文章编号:1000-5013(2016)02-0252-05　　　**doi:**10.11830/ISSN.1000-5013.2016.02.0252

函数空间类 Vitali 覆盖证明及其应用

赵建英，李海英

(内蒙古商贸职业学院 社科与基础教学部，内蒙古 呼和浩特 010070)

摘要： 针对在较小测度集下的性质不佳函数确定其积分存在性的问题，提出函数空间下的类 Vitali 覆盖定理. 从理论角度明确积分存在性与数值逼近的理论方法，给出对应的数值逼近方法与结果，并给予具体论证. 最后，结合理论分析结果，以示例的方式从应用角度提出积分存在性与积分数值逼近的具体应用.

关键词： 函数空间；类 Vitali 覆盖；积分存在性；积分逼近

中图分类号： O 177.39　　　**文献标志码：** A

对于积分相关问题的存在性，国内已有不少研究成果. 李仁贵[1]、汪子莲等[2]、叶陆红等[3]、Pintarelli[4]从应用角度提出了一种系统性的解决方案. 对于边值存在性问题，覃仕霞等[5]、靳存程[6]、王全义等[7]以理论与应用相结合方式，提出了一种解决方案. 对于测度论与泛函分析问题，海红[8]、江卫华等[9]、陈雪梅等[10]、邹玉梅等[11]提出了系统性的解决方案. 本文提出一种函数空间下的覆盖结论，以期解决积分存在性与数值逼近的具体问题.

1　特殊点集的定义及性质

1.1　孤立点集合

对于给定集合，其对应的孤立点集合[12]为

$$E_{\mathrm{Gpl}} = \{x_j \mid x_j \in E, x_i \notin \delta(x_j) \text{ for } \forall x_i \in E, x_j \in \delta(x_j)\}.$$

需要注意的是，$\delta(x_j)$是以 x_j 为圆心，δ 为半径的圆. 对于每一个孤立点，定义其 Vitali 覆盖集为

$$E_{\mathrm{Gpl},h}(x_j) = \{\delta(x_j) \mid x_j \in E, x_j \in E_{\mathrm{Gpl}}, x_j \in \delta(x_j), r\delta(x_j)) = h\}.$$

如上定义的 Vitali 覆盖，其覆盖半径为 h，覆盖的点为 x_j. 对于每一个孤立点，定义满足某种性质的 Vitali 覆盖集为

$$E_{\mathrm{Gpl},h}(x_j, p) = \{\delta(x_j) \mid x_j \in E, x_j \in E_{\mathrm{Gpl}}, x_j \in \delta(x_j), r(\delta(x_j)) = h, p(x_j), \text{is ture}\}.$$

如上定义的 Vitali 覆盖，必须满足性质 p.

1.2　极值点集合

对于给定集合，其对应的极值点集合[12]为

$$E_{\mathrm{Evp}} = E_{\mathrm{Evp,d}} \cup E_{\mathrm{Evp,u}}.$$

式中：$E_{\mathrm{Evp,d}} = \{x_j \mid x_j \in E, \exists\, \delta(x_j), \text{s.t. } f(x) \geqslant f(x_j) \text{ for } \forall x \in \delta(x_j) \in E\}$；$E_{\mathrm{Evp,u}} = \{x_j \mid x_j \in E, \exists\, \delta(x_j), \text{s.t. } f(x) \leqslant f(x_j) \text{ for } \forall x \in \delta(x_j) \in E\}$. 需要注意的是，$\delta(x_j)$是以 x_j 为圆心，以 δ 为半径的圆. 对于每一个极值点，定义其 Vitali 覆盖集为

$$E_{\mathrm{Evp},h}(x_j) = \{\delta(x_j) \mid x_j \in E, x_j \in E_{\mathrm{Evp}}, x_j \in \delta(x_j), r(\delta(x_j)) = h\}.$$

如上定义的 Vitali 覆盖，其覆盖半径为 h，覆盖的点为 x_j. 对于每一个极值点，定义满足某种性质的 Vitali 覆盖集为

$$E_{\mathrm{Evp},h}(x_j, p) = \{\delta(x_j, p) \mid x_j \in E, x_j \in E_{\mathrm{Evp}}, x_j \in \delta(x_j), r(\delta(x_j)) = h, p(x_j), \text{is ture}\}.$$

收稿日期： 2015-12-22

通信作者： 赵建英(1966-)，女，副教授，主要从事函数空间、积分逼近的研究. E-mail：1041038772@qq.com.

基金项目： 中国教育学会十一五科研规划重点项目(ZY0084)；内蒙古商贸职业学院教改项目(NSZY1104)

如上定义的 Vitali 覆盖，必须满足性质 p.

2　函数空间类 Vitali 覆盖的证明

设 $E\subset\mathbf{R}^2$ 且 $m\cdot(E)<\infty$，对应函数 F 的定义域为 E. 对于函数 F 在定义域中的每一点，均存在满足性质 p 的 δ 临域. 若 Γ 是 E 的 Vitali 覆盖，则对于任意的 $\varepsilon>0$，存在有限个互不相交的 $I_j\in\Gamma(j=1,2,\cdots,n)$，使得 $m(E/\bigcup\limits_{i=1}^{n}I_j)<\varepsilon$ 成立，并且当 $x\in I_j$ 时，有 $p(x)$ 成立.

证明　因为 Γ 是 E 的 Vitali 覆盖，先选取该集合中满足孤立点性质及极值点性质. 定义满足孤立点性质的集合为 $E_{\mathrm{Glp},h}(x_j)$，其中，x_j 代表孤立点，h 代表该 Vitali 覆盖的覆盖半径. 同理，定义满足极值点性质的集合为 $E_{\mathrm{Evp},h}(x_l)$，其中，x_l 代表极值点，k 代表该 Vitali 覆盖的覆盖半径. 因为是 E 的 Vitali 覆盖，所以覆盖孤立点的集合不仅存在，而且是一系列的. 对于每一个孤立点，选取其 Vitali 覆盖的下确界作为对该点的覆盖集. 对应的定义为

$$E_{\mathrm{IGlp}}(x_j)=\inf\{E_{\mathrm{Gpl},h}(x_j)\mid x_j\in E,x_j\in E_{\mathrm{Gpl}},x_j\in E_{\mathrm{Gpl},h}(x_j)\}.$$

显然，对于任意一点，满足如上性质的最小覆盖集是唯一存在的.

同理，对于每一个极值点，选取其 Vitali 覆盖的下确界作为对该点的覆盖集. 对应的定义为

$$E_{\mathrm{IEvp}}(x_j)=\inf\{E_{\mathrm{Evp},h}(x_j)\mid x_j\in E,x_j\in E_{\mathrm{Evp}},x_j\in E_{\mathrm{Evp},h}(x_j)\}.$$

有了如上的下确界后，首先从 E 中选取所有的孤立点和极值点，对于每一个孤立点，按照孤立点数值大小排序，可以构成一个可列集 E_{Gpl}. 对于每一个极值点，按照极值点数值大小排序，可以构成一个可列集 E_{Evp}.

在确定了孤立点集合后，对于上述集合中的每一个元素选取 Vitali 覆盖的下确界，由此构成对应的下确界集合. 这些具有选取的，下确界的孤立点 Vitali 覆盖(任意覆盖)，其全集为 $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}(E_{\mathrm{IGlp}}(x_j))$. 将其纳入新集合，即 $E_{\mathrm{New}}=\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}(E_{\mathrm{IGlp}}(x_j))$.

对于极值点，通过极值点确定，极值点集合确定，极值点 Vitali 覆盖(任意覆盖)，最有某种性质的极值点 Vitali 覆盖(任意覆盖)，具有某种性质的下确界的极值点 Vitali 覆盖，选定对极值点的一种唯一 Vitali 覆盖原则. 其全集为 $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}E_{\mathrm{IEvp}}(x_j)$，将其纳入新集合 $E_{\mathrm{New}}=\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}(E_{\mathrm{IGlp}}(x_j))\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}(E_{\mathrm{IEvp}}(x_j))$.

确定了孤立点与极值点的下确界 Vitali 覆盖之后，对于集合 E_{New} 而言，是由两大类子集所组成. 对点集中的非孤立点与非极值点进行分析，以便选取集合来扩充集合 E_{New}.

首先，从集合 E-E_{New} 中任意选取一点 x_{random}，作为备选集合的代表元素. 以 x_{random} 作为代表，考察其是否满足性质 p. 满足与否的判定方法是，给定判定变量 ε，判断在 x_{random} 的临域中是否存在该性质. 初始期间，对于临域的大小是无法确定的. 因此，选定任意一值域 h_0 作为临域的大小，如果在此值域内

$$P(x_q)=1,x_q\in(-h_i,x_{\mathrm{random}}+h_i)\tag{1}$$

成立，则初始值可以作为领域的基准值. 这说明，$P(x_q)=1$ 代表存在 x_{random} 临域，使得在此临域内，某一具体性质是成立的.

如果式(1)成立，h_0 作为 x_{random} 的初始临域长度是成立. 则依次选取 $h_i=2^ih_0$ 作为新临域长度的选项，继续判断式(1)是否成立. 一旦成立，新临域长度比原临域长度增加一倍，继续判定式(1)是否继续成立，直到式(1)不成立或者为 x_{random} 的临域超出 E 的范围. 如果式(1)成立，h_0 作为 x_{random} 的初始临域长度是不成立的，则依次选取 $h_i=(1/2)^ih_0$ 作为新临域长度的选项，继续判断式(1)是否成立. 一旦成立，新临域长度比原临域长度缩小一倍，继续判定式(1)是否继续成立，直到式(1)不成立或者为 x_{random} 的临域超出 E 的范围.

采用上述方法，即可确定式(1)成立的上确界范围，即有

$$h_{\max}(x_i,p)=\sup\{h_i\mid P(x_q)=1,x_q\in(x_i-h_i,x_i+h_i),x_i\in E,x_q\in E\}.$$

照此方法，确定了一个新元素，将其纳入到集合 ，使其成为集合，即

$$E_{\mathrm{New}}=\bigcup_{i=1}^{+\infty}(E_{\mathrm{IGlp}}(x_j))\bigcup_{i=1}^{+\infty}(E_{\mathrm{IGlp}}(x_j))\cup(x_i-h_{\max}(x_i),x_i+h_{\max}(x_i)).$$

按照规则选取集合,有

$$X(E_{\mathrm{New}})=\{x_w \mid \mathrm{dis}(s_w,E_{\mathrm{New}})=\inf(\mathrm{dis}(E_{\mathrm{New}},x_i),x_l\notin E_{\mathrm{New}},x_i\in E)\},$$
$$E_{\mathrm{add}}=\{(x_i-h_{\max}(x_i,p),x_i+h_{\max}(x_i,p)),x_i\in X(E_{\mathrm{New}})\}.$$

需要说明的是,E_{add}是新添加的集合,其与原有的集合E_{New}的距离($\mathrm{dis}(E_{\mathrm{New}},x_i)$代表一点与一集合的距离)首先必须达到下确界,其次,还要满足是下确界元素中的满足性质的最大临域集合.

确定此集合后,将其继续加入到集合E_{New}中,可得

$$E_{\mathrm{New}}=E_{\mathrm{New},1}\cup E_{\mathrm{New},2}.\tag{2}$$

式中:$E_{\mathrm{New},1}=\bigcup_{i=1}^{+\infty}(E_{\mathrm{IGlp}}(x_j))\bigcup_{i=1}^{+\infty}(E_{\mathrm{IGlp}}(x_j))\cup(x_i-h_{\max}(x_i),x_i+h_{\max}(x_i))$;$E_{\mathrm{New},2}=E_{\mathrm{add},1}$.需要注意的是,集合$E_{\mathrm{New},1}$,$E_{\mathrm{New},2}$分别是已经完全确定和待确定的集合.接下来的选取规则仅仅是在$E_{\mathrm{New},2}$中进行.

对于满足式(2)中的待选集合,如果并不唯一,则通过任意选取其中之一,然后,进行逆时针或者顺时针选取,即可依次选取所有的集合.之所以这样说,是因为与给定集合距离最近的点集,在实数空间而言,分布在给定集合中心为指定半径的圆上.所以选取其中之一后,按照选定元与给定集合之间的关系,依次进行顺时针选取或者逆时针选取即可得到所有满足条件的元素.

按上述方法在$E_{\mathrm{New},2}$中重复选取,就是选取$E_{\mathrm{add},1}(i\in[1,+\infty))$,最终选取到所有的备选元素.由于初始集合$E$的外侧度$m^*(E)<\infty$.所以,上述进行的Vitali覆盖$E_{\mathrm{New}}=E_{\mathrm{New},1}\cup E_{\mathrm{New},2}$最终选取到所有必然是有界的.按照选取的顺序,则可以确定上述集合的测度是收敛于某一值得.因此,按收敛的性质要求,$m(E_{\mathrm{New}})=m(E_{\mathrm{New},1})+m(E_{\mathrm{New},2})=m(E_{\mathrm{New},1})+\sum_{i=1}^{+\infty}m(E_{\mathrm{add},i})$成立;而按收敛的要求,$\forall\varepsilon$,$\exists n(\varepsilon)$,$\sum_{i=n}^{+\infty}m(E_{\mathrm{add},i})<\varepsilon$成立.需要注意的是,在每一个集合$E_{\mathrm{add},i}$都是要求性质$p$成立的.因此,对于集合进行选取,则有$m(E-E_{\mathrm{New},i})-\sum_{i=1}^{n}m(E_{\mathrm{add},i}))<\varepsilon$成立.

3 在积分存在性与积分数值估计中的应用

在Lebesgue积分中,如果函数可积$(L)\int f\mathrm{d}\mu<\infty$,积分范围为集合$E$.则结论$\forall\varepsilon$,$\exists\delta$,$\exists E_\delta$,s.t. $m(E_\delta)<\delta$,$E_\delta\subset E$,$(L)\int_\delta f\mathrm{d}\mu<\varepsilon$成立.将该结果与前述所得到的函数空间类Vitali覆盖相结合,即可确定有$\forall\varepsilon$,$\exists N$,$\exists E_N=E-E_{\mathrm{New},1}-\sum_{i=1}^{N}E_{\mathrm{add},i}$,s.t. $m(E_N)<\delta$,$E_N\subset E$,$(L)\int_{E_N}f\mathrm{d}\mu<\varepsilon$.将此结果在积分存在性和积分数值逼近性上具体应用,可以得到具体的结果.

3.1 在积分存在性中的应用

在经典的黎曼积分研究中,对于积分的存在性,一种方法是通过判断达布上和与达布下和之间的极限差距,由此确定积分的存在性.即有

$$\left.\begin{aligned}&x_0=a,\quad x_n=b,\quad x_i<x_{i+1},\quad x_i\in[a,b],\\&\exists\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n}[f(x_{i+1})-f(x_i)](x_{i+1}-x_i)<\varepsilon\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

成立.此时,函数如果满足可微的条件,允许左右微分都能存在,且不相等的情况出现.那么,在限定的区域范围内,按照微分的定义,则$f'(x_{i+1})-\varepsilon<\dfrac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}<f'(x_{i+1})+\varepsilon$成立.

将此结果具体应用到式(3)中,可得

$$\sum_{i=0}^{n}[f'(x_{i+1})-\varepsilon](x_{i+1}-x_i)^2<\sum_{i=0}^{n}[f'(x_{i+1})+\varepsilon](x_{i+1}-x_i)^2.$$

当要求$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n}[f(x_{i+1})-f(x_i)](x_{i+1}-x_i)<\varepsilon$时,结合上式,则不等式

$$\sum_{i=0}^{n}[f'(x_{i+1})+\varepsilon](x_{i+1}-x_i)^2<\varepsilon,\qquad \sum_{i=0}^{n}[f'(x_{i+1})-\varepsilon](x_{i+1}-x_i)^2<\varepsilon \tag{4}$$

成立. 对式(4)仔细分析可知：进行黎曼积分时，小区间的划分长度必须满足一定条件后，达布上和与达布下和的差值才能满足小于指定差距的要求. 这一要求对于可微分函数而言，在非极值点必须满足形式(4)的约束条件即可实现.

为了便于直观理解上述结果，以几种类型的函数黎曼积分为例，对其进行解释.

例 1　阶梯型函数的黎曼积分

对于这种类型的函数，给出其类中的一个具体示例的函数标出，有

$$f(x)=[v_0,x\in[a_0,b_0];\cdots;v_l,x\in[a_l,b_l];v_l,x\in[a_l,b_l]]^{\mathrm{T}}.$$

按照微分的定义，有

$$f'_-(x)=[0,x\in[a_0,b_0];\cdots;0,x\in[a_l,b_l];0,x\in[a_l,b_l]]^{\mathrm{T}}.$$

将此结果带入到式(4)中，则不等式 $\sum_{i=0}^{n}[0+\varepsilon](x_{i+1}-x_i)^2<\varepsilon$，$\sum_{i=0}^{n}[0-\varepsilon](x_{i+1}-x_i)^2<\varepsilon$ 成立. 对于前者，自然是 $\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}-x_i)^2<1$；对于后者，是自然成立的. 所以只要满足 $\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}-x_i)^2<1$ 的区间划分，即可保证可积性.

例 2　阶段型线性函数的黎曼积分

对于这种类型的函数，给出其类中的一个具体示例的函数标出，有

$$f(x)=[v_0x+w_0,x\in[a_0,b_0];\cdots;v_ix+w_i,x\in[a_i,b_i];v_lx+w_l,x\in[a_l,b_l]]^{\mathrm{T}},$$

按照微分的定义，有

$$f'_-(x)=[v_0,x\in[a_0,b_0];\cdots;v_i,x\in[a_i,b_i];v_l,x\in[a_l,b_l]]^{\mathrm{T}}.$$

将此结果带入式(4)中，即不等式 $\sum_{i=0}^{n}[v_i+\varepsilon](x_{i+1}-x_i)^2<\varepsilon$，$\sum_{i=0}^{n}[v_i-\varepsilon](x_{i+1}-x_i)^2<\varepsilon$ 成立. 对于前者，自然是 $\sum_{i=0}^{n}v_i(x_{i+1}-x_i)^2/[1-\sum_{i=0}^{n}(x_{i+1}-x_i)^2]<\varepsilon$；对于后者，自然是 $\sum_{i=0}^{n}v_i(x_{i+1}-x_i)^2/[1+\sum_{i=0}^{n}(x_{i+1}-x_i)^2]<\varepsilon$. 所以，只要区间划分同时满足二者的要求，即可保证可积性.

对于其他类型的函数，可以采用如上类似的方法进行处理，即可确定区间划分的具体长度保证积分的可积性.

3.2　在积分数值估计中的应用

在经典的黎曼积分中，对于积分数值的逼近估计有两种方法. 第一种是用上、下界进行估计，如

$$m_p<f(x_{i,p})<M_p,\qquad x_{i,p}\in(x_p-h_i,x_p+h_i).$$

其中：$f(x)$为函数；M_p 为上界；m_p 为下界. 对于这类函数的积分，通过如下的论证说明能否可以用界函数的积分进行替代，即

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n}[m_p](x_{i+1}-x_i)<\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n}[M_p](x_{i+1}-x_i).$$

对于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n}[M_p](x_{i+1}-x_i)$ 而言，采用前述的覆盖理论结果，可以得到极限的要求结果为 $\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}-x_i)^2<1$. 同理，对于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n}[m_p](x_{i+1}-x_i)$ 而言，采用前述的覆盖理论结果，可以得到极限的要求结果依然为 $\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}-x_i)^2<1$. 这说明当划分的区间满足 $\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}-x_i)^2<1$ 时，上述积分不仅存在，而且取值在 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n}[m_p](x_{i+1}-x_i)$ 与 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n}[m_p](x_{i+1}-x_i)$ 之间.

第二种是简单函数替代的方法进行估计，如

$$f(x_p)=g(x_q)+o(x_p-x_q).$$

其中:$f(x)$为复杂函数;$g(x)$为简单函数.对于复杂函数的积分,通过如下论证说明是否可以用简单函数的积分进行替代.即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n}[f(x_{i+1})](x_{i+1}-x_i)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n}[g(x_{i+1})\times(x_{i+1}-x_i)+0]=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

对于其他类型的函数,可采用如上类似的方法进行处理,即可确定其积分的取值或取值范围.

4 结束语

从测度论的角度,提出并论证了函数空间下的 Vitali 覆盖结论.该结论对如何进行积分存在性和积分数值逼近提出了一种分析与验证方法.最后,通过若干个示例,从应用角度提出了积分存在性与积分数值逼近的具体应用.

参考文献:

[1] 李仁贵.一类具有 Riemann-Liouville 分数阶积分边值条件的奇异分数阶微分方程解的存在性[J].数学的实践与认识,2015(11):285-293.

[2] 汪子莲,丁珂.Banach 空间中一类奇异积分边值问题解的存在性[J].郑州大学学报(理学版),2015,47(2):13-19.

[3] 叶陆红,杨海洋.一类特殊的 Volterra 型积分方程的解的存在性[J].安庆师范学院学报(自然科学版),2015,5(2):7-9.

[4] PINTARELLI M B. Volterra integral equations and some nonlinear integral equations with variable limit of integration as generalized moment problems[J]. Journal of Mathematics and System Science,2015,5(1):32-38.

[5] 覃仕霞,罗圆.Robin 型无穷多点边值问题正解的存在性[J].四川理工学院学报(自然科学版),2015,28(3):90-95.

[6] 靳存程.带积分边界条件的三阶边值问题三个正解的存在性[J].兰州文理学院学报(自然科学版),2015,29(4):27-29.

[7] 王全义,邹黄辉.一类四阶奇异非线性积分边值问题正解的存在性[J].华侨大学学报(自然科学版),2014,35(1):112-117.

[8] 海红.无限时滞积分微分方程周期解的存在性[J].廊坊师范学院学报(自然科学版),2015,15(2):9-10.

[9] 江卫华,李海明.分数阶脉冲微分方程组边值问题解的存在性[J].河北科技大学学报,2015,36(2):134-143.

[10] 陈雪梅,马冬梅,张曾丹.带核函数的随机积分方程解的存在唯一性[J].四川大学学报(自然科学版),2015,52(1):1-5.

[11] 邹玉梅,王梦媛,贺国平.Riemann-Stieltjes 积分边值问题正解的存在唯一性[J].应用泛函分析学报,2014,16(3):238-243.

[12] 夏道行.实变函数与泛函分析[M].北京:高等教育出版社,2010:1-15.

Proof of Semi-Vitali Covering Theorem on Function Space and Its Application

ZHAO Jianying, LI Haiying

(Department of Social Science and Basic Teaching, Inner Mongolia Business Vocational College, Huhhot 010070, China)

Abstract: How to determine the existence of integral for functions with a small measure set, how to give a method of digital approximation to calculate this type of integral, the authors put forward a method which is called semi-vitali covering that can be used to solve the questions quickly. The method is proved by real analyzing theorem. Finally, the authors use it to solve several physical problems to check the correctness.

Keywords: function space; vitali cover; existence of integral; approximation of integral

(**责任编辑:** 黄晓楠 **英文审校:** 黄心中)