

# Bessel 光束经柱透镜的衍射光场

谢晓霞<sup>1,2</sup>, 吴逢铁<sup>1,2</sup>, 纪佳位<sup>1,2</sup>

(1. 华侨大学 信息科学与工程学院, 福建 厦门 361021;  
2. 福建省光传输与变换重点实验室, 福建 厦门 361021)

**摘要:** 基于空间域中的广义惠更斯-菲涅耳衍射积分理论, 导出 Bessel 光束通过柱透镜光强分布表达式, 利用计算机模拟不同传播距离处的截面光强分布. 利用轴棱锥产生 Bessel 光束, 光束经过焦距为 130 mm 的柱透镜, 用 CCD 拍摄柱透镜的后不同传播距离的处光强分布. 结果表明: 实验所得结果与理论模拟吻合, Bessel 光束经柱透镜后将产生唇状焦散光束.

**关键词:** Bessel 光束; 柱透镜; 轴棱锥; 无衍射光束; 衍射理论

**中图分类号:** O 436.1

**文献标志码:** A

近年来, 无衍射光束凭借其在自由空间传播过程中横向光场分布不随传播距离发生变化及光束的重自愈等特性成为了研究热点, 被广泛应用于光学俘获和操作<sup>[1-2]</sup>、激光成像<sup>[3]</sup>, 空间光通信等领域. 1987 年, Durning 等<sup>[4]</sup>首次提出无衍射 Bessel 光束后, Siviloglou 等<sup>[5]</sup>提出 Airy 光束, GutiÉrrez-vega 等<sup>[6]</sup>提出马丢光束, BANDRES 等<sup>[7]</sup>提出抛物线光束等一系列具有无衍射特性的特殊光束, 并研究了这些光束相关传输特性<sup>[8-11]</sup>. 2007 年, 无衍射焦散光束(diffraction-free caustics beam)由 Marcelino<sup>[12]</sup>小组提出, 从汉克波理论和实验上证明焦散光束的自重建特性, 并在 2009 年, 从几何光学上解释和在实验上获得焦散光束<sup>[13]</sup>. 但上述文献缺少必要的理论推导及讨论, 且未对焦散光束的衍射光场进行实验研究. 因此, 本文基于空间域中的广义惠更斯-菲涅耳衍射积分理论, 导出 Bessel 光束通过柱透镜光强分布表达式, 并设计相关实验加以验证.

## 1 理论分析与模拟

当柱面透镜是一种非对称光学元件时, 对非轴对称光学系统, 描述对称光学系统的  $2 \times 2$  阶矩阵要扩张成  $4 \times 4$  阶矩阵, 在近轴近似条件下, 空间域中的广义惠更斯-菲涅耳衍射理论衍射积分<sup>[14]</sup>为

$$E_2(x_2, y_2, z) = \left(-\frac{i}{\lambda} \frac{|\mathbf{B}|^{-1/2}}{\lambda}\right) \exp(ikz) \iint_{s_1} E_1(x_1, y_1, 0) \times \exp\left\{\frac{ik}{2} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & x_2 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} & -\mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{C} - \mathbf{DB}^{-1}\mathbf{A} & \mathbf{DB}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & x_2 & y_2 \end{bmatrix}^T\right\} dx_1 dy_1. \quad (1)$$

通过柱透镜及自由空间后, 光束传输矩阵可写成

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/f & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - z/f & 0 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & z \\ -1/f & 0 & 1 & 0 \\ 0 & z & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

**收稿日期:** 2015-09-18

**通信作者:** 吴逢铁(1958-), 男, 教授, 博士, 主要从事光束传输与变换、短脉冲技术及非线性光学的研究. E-mail: fengtie@hqu.edu.cn.

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(61178015); 福建省科技创新平台计划项目(2012H2002); 福建省泉州市科技重点资助项目(2014Z127)

式(2)中:  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$  均为  $2 \times 2$  阶变换矩阵,  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1-z/f & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1-z/f & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $z$  为柱透镜到观察平面的距离;  $f$  为柱透镜的焦距. 将式(2)代入式(1), 可得

$$E_2(x_2, y_2, z) = \left(-\frac{i}{z\lambda}\right) \exp(ikz) \iint_{s_1} E_1(x_1, y_1, 0) \times \exp\left\{\frac{ik}{2}\left[\frac{(x_1^2 + y_1^2)}{z} - \frac{2(x_1x_2 + y_1y_2)}{z} + \frac{(x_2^2 + y_2^2)}{z} - \frac{x_1^2}{f}\right]\right\} dx_1 dy_1. \quad (3)$$

Helmholtz 方程在  $z=0$  处的 Whittaker 解<sup>[15]</sup> 可以表示为

$$E_1(x_1, y_1, 0) = \int_0^{2\pi} \mathbf{A}(\varphi) \exp[ik_r(x_1 \cos(\varphi) + y_1 \sin(\varphi))] d\varphi. \quad (4)$$

式(4)中:  $k_r$  为平面波的径向波矢分量;  $\mathbf{A}(\varphi)$  为理想无衍射光的角谱. 当  $\mathbf{A}(\varphi)$  取不同的值时可以得到不同的衍射光场. 对于零阶 Bessel 光束  $\mathbf{A}(\varphi)=1$ , 将式(4)代入式(3)中, 移项整理可得

$$E_2(x_2, y_2, z) = \left(-\frac{i}{z\lambda}\right) \exp(ikz) \exp\left(ik \frac{x_2^2 + y_2^2}{2z}\right) \int_0^{2\pi} \int_{-a}^a \int_{-a}^a \exp\left[ik\left(\frac{1}{2z} - \frac{1}{2f_1}\right)x_2^2\right] \exp\left[ik \frac{1}{2z}y_2^2\right] \times \exp\left[i(k\alpha \cos(\varphi) - \frac{k}{z}x_2)x_1\right] \exp\left[i(k\alpha \sin(\varphi) - \frac{k}{z}y_2)y_1\right] dx_1 dy_1 d\varphi. \quad (5)$$

令  $\zeta_1 = \alpha \cos(\varphi) - \frac{x_1}{z}$ ,  $\zeta_2 = \alpha \sin(\varphi) - \frac{y_1}{z}$ ,  $v_1 = \frac{1}{2z} - \frac{1}{2f}$ ,  $v_2 = \frac{1}{2z}$ . 对式(5)作变量替换后, 通过移项配方可得

$$E_2(x_2, y_2, z) = \left(-\frac{ik}{z\pi z}\right) \exp(ikz) \exp\left(ik \frac{x_2^2 + y_2^2}{2z}\right) \int_0^{2\pi} \exp\left[-ik \frac{\zeta_1^2}{4v_1} + \frac{\zeta_2^2}{4v_2}\right] \times \frac{1}{\left(4\sqrt{\frac{v_1 v_2}{\lambda^2}}\right)} \int_{-a}^a \int_{-a}^a \exp\left[i\frac{\pi}{2}\left(2\sqrt{\frac{v_1}{\lambda}}x + \frac{\zeta_1}{\sqrt{\lambda v_1}}\right)^2\right] \exp\left[i\frac{\pi}{2}\left(2\sqrt{\frac{v_2}{\lambda}}y + \frac{\zeta_2}{\sqrt{\lambda v_2}}\right)^2\right] d\varphi. \quad (6)$$

令  $\gamma = 2\sqrt{\frac{v_1}{\lambda}}x + \frac{\zeta_1}{\sqrt{\lambda v_1}}$ ,  $\eta = 2\sqrt{\frac{v_2}{\lambda}}y + \frac{\zeta_2}{\sqrt{\lambda v_2}}$ , 对式(6)变量替换, 并利用菲涅尔积分  $F = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iax^2) dx = C(\beta) + iS(\beta)$ , 可将式(6)化简为

$$E_2(x_2, y_2, z) = \left(-\frac{ik}{z\pi z}\right) \exp(ikz) \exp\left(ik \frac{x_2^2 + y_2^2}{2z}\right) \int_0^{2\pi} \exp\left[-ik \frac{\zeta_1^2}{4v_1} + \frac{\zeta_2^2}{4v_2}\right] \frac{1}{\left(4\sqrt{\frac{v_1 v_2}{\lambda^2}}\right)} \times [(C(\gamma_2) + iS(\gamma_2)) - (C(\gamma_1) + iS(\gamma_1))] [(C(\eta_2) + iS(\eta_2)) - (C(\eta_1) + iS(\eta_1))] d\varphi. \quad (7)$$

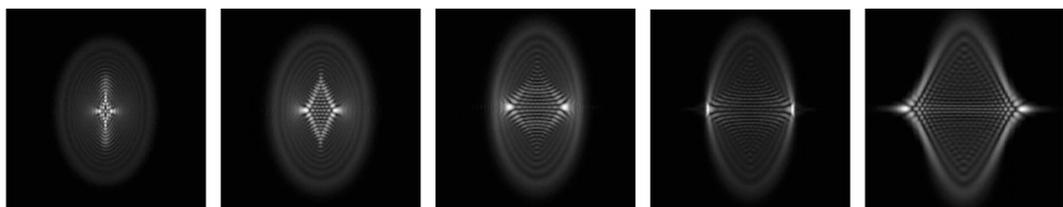
式(7)中:  $\gamma_1 = 2\sqrt{\frac{v_1}{\lambda}}a + \frac{\zeta_1}{\sqrt{\lambda v_1}}$ ;  $\gamma_2 = -2\sqrt{\frac{v_1}{\lambda}}a + \frac{\zeta_1}{\sqrt{\lambda v_1}}$ ;  $\eta_1 = 2\sqrt{\frac{v_2}{\lambda}}a + \frac{\zeta_2}{\sqrt{\lambda v_2}}$ ;  $\eta_2 = -2\sqrt{\frac{v_2}{\lambda}}a + \frac{\zeta_2}{\sqrt{\lambda v_2}}$ .

Bessel 光束经柱透镜后的光场强度分布为

$$I(x_2, y_2, z) = |E_2(x_2, y_2, z)|^2. \quad (8)$$

光源采用 He-Ne 激光器  $\lambda=632.8$  nm, 轴棱锥折射率  $n=1.458$ , 柱透镜的焦距  $f=130$  mm, 对轴棱锥底角分别为  $\gamma=0.5^\circ$ ,  $\gamma=1^\circ$  所产生的 Bessel 光束经柱透镜后, 在不同传播距离处的截面光强分布进行模拟, 模拟图如图 1, 2 所示.

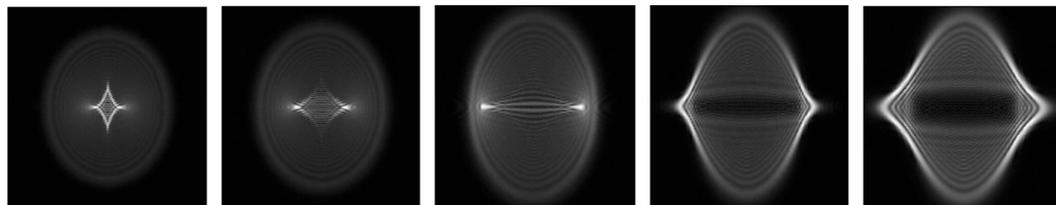
由图 1, 2 可知: Bessel 光束通过柱透镜后, 形成渐曲线状的光强分布, 在光轴上随着  $z$  的增大. 光场能量分布发生变化, 在  $z=60$  mm 及  $z=80$  mm 处, 光强分布于中心的唇状焦散线;  $z$  继续增大后, 中心的唇状焦散线开始向外扩大, 光强分布开始集中在唇状焦散线的边缘线上, 出现类似椭圆形的光斑, 在光斑中心呈现出交替相交叉的条纹. 这是由于象散导致输出光的波面斜率发生改变, 使得光通过透镜后干涉点也发生变化, Bessel 光束横截面光强原有的圆对称性被破坏, 此时, 在同轴唇状焦散线上形成两个光强度较大的光点, 形成焦散光束. 由图 1, 2 还可知: 轴棱锥的底角不同, 所形成的焦散光束的光斑大小不同, 度数较大, 其光斑较大, 度数较小, 中心的渐曲线状的焦散线也比较明显.



(a)  $z=60\text{ mm}$     (b)  $z=80\text{ mm}$     (c)  $z=100\text{ mm}$     (d)  $z=130\text{ mm}$     (e)  $z=150\text{ mm}$

图 1  $\gamma=0.5^\circ$  时的不同传播距离处的截面光强分布

Fig. 1 Intensity distribution in different position as  $\gamma=0.5^\circ$



(a)  $z=60\text{ mm}$     (b)  $z=80\text{ mm}$     (c)  $z=100\text{ mm}$     (d)  $z=130\text{ mm}$     (e)  $z=150\text{ mm}$

图 2  $\gamma=1^\circ$  时的不同传播距离处的截面光强分布

Fig. 2 Intensity distribution in different position as  $\gamma=1^\circ$

## 2 实验验证

为验证 Bessel 光束经柱透镜后会产生焦散光束,以轴棱锥底角  $\gamma=1^\circ$  所产生的 Bessel 光束经柱透镜进行实验验证,实验光路图如图 3 所示. 图 3 中: He-Ne 激光光束波长为  $632.8\text{ nm}$ . 由图 3 可知: 光束通过由  $f_1$  和  $f_2$  组成的准直扩束系统,入射到轴棱锥后产生无衍射 Bessel 光束,再经过柱透镜,利用电荷耦合器件(CCD)观察,并拍摄 Bessel 光束经柱透镜后在不同传播距离处的衍射光场. 其中,  $f_1=15\text{ mm}$ ,  $f_2=190\text{ mm}$ ,轴棱锥的折射率  $n=1.458$ ,底角  $\gamma=1^\circ$ ,柱透镜的焦距  $f=130\text{ mm}$ ,柱透镜与轴棱锥相距  $350\text{ mm}$ .

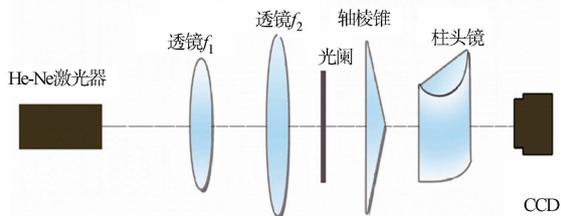
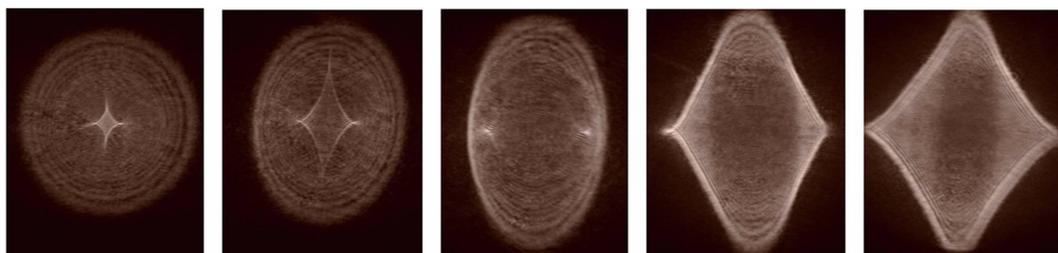


图 3 实验光路图

Fig. 3 Experimental schematic diagram

用 CCD 相机拍摄到了柱透镜后,无衍射光束在不同传播距离处光场的截面光强分布,如图 4 所示. 由图 2,4 可知: 实验上与理论上的结果吻合,即利用轴棱锥产生的 Bessel 光束经过柱透镜,由于柱透镜的非对称性,可形成焦散光束.



(a)  $z=60\text{ mm}$     (b)  $z=80\text{ mm}$     (c)  $z=100\text{ mm}$     (d)  $z=130\text{ mm}$     (e)  $z=150\text{ mm}$

图 4 在不同传播距离处的截面光强分布实验图

Fig. 4 Experimental pictures of intensity distribution in different position

## 3 结束语

由广义惠更斯-菲涅耳衍射理论衍射理论,导出 Bessel 光束通过柱透镜光强分布表达式,从理论及实验上研究了 Bessel 光束经过柱透镜的光学传输特性,实验所得结果与理论模拟吻合,均表明 Bessel

光束经柱透镜后将产生唇状焦散光束,这种光束在大景深成像、光束的传输上具有潜在的应用.研究结果对 Bessel 光束在非对称光学系统传输亦有一定的参考价值.

### 参考文献:

- [1] LEAKE K D, HAWKINS A R, SCHMIDT H. All-optical particle trap using orthogonally intersecting beams[J]. *Photonics Research*, 2013, 1(1): 47-51.
- [2] 刘彬, 吴逢铁, 江新光. 利用无衍射贝塞尔光束多层面操控微粒[J]. *中国激光*, 2009, 36(2): 379-382.
- [3] PLANCHON T A, GAO Liang, MILKIE D E, et al. Rapid three-dimensional isotropic imaging of living cells using Bessel beam plane illumination[J]. *Nature methods*, 2011, 8(5): 417-423.
- [4] DURBIN J, MICELI J J, EBERLY J H. Diffraction-free beams[J]. *Physical Review Letters*, 1987, 58(15): 1499-1501.
- [5] SIVILOGLOU G A, BROKY J, DOGARIU A, et al. Observation of accelerating airy beams[J]. *Physical Review Letters*, 2007, 99(21): 213901.
- [6] GUTIÉRREZ-VEGA J C, ITURBE-CASTILLO M D, CHÁVEZ-CERDA S. Alternative formulation for invariant optical fields: Mathieu beams[J]. *Optics Letters*, 2000, 25(20): 1493-1495.
- [7] BANDRES M A, GUTIÉRREZ-VEGA J C, CHÁVEZ-CERDA S. Parabolic nondiffracting optical wave fields[J]. *Optics Letters*, 2004, 29(1): 44-46.
- [8] 何西, 吴逢铁, 李攀, 等. 绿光 LED 产生高阶 Bessel 光的自再现[J]. *中国科学*, 2015, 36(1): 014202.
- [9] HANG Chao, HUANG Guoxiang. Guiding ultraslow weak-light bullets with Airy beams in a coherent atomic system[J]. *Physreva*, 2014, 89(1): 323-327.
- [10] 李冬, 吴逢铁, 谢晓霞. 无衍射 Mathieu 光束自重建特性的理论和实验研[J]. *物理学报*, 2015, 64(1): 014201.
- [11] CHANG G, WINFUL H G, GALVANAUSKAS A, et al. Self-similar parabolic beam generation and propagation [J]. *Physical Review E Statistical Nonlinear and Soft Matter Physics*, 2005, 72(1): 275-275.
- [12] ANGUIANO-MORALES M, MARTÍNEZ A, ITURBE-CASTILLO M D, et al. Self-healing property of a caustic optical beam[J]. *Applied Optics*, 2007, 46(34): 8284-8290.
- [13] ANGUIANO-MORALES M. Transformation of Bessel beams by means of a cylindrical lens[J]. *Applied Optics*, 2009, 48(25): 4826-4831.
- [14] 吕百达. 激光光学光束描述、传输变换与光腔技术物理[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003: 16-18.
- [15] GUTIÉRREZ-VEGA J C, ITURBE-CASTILLO M D, RAMÍREZ G A, et al. Experimental demonstration of optical Mathieu beams[J]. *Optics Communications*, 2001, 195(1/2/3/4): 35-40.

## Diffraction Optical Field of Bessel Beam Passing Through Cylindrical Lens

XIE Xiaoxia<sup>1,2</sup>, WU Fengtie<sup>1,2</sup>, JI Jiawei<sup>1,2</sup>

(1. College of Information Science and Engineering, Huaqiao University, Xiamen 361021, China;  
2. Fujian Key Laboratory of Optical Beam Transmission and Transformation, Xiamen 361021, China)

**Abstract:** In this paper, propagation process of Bessel beam which generated by axicon passing through cylindrical lens was studied. Based on the generalized Huygens Fresnel diffraction integral, the expression of the light intensity distribution that Bessel beam passing through cylindrical lens is given. The transverse intensity distribution in different position was numerical simulated. In the experiment, generated Bessel beam by axicon through the cylindrical lens which  $f=130$  mm. The optical intensity distribution in difference propagation distances was captured by a CCD camera. The theoretical analysis and the experimental results both show that Bessel beam passing through cylindrical lens can generate diffraction-free caustics beam.

**Keywords:** Bessel beam; cylindrical lens; axicon; non-diffracting beam; diffraction theory