

# 双调和映照的单叶性与线性连结性

黄心中, 占龙俊

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

**摘要:** 假设  $F(z) = |z|^2 g(z) + h(z)$  为单位圆盘  $D = \{z \mid |z| < 1\}$  上的双调和映照, 其中,  $0 < c \leq ||h_z(z)| - |h_{\bar{z}}(z)||, |g_z(z)| + |g_{\bar{z}}(z)| \leq \Lambda, z \in D$ . 研究  $F(z)$  的单叶性、 $F(D)$  线性连结性、 $h(z)$  的单叶性与  $h(D)$  线性连结性问题, 得到  $h(z)$  与  $F(z)$  之间的相互对应关系.

**关键词:** 双调和映照; 凸映照; 线性连结性; 单叶性

**中图分类号:** O 174.51; O 174.55

**文献标志码:** A

## 1 预备知识

设  $f(z) = u(z) + iv(z)$  是定义在平面单连通区域  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  上的二阶连续可微复值映照,  $f(z)$  为调和映照, 当且仅当拉普拉斯方程  $\Delta f(z) = 0$  对任意的  $z = x + iy \in \Omega$  都成立, 其中,  $\Delta f(z) = 4f_{\bar{z}\bar{z}} = f_{x,x} + f_{y,y}$ . 单连通区域  $\Omega$  上的调和映照  $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ , 其中,  $h(z)$  和  $g(z)$  是  $\Omega$  上的解析函数<sup>[1]</sup>.

在单连通区域  $\Omega$  上, 连续可微函数  $f(z)$  定义为

$$\begin{aligned}\Lambda_f(z) &= \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |f_z(z) + \exp(-2i\theta)f_{\bar{z}}(z)| = |f_z(z)| + |f_{\bar{z}}(z)|, \quad z \in \Omega, \\ \lambda_f(z) &= \min_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |f_z(z) + \exp(-2i\theta)f_{\bar{z}}(z)| = ||f_z(z)| - |f_{\bar{z}}(z)||, \quad z \in \Omega, \\ J_f(z) &= \Lambda_f(z) \cdot \lambda_f(z) = ||f_z(z)|^2 - |f_{\bar{z}}(z)|^2|, \quad z \in \Omega.\end{aligned}$$

对于单连通区域  $\Omega$  上的 4 阶连续可微复值函数  $F(z) = U(z) + iV(z)$ , 双调和映照的充分必要条件是  $\Delta F$  是  $\Omega$  上的调和映照, 即  $\Delta^2(F(z)) = \Delta(\Delta F(z)) = 0$ , 对任意  $z = x + iy \in \Omega$  都成立. 由文献[2]可知:  $F(z)$  是单连通区域  $\Omega$  上的双调和映照, 当且仅当  $F(z) = |z|^2 g(z) + h(z)$ , 其中,  $h(z)$  和  $g(z)$  是  $\Omega$  上的复值调和映照.

对于单连通区域  $\Omega$ , 任意两点  $w_1, w_2 \in \Omega$ , 存在  $\Omega$  上可求长曲线  $\gamma$ , 使得  $\gamma$  的弧长  $l(\gamma)$  满足  $l(\gamma) \leq M|w_1 - w_2|$ . 其中,  $M \in [1, \infty)$ , 称  $\Omega$  为  $M$  线性连结区域.

研究局部单叶调和映照  $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$  单叶, 调和拟共形映照是非常有意义的, 许多学者做了很多很好的成果<sup>[3-12]</sup>. 对调和映照的单叶性与像域是线性连结区域的关系的研究也取得了很大的进展. 文献[3]证明了定理 A.

**定理 A**<sup>[3]</sup> 令  $h(z)$  是单位圆盘  $D$  到  $\mathbb{C}$  上的单叶解析映照, 则存在常数  $c > 0$  对所有的复伸张, 满足  $|\frac{g'(z)}{h'(z)}| < c$  的调和映照  $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$  是  $D$  上的单叶调和映照, 当且仅当  $h(D)$  是线性连结区域.

文献[4]对文献[3]所得的结论作进一步推广, 得到参数化的成果, 即定理 B.

**定理 B**<sup>[4]</sup> 设  $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$  是单位圆盘  $D$  上的局部单叶保向的调和映照,  $f(D)$  是  $M$ -线性连结区域, 使得  $|\frac{g'(z)}{h'(z)}| < \frac{t-1}{1+tM}, t \in \frac{2M}{1+3M}$ , 则  $f(z)$  在  $D$  上为拟共形映照, 当且仅当  $h(z)$  在  $D$  上单叶,

收稿日期: 2015-10-28

通信作者: 黄心中(1957-), 男, 教授, 博士, 主要从事函数论的研究. E-mail: huangxz@hqu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11471128); 华侨大学中青年教师科研提升资助计划(ZQN-YX110)

$h(D)$  具有  $\frac{M(1+tM)}{2tM-M+t}$ -线性连结.

陈少林等<sup>[8]</sup>证明了定理 C.

**定理 C<sup>[8]</sup>** 对于  $\alpha \in [0, 1)$ , 令  $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$  且是单位圆盘  $D$  上调和映照, 其中,  $h(z)$  和  $g(z)$  是  $D$  上的解析映照.

1) 若  $h(z) - g(z)$  在  $D$  上为  $\alpha$  近于凸,  $|\frac{g'(z)}{h'(z)}| \leq M_1, z \in D$ , 则  $h(z)$  是单叶的, 且  $h(D)$  是  $M_2$  线性连结区域, 其中,  $M_1 < \frac{\cos \frac{\alpha\pi}{2}}{1 + \cos \frac{\alpha\pi}{2}}, M_2 = \frac{1}{\cos \frac{\alpha\pi}{2} - M_1(1 + \cos \frac{\alpha\pi}{2})}$ .

2) 若  $h(z) - g(z)$  在  $D$  上为  $\alpha$  近于凸,  $|\frac{g'(z)}{h'(z)}| \leq M_3, z \in D$ , 则对于任意  $\theta \in [0, 2\pi)$ ,  $f_\theta(z) = h(z) + \exp(i\theta)\overline{g(z)}$  是  $K$  调和拟共形映照, 且  $f_\theta(D)$  是  $M_4$  线性连结区域, 其中,

$$K = \frac{1 + M_3}{1 - M_3}, \quad M_3 < \frac{\cos \frac{\alpha\pi}{2}}{2 + \cos \frac{\alpha\pi}{2}}, \quad M_4 = \frac{1 + M_3}{\cos \frac{\alpha\pi}{2} - M_3(2 + \cos \frac{\alpha\pi}{2})}.$$

在上述基础上, 文中研究双调和映照的单叶性与线性连结性的关系. 对于双调和映照函数  $F(z) = |z|^2 g(z) + h(z)$ , 其中,  $0 < c \leq ||h_z(z)| - |h_{\bar{z}}(z)||, |g_z(z)| + |g_{\bar{z}}(z)| \leq \Lambda, z \in D$ . 若调和映照  $h(z)$  在  $D$  上单叶且  $h(D)$  是  $M$  线性连结区域, 得到  $F(z)$  的单叶性及  $F(D)$  线性连结区域; 反之, 当  $F(z)$  单叶且  $F(D)$  为线性连结区域时, 也得到  $h(z)$  的单叶性及  $h(D)$  是线性连结区域. 结论为定理 1.

**定理 1** 设  $F(z) = |z|^2 g(z) + h(z)$  是单位圆盘  $D$  上的双调和映照, 其中,  $h(z)$  和  $g(z)$  是  $D$  上的调和映照,  $0 < c \leq ||h_z| - |h_{\bar{z}}||, g(0) = 0, |g_z| + |g_{\bar{z}}| \leq \Lambda, z \in D$ . 若  $h(z)$  是  $D$  单叶调和映照且  $h(D)$  是  $M_1$ -线性连结区域, 则当  $\Lambda < \frac{c}{3M_1}$  时,  $F(z)$  为  $D$  上的单叶调和映照且  $F(D)$  是  $M_2$ -线性连结区域. 其中,  $M_2 = \frac{(c + 3\Lambda)M_1}{c - 3\Lambda M_1}$ .

**证明** 首先, 要证明  $F(z)$  是单叶映照. 对于  $w = h(z) \in h(D), z = h^{-1}(w)$ , 考虑到了映照  $H(w) = F(h^{-1}(w)) = w + h^{-1}(w) \cdot \overline{h^{-1}(w)} \cdot g(h^{-1}(w))$ , 只需要证明  $H(w)$  是单叶映照.

对于  $w_1, w_2 \in h(D), \gamma_1 \subset h(D)$ , 其中,  $\gamma_1$  为连结  $w_1$  和  $w_2$  的可求长曲线, 由于  $h(D)$  是  $M_1$ -线性连结区域, 则有  $|h(\gamma_1)| \leq M_1 |w_1 - w_2|$ .

$$\begin{aligned} |H(w_2) - H(w_1)| &= |w_2 - w_1 + h^{-1}(w_2) \cdot \overline{h^{-1}(w_2)} \cdot g(h^{-1}(w_2)) - \\ &\quad h^{-1}(w_1) \cdot \overline{h^{-1}(w_1)} \cdot g(h^{-1}(w_1))| \geq |w_2 - w_1| - \\ &\quad |g(h^{-1}(w_2))| \cdot |h^{-1}(w_2)|^2 - |g(h^{-1}(w_1))| \cdot |h^{-1}(w_1)|^2 \geq \\ &\quad |w_2 - w_1| - \left| \int_{\gamma_1} d(g(h^{-1}(w)) \cdot |h^{-1}(w)|^2) \right| \geq \\ &\quad |w_2 - w_1| - \left| \int_{\gamma_1} (|H_w - 1| + |H_{\bar{w}}|) |dw| \right|. \end{aligned}$$

对映照  $h^{-1}(h(z)) = z$  分别求微分, 有

$$(h^{-1})_w \cdot h_z + (h^{-1})_{\bar{w}} \cdot \bar{h}_{\bar{z}} = 1,$$

$$(h^{-1})_w \cdot h_{\bar{z}} + (h^{-1})_{\bar{w}} \cdot \bar{h}_z = 0,$$

$$(h^{-1})_w = \frac{\bar{h}_{\bar{z}}}{J_h},$$

$$(h^{-1})_{\bar{w}} = -\frac{h_{\bar{z}}}{J_h},$$

$$(g(h^{-1}))_w = g_z(h^{-1})_w + g_{\bar{z}}(\overline{h^{-1}})_{\bar{w}} = g_z \frac{\bar{h}_{\bar{z}}}{J_h} - g_{\bar{z}} \frac{\bar{h}_z}{J_h},$$

$$(g(h^{-1}))_{\bar{w}} = g_z(h^{-1})_{\bar{w}} + g_z(\overline{h^{-1}})_{\bar{w}} = -g_z \frac{h_{\bar{z}}}{J_h} + g_z \frac{h_z}{J_h}.$$

则有

$$\begin{aligned} H_w &= 1 + \frac{\bar{h}_{\bar{z}}}{J_h} \cdot \overline{h^{-1}} \cdot g(h^{-1}) - \frac{\bar{h}_z}{J_h} \cdot h^{-1} \cdot g(h^{-1}) + (g_z \frac{\bar{h}_{\bar{z}}}{J_h} - g_z \frac{\bar{h}_z}{J_h}) \cdot h^{-1} \cdot \overline{h^{-1}}, \\ H_{\bar{w}} &= -\frac{h_{\bar{z}}}{J_h} \cdot \overline{h^{-1}} \cdot g(h^{-1}) + \frac{h_z}{J_h} \cdot h^{-1} \cdot g(h^{-1}) + (-g_z \frac{h_{\bar{z}}}{J_h} + g_z \frac{h_z}{J_h}) \cdot h^{-1} \cdot \overline{h^{-1}}. \end{aligned}$$

综上,有  $|H(w_2) - H(w_1)| \geq |w_2 - w_1| - \int_{\gamma_1} \frac{3\Lambda}{c} |dw| \geq (1 - \frac{3\Lambda}{c} M_1) |w_2 - w_1|$ . 当  $\Lambda < \frac{c}{3M_1}$  时,  $F(z)$  为  $D$  上的单叶映照.

接下来,证明  $F(D)$  是  $M_2$  线性连结区域. 令  $\Gamma_1 = H(\gamma_1)$ , 有

$$\begin{aligned} l(\Gamma_1) &= \int_{\Gamma_1} |dH| = \int_{\Gamma_1} |H_w dw + H_{\bar{w}} d\bar{w}| \leq \\ &\int_{\gamma_1} (1 + \frac{2 \cdot |g(h^{-1})| \cdot |h^{-1}|}{\lambda_h} + \frac{|g_z| + |g_{\bar{z}}|}{\lambda_h}) |dw| \leq \\ &\int_{\gamma_1} (1 + \frac{2\Lambda}{\lambda_h} + \frac{\Lambda}{\lambda_h}) |dw| \leq \int_{\gamma_1} (1 + \frac{3\Lambda}{c}) |dw| \leq (1 + \frac{3\Lambda}{c}) M_1 |w_2 - w_1|, \end{aligned}$$

因此

$$l(\Gamma_1) \leq \frac{(c + 3\Lambda)M_1}{c - 3\Lambda M_1} |H(w_2) - H(w_1)|.$$

由此可推导出  $F(D)$  是  $\frac{(c + 3\Lambda)M_1}{c - 3\Lambda M_1}$ -线性连结区域. 定理 1 证毕.

当  $h(z)$  单叶,  $g(z)$  的大伸张  $|g_z| + |g_{\bar{z}}| \leq \Lambda$  较小时,  $F(z)$  的单叶性保持不变, 即  $g(z)$  为很小的扰动时, 不会影响  $F(z)$  的单叶性.

**例 1** 取  $F(z) = |z|^2 (\frac{1}{12}z + \frac{1}{96}\bar{z}^4) + z + \frac{1}{16}\bar{z}^4$ , 其中,  $g(z) = \frac{1}{12}z + \frac{1}{96}\bar{z}^4$ ,  $h(z) = z + \frac{1}{16}\bar{z}^4$ . 因此, 要证明  $F(z)$  是单叶且具有线性连结性像区域是困难的.

**证明** 由文献[9]中的定理 1, 单位圆盘  $D$  上的保向调和映照  $f_\lambda = h + \lambda \bar{g}$  ( $|\lambda| = 1$ ) 是凸映照, 当且仅当解析映照  $F_\lambda = h + \lambda g$  是  $D$  上的凸映照.

考虑映照  $H(z) = z + \frac{1}{16}z^4$ ,  $\operatorname{Re}\{1 + \frac{zH''(z)}{H'(z)}\} = \operatorname{Re}\{1 + \frac{\frac{3}{4}z^3}{1 + \frac{1}{4}z^3}\} > 1 + \frac{-\frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = 0$ . 所以,  $H(z)$  是  $D$  上

的凸映照, 即  $h(z)$  是  $D$  上的凸映照, 则  $M = 1$ .

若令  $c = \inf\{1 - |\frac{z^3}{4}|\} = \frac{3}{4}$ ,  $\Lambda = \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{1}{8}$ . 易得,  $\Lambda < \frac{c}{3M}$ . 那么, 由定理 1,  $F(z)$  为  $D$  上的单叶映照且  $F(D)$  是 3-线性连结区域.

**定理 2** 设  $F(z) = |z|^2 g(z) + h(z)$  是单位圆盘  $D$  上的双调和映照, 其中,  $h(z)$  和  $g(z)$  是  $D$  上的调和映照, 且  $0 < c \leq ||h_z| - |\bar{h}_z||, |g_z| + |g_{\bar{z}}| \leq \Lambda, g(0) = 0, z \in D$ . 如果  $F(z)$  是  $D$  上的单叶调和映照, 且  $F(D)$  是  $M_3$ -线性连结区域, 则当  $\Lambda < \frac{c}{3M_3 + 3}$  时,  $h(z)$  是  $D$  上的单叶调和映照且  $h(D)$  是  $M_4$ -线性连结区域, 其中,  $M_4 = \frac{cM_3}{c - 3\Lambda(M_3 + 1)}$ .

**证明** 首先, 要证明  $h(z)$  是单叶映照. 对于  $\xi = F(z) \in F(D)$ ,  $z = F^{-1}(\xi)$ , 考虑到映照  $G(\xi) = h(F^{-1}(\xi)) = \xi - |F^{-1}(\xi)|^2 g(F^{-1}(\xi))$ , 则只要证明  $G(\xi)$  是单叶映照.

对于  $\xi_1, \xi_2 \in F(D)$ ,  $\gamma_2 \subset F(D)$ , 其中,  $\gamma_2$  为连结点  $\xi_1$  和  $\xi_2$  的可求长曲线, 由于  $F(D)$  是  $M_3$ -线性连结区域, 因此,  $l(\gamma_2) \leq M_3 |\xi_2 - \xi_1|$ .

$$|G(\xi_2) - G(\xi_1)| = |\xi_2 - \xi_1 + |F^{-1}(\xi_2)|^2 g(F^{-1}(\xi_2)) - |F^{-1}(\xi_1)|^2 g(F^{-1}(\xi_1))| \geq$$

$$\begin{aligned} & \left| \xi_2 - \xi_1 \right| - \left| \left| F^{-1}(\xi_2) \right|^2 g(F^{-1}(\xi_2)) - \left| F^{-1}(\xi_1) \right|^2 g(F^{-1}(\xi_1)) \right| \geqslant \\ & \left| \xi_2 - \xi_1 \right| - \left| \int_{\gamma_2} d \left| F^{-1}(\xi) \right|^2 g(F^{-1}(\xi)) \right| \geqslant \left| \xi_2 - \xi_1 \right| - \left| \int_{\gamma_2} (|G_\xi - 1| + |G_{\bar{\xi}}|) \cdot |d\xi| \right|. \end{aligned}$$

分别对映照  $F^{-1}F(z)=z$  两边取微分得

$$(F^{-1})_\xi \cdot F_z + (F^{-1})_{\bar{\xi}} \cdot \bar{F}_z = 1, \quad (F^{-1})_\xi \cdot F_{\bar{z}} + (F^{-1})_{\bar{\xi}} \cdot \bar{F}_{\bar{z}} = 0.$$

由此推导出

$$\begin{aligned} (F^{-1})_\xi &= \frac{\bar{F}_{\bar{z}}}{|F_z|^2 - |\bar{F}_z|^2}, \quad (F^{-1})_{\bar{\xi}} = -\frac{F_z}{|F_z|^2 - |\bar{F}_z|^2}, \\ (g(F^{-1}))_\xi &= g_z(F^{-1})_\xi + g_{\bar{z}}(\bar{F}^{-1})_{\bar{\xi}} = g_z \frac{\bar{F}_{\bar{z}}}{|F_z|^2 - |\bar{F}_z|^2} - g_{\bar{z}} \frac{F_z}{|F_z|^2 - |\bar{F}_z|^2}, \\ G(\xi)_\xi &= 1 + |F^{-1}(\xi)|^2 (g_z(F^{-1})_\xi + g_{\bar{z}}(\bar{F}^{-1})_{\bar{\xi}}) + (F^{-1})_\xi (\bar{F}^{-1})_{\bar{\xi}} g(F^{-1}(\xi)) + \\ & (F^{-1})_{\bar{\xi}} (\bar{F}^{-1})_{\xi} g(F^{-1}(\xi)) = 1 + |F^{-1}(\xi)|^2 (g_z \frac{\bar{F}_{\bar{z}}}{|F_z|^2 - |\bar{F}_z|^2} - g_{\bar{z}} \frac{F_z}{|F_z|^2 - |\bar{F}_z|^2}) + \\ & (\bar{F}^{-1})_{\bar{\xi}} g(F^{-1}(\xi)) \frac{\bar{F}_{\bar{z}}}{|F_z|^2 - |\bar{F}_z|^2} - (F^{-1})_{\bar{\xi}} g(F^{-1}(\xi)) \frac{F_z}{|F_z|^2 - |\bar{F}_z|^2}. \\ (g(F^{-1}))_{\bar{\xi}} &= g_z(F^{-1})_{\bar{\xi}} + g_{\bar{z}}(\bar{F}^{-1})_{\bar{\xi}} = -g_z \frac{F_z}{|F_z|^2 - |\bar{F}_z|^2} + g_{\bar{z}} \frac{\bar{F}_{\bar{z}}}{|F_z|^2 - |\bar{F}_z|^2}. \\ G(\xi)_{\bar{\xi}} &= |F^{-1}(\xi)|^2 (g_z(F^{-1})_{\bar{\xi}} + g_{\bar{z}}(\bar{F}^{-1})_{\bar{\xi}}) + (F^{-1})_{\bar{\xi}} (\bar{F}^{-1})_{\xi} g(F^{-1}(\xi)) + (F^{-1})_{\xi} (\bar{F}^{-1})_{\bar{\xi}} g(F^{-1}(\xi)) = \\ & |F^{-1}(\xi)|^2 (-g_z \frac{F_z}{|F_z|^2 - |\bar{F}_z|^2} + g_{\bar{z}} \frac{\bar{F}_{\bar{z}}}{|F_z|^2 - |\bar{F}_z|^2}) - \\ & (\bar{F}^{-1})_{\bar{\xi}} g(F^{-1}(\xi)) \frac{F_z}{|F_z|^2 - |\bar{F}_z|^2} + (F^{-1})_{\bar{\xi}} g(F^{-1}(\xi)) \frac{\bar{F}_{\bar{z}}}{|F_z|^2 - |\bar{F}_z|^2}. \end{aligned}$$

综上所述,有

$$\begin{aligned} |G(\xi_2) - G(\xi_1)| &\geqslant \left| \xi_2 - \xi_1 \right| - \int_{\gamma_2} \frac{|g_z| + |g_{\bar{z}}| + 2|g(F^{-1}(\xi))|}{|h_z| - |h_{\bar{z}}| - (|g_z| + |g_{\bar{z}}|)} |d\xi| \geqslant \\ & (1 - \frac{3\Lambda}{c-3\Lambda} M_3) |\xi_2 - \xi_1|. \end{aligned}$$

由此,当  $\Lambda < \frac{c}{3M_3+3}$  时,  $h(z)$  为单位圆盘  $D$  上的单叶映照.

接下来,证明  $h(D)$  是线性连结区域. 令  $\Gamma_2 = G(\gamma_2)$ , 有

$$\begin{aligned} l(\Gamma_2) &= \int_{\Gamma_2} |dG(\xi)| = \int_{\gamma_2} |G(\xi)_\xi d\xi + G(\xi)_{\bar{\xi}} d\bar{\xi}| \leqslant \int_{\gamma_2} (|G(\xi)_\xi| + |G(\xi)_{\bar{\xi}}|) |d\xi| \leqslant \\ & \int_{\gamma_2} [1 + |F^{-1}(\xi)|^2 (|g_z| \frac{|\bar{F}_{\bar{z}}| + |F_z|}{|F_z|^2 - |\bar{F}_z|^2} + |g_{\bar{z}}| \frac{|\bar{F}_{\bar{z}}| + |F_z|}{|F_z|^2 - |\bar{F}_z|^2}) + \\ & |(\bar{F}^{-1})_{\bar{\xi}} g(F^{-1}(\xi))| \frac{|\bar{F}_{\bar{z}}| + |F_z|}{|F_z|^2 - |\bar{F}_z|^2} + |(F^{-1})_{\bar{\xi}} g(F^{-1}(\xi))| \frac{|\bar{F}_{\bar{z}}| + |F_z|}{|F_z|^2 - |\bar{F}_z|^2}] |d\xi| \leqslant \\ & \int_{\gamma_2} [1 + \frac{|g_z| + |g_{\bar{z}}| + 2|g(F^{-1}(\xi))|}{|\bar{z}g + z|^2 g_z + h_z - |\bar{z}g + z|^2 g_z + h_{\bar{z}}}] |d\xi| \leqslant \\ & \int_{\gamma_2} [1 + \frac{|g_z| + |g_{\bar{z}}| + 2|g(F^{-1}(\xi))|}{|h_z| - |h_{\bar{z}}| - |\bar{z}g| - |z|^2 g_z - |\bar{z}g| - |z|^2 g_{\bar{z}}}] |d\xi| \leqslant \\ & \int_{\gamma_2} [1 + \frac{|g_z| + |g_{\bar{z}}| + 2|g(F^{-1}(\xi))|}{|h_z| - |h_{\bar{z}}| - 2|g| - (|g_z| + |g_{\bar{z}}|)}] |d\xi| \leqslant \\ & \int_{\gamma_2} [1 + \frac{3\Lambda}{c-3\Lambda}] |d\xi| \leqslant (1 + \frac{cM_3}{c-3\Lambda}) M_3 |\xi_2 - \xi_1|. \end{aligned}$$

由此可得

$$l(\Gamma) \leqslant \frac{cM_3}{c-3(M_3+1)\Lambda} |G(\xi_2) - G(\xi_1)|.$$

因此,可证明  $h(D)$  是  $\frac{cM_3}{c-3\Lambda(M_3+1)}$ -线性连结区域. 对应于例 1, 给出适合于定理 2 的例子.

**例 2** 取  $F(z) = |z|^2 \frac{1}{16}z + z + \frac{1}{4}\bar{z}^2$ , 其中,  $g(z) = \frac{z}{16}$ ,  $h(z) = z + \frac{1}{4}\bar{z}^2$ . 那么, 利用定理 2 就得  $h(z)$  是单叶且  $h(D)$  为  $M$ -线性连结区域.

**证明** 易证  $F(z)$  是单叶调和映照且  $F(D)$  是  $9/7$ -线性连结区域. 由定理 2 可知:  $h(z)$  是单叶调和映照且  $h(D)$  是  $9$ -线性连结区域. 显然,  $h(z)$  为单叶的是凸映照. 由此, 定理 2 的结论是成立的.

### 参考文献:

- [1] LEWY H. On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings[J]. Bull Amer Math Soc, 1936, 42(10): 689-698.
- [2] ABDULHADI Z, MUHANNA Y, KHURI S. On univalent solutions of the biharmonic equations[J]. Inequal Appl, 2005(5): 469-478.
- [3] CHUAQUI M, HERNÁNDEZ R. Univalent harmonic mappings and linearly connected domains[J]. J Math Anal Appl, 2007, 33(2): 1189-1194.
- [4] HUANG Xinzong. Locally univalent harmonic mappings with linearly connected image domains[J]. Chinese Ann Math Ser A, 2010, 31(A5): 625-630.
- [5] 王其文, 黄心中. 某些调和函数的系数估计与像区域的近于凸性质[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2013, 34(2): 225-229.
- [6] 石擎天, 黄心中. 调和映照与其剪切函数的单叶性[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2013, 34(3): 334-338.
- [7] POMMERENKE C. Boundary behaviour of conformal maps[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1992: 106-107.
- [8] CHEN Shaolin, PONNUSAMY S, RASILA A et al. Linear connectivity, Schwarz-Pick lemma and univalence criteria for planar harmonic mappings[EB/OL]. [2015-01-05] <http://arxiv.org/abs/1404.4155>.
- [9] HERNÁNDEZ R, MARTÍN M J. Stable geometric properties of analytic and harmonic functions[J]. Math Proc Camb Phil Soc, 2013, 155(2): 343-359.
- [10] HUANG Xinzong. Harmonic quasiconformal mappings on the upper half-plane[J]. Complex Variables and Elliptic Equations, 2013, 58(7): 1005-1011.
- [11] 夏小青, 黄心中. 一类双调和映照的单叶半径估计[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2011, 32(2): 218-221.
- [12] 占龙俊, 黄心中. 调和映照与像域为线性连结的剪切函数的关系[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2015, 36(5): 603-608.

## Univalence and Linear Connetivity of Biharmonic Mappings

HUANG Xinzong, ZHAN Longjun

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

**Abstract:** Suppose that  $F(z) = |z|^2 g(z) + h(z)$  is a biharmonic mapping on the unit disk  $D = \{z \mid |z| < 1\}$ , and  $0 < c \leq |h_z(z)| - |h_{\bar{z}}(z)|, |g_z(z)| + |g_{\bar{z}}(z)| \leq \Lambda, z \in D$ , we consider the relation between  $h(z)$  and  $F(z)$  for their univalence and linear connetivity of  $h(D)$  and  $F(D)$  under some conditions, we establish that if  $h(z)$  is univalent and  $h(D)$  is linear connected domain, so are  $F(z)$  and  $F(D)$ , and vice versa.

**Keywords:** biharmonic mapping; covex mapping; linear connectivity; univalence

(责任编辑: 陈志贤      英文审校: 黄心中)