right], \quad a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{m\omega}{\hbar}Q - i\frac{P}{\sqrt{m\omega\hbar}}\right]. \tag{8}$$

根据式(8), 可得

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}(a + a^+), \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{m\omega\hbar}(a - a^+). \tag{9}$$

如果量子的坐标及动量的分布密度在量子空间中服从二维正态分布, 令 $\sigma_1 = \sigma_2 = 1/\sqrt{2}, \rho = 0$. 将式(9)代入式(4)可以得到由 a, a^+ 构成的 $f(a, a^+)$ 函数. 为了计算简单化, 令 $m = \omega = \hbar = 1$, 根据正规乘积

算符积分法^[5],有

$$f(x, p) = \frac{1}{\pi} : \exp(-(x - Q)^2 - (p - P)^2) :. \quad (10)$$

再根据正规乘积性质和 $: \exp(-a^+ a) : = |0\rangle\langle 0|$, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} : \exp(-(x - Q)^2) : &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2} + \sqrt{2}xa^+ - \frac{a^{+2}}{2}) \times \\ &: \exp(-a^+ a) : \exp(-\frac{x^2}{2} + \sqrt{2}xa - \frac{a^2}{2}) = \\ &\frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2} + \sqrt{2}xa^+ - \frac{a^{+2}}{2}) |0\rangle\langle 0| \exp(-\frac{x^2}{2} + \sqrt{2}xa - \frac{a^2}{2}). \end{aligned} \quad (11)$$

令

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2} + \sqrt{2}xa^+ - \frac{a^{+2}}{2}) |0\rangle = |x\rangle. \quad (12)$$

则式(12)改写为

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} : \exp(-(x - Q)^2) : = |x\rangle\langle x|. \quad (13)$$

同理可证

$$\begin{aligned} |p\rangle &= \pi^{-1/4} \exp(-\frac{p^2}{2} + i\sqrt{2}pa^+ + \frac{a^{+2}}{2}) |0\rangle, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} : \exp(-(p - P)^2) : &= |p\rangle\langle p|. \end{aligned} \quad (14)$$

式(13), (14)是坐标及动量本征态在 Fock 表象中的形式. 在理论物理中, 如果任意物理量 A 的算符 A' 作用在描述微观体系状态的某一状态函数 φ 上, 等于常数 a 乘以 φ , 即 $A'\varphi = a\varphi$. 则物理量 A 具有的确定数值 a 称为物理量算符 A' 的本征值, φ 称为算符 A' 的本征态或本征函数. 由式(13), (14)可知: $f(x, p) = |x\rangle\langle x| |p\rangle\langle p|$, 由量子力学中量子状态的完备性, 可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp |x\rangle\langle x| = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dp |p\rangle\langle p| = 1. \quad (15)$$

利用式(15)不难得出 $\int_{-\infty}^{+\infty} dx dp f(x, p) = 1$, 说明 $f(x, p)$ 在量子态下粒子表象具有完备性的性质. 通过以上证明, 在量子空间中, 则 (x, p) 服从参数 $\sigma_1, \sigma_2, u_1, u_2$ 的二维正态分布.

5 相干态表象

湮灭算符的本征态为 $|z\rangle$ 相干态, 复数 z 则为本征值^[6-11]. 取 $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1, \rho = 0$, 则式(10)变为

$$f(x, p) = \frac{1}{2\pi} : \exp(-\frac{(x - Q)^2}{2} - \frac{(p - P)^2}{2}) :. \quad (16)$$

根据正规乘积性质和 $: \exp(-a^+ a) : = |0\rangle\langle 0|$, 联合式(9), (16), 有

$$\begin{aligned} f(x, p) &= \frac{1}{2\pi} : \exp(-(x - Q)^2 - (p - P)^2) : = \\ &\frac{1}{2\pi} \exp(-\frac{1}{4}(x^2 - p^2) + \frac{1}{\sqrt{2}}(x + ip)a^+) : \exp(-a^+ a) : \times \\ &\exp(-\frac{1}{4}(x^2 - p^2) + \frac{1}{\sqrt{2}}(x - ip)a). \end{aligned} \quad (17)$$

如果令 $|x, p\rangle = \exp(-\frac{1}{4}(x^2 - p^2) + \frac{1}{\sqrt{2}}(x + ip)a^+) |0\rangle$, 则式(16)为

$$f(x, p) = \frac{1}{2\pi} |x, p\rangle\langle x, p|. \quad (18)$$

如果令 $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + ip)$, 则 $|z\rangle = |x, p\rangle$, 式(17)等于

$$f(x, p) = \frac{1}{2\pi} |z\rangle\langle z|. \tag{19}$$

式(19)中: $|z\rangle = |x, p\rangle = \exp((- \frac{1}{2} |z|^2 + za^+))$,湮灭算符 a 作用于式(19),并考虑 $a|0\rangle = 0$,根据量子物理学算符计算可得 $a|z\rangle = z|z\rangle$. 因此, $|z\rangle$ 为相干态.

上述计算所得相干态 $|z\rangle$ 与量子力学中结果完全吻合,且根据式(4)易证 $\frac{1}{2}\pi \int_{-\infty}^{+\infty} dz |z\rangle\langle z| = 1$. 综上所述,纯相干态 $|z\rangle$ 在量子空间呈现出以 (x, p) 为随机变量的二维正态分布.

6 结 束 语

在量子力学中阐述粒子状态是建立在几率的基础上,通过数学中概率统计特性,将量子空间中的粒子状态与概率统计有效地结合,利用概率统计中的连续型二维正态分布密度函数,推导出量子力学中的坐标表象、动量表象和相干态表象在 Fock 表象中的关系式. 同时,简捷地证明了其完备性. 此方法不仅简单、新颖、有效地简化了推导过程,且很好地把数学方法应用于量子力学基本表象.

参考文献:

[1] 杨金勇. 一类非线性比式和问题的分支定界算法[J]. 华侨大学学报(自然科学版),2015,35(3):14-16.
[2] WICK G. Quantum phase space theory based on intermediate coordinate-momentum representation[J]. Phys Rev, 1950,80:131-138.
[3] DIRAC P A M. The principles of quantum mechanics[J]. Phys Lett B,1930,72:38-41.
[4] DIRAC P A M. 量子力学原理[M]. 4 版. 陈咸亨,译. 北京:科学出版社,2010:61-89.
[5] 范洪义. 量子力学表象与变换论[M]. 上海:上海科学技术出版社,1997:97-181.
[6] 曾谨言. 量子力学(卷 I)[M]. 4 版. 北京:科学出版社,2000:91-148.
[7] KLAUDER J R,SKARGERSTAM B S. Coherent states world scientific[J]. J Sediment Res,1985,23(7):67-69.
[8] 范洪义. 相干态在参数量子相空间的两维正态分布[J]. 物理学报,2014,63(2):15-20. doi:10.7498/aps.63.020302.
[9] GLAUBER R J. The philosophy of quantum mechanics[J]. Phys Rev,1963,131(29):2766-2769.
[10] DIRAC P A M. Recollections of an exciting area, history of 20th century physics[M]. New York:Academic Press, 1977:59-102.
[11] CHEN Lin. Sources of quantum mechanics[J]. Math J Phys,1966,23(7):781-785.

Two Variable Normal Distribution of Coherent States in Quantum Space

LI Haiying^{1, 2}, ZHAO Jianying²

(1. Mathematical School, Inner Mongolia Normal University, Hohhot 010022, China;

2. Department of Social Sience and Basic teaching, Inner Mongolia Business and Trade College, Hohhot 010070, China)

Abstract: Normal distribution in mathematical statistics and the uncertainty of quantum mechanics in physics are effectively combined, by two dimensional normal distribution density function and orderly operator of integral technology, simple quantum particle in the space coordinate $|x\rangle$, momentum intrinsic state $|p\rangle$ and coherent state $|z\rangle$ expression in Fock representation are obtained effectively, and its completeness is also proved. By using mathematical statistics and normal product method, we show that the obtained result is not only accurate but also greatly simplifies the process of verification.

Keywords: normal distribution; quantum space; coherent state; density function; normal product