文章编号:1000-5013(2016)01-0125-04　　**doi:**10.11830/ISSN.1000-5013.2016.01.0125

上半平面某类调和拟共形映照的特征估计

林珍连

(华侨大学 数学科学学院,福建 泉州 362021)

摘要: 给出以 $h(x)=x+\frac{k}{\pi}\sin \pi x, 0\leqslant k<1$ 为边界值的上半平面到自身的调和拟共形延拓表达式及其特征估计. 结果表明:该调和拟共形延拓比 Beurling-Ahlfors 延拓更优.

关键词: 最大特征; 拟共形延拓; 调和拟共形映照; Hilbert 变换

中图分类号: O 174.55　　**文献标志码:** A

1 预备知识

拟共形映射的边界对应问题是拟共形映射理论中十分重要的内容,它包括拟共形映照边界函数和给定边界函数的拟共形延拓问题的研究,这些都有利于拟共形映照理论中极值问题的研究.

平面区域 Ω 到 G 的可微拓扑映照 $f:(x,y)\to(u,v)$,其特征 D 定义为

$$D+\frac{1}{D}=\frac{u_x^2+u_y^2+v_x^2+v_y^2}{|u_x v_y-u_y v_x|}. \tag{1}$$

若 D 是有界的,则称 f 是拟共形的,D 的最小上界称为最大特征[1].

实轴 $\mathbf{R}$ 到自身一个连续的严格递增函数 $h(x)$,称为 ρ-拟对称的,$\rho\geqslant 1$. 若对一切 $x\in\mathbf{R}, t>0$,有

$$\frac{1}{\rho}\leqslant\frac{h(x+t)-h(x)}{h(x)-h(x-t)}\leqslant\rho. \tag{2}$$

记 $H=\{z\,|\,\mathrm{Im}\,z>0\}$. Beurling 等[1]证明了 $h(x)$ 具有 H 到 H 上的拟共形延拓的充分必要条件,是 $h(x)$ 为 ρ-拟对称函数,并建立 Beurling-Ahlfors 扩张函数为

$$\phi(z)=\frac{1}{2y}\int_{x-y}^{x+y}h(t)\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{i}}{2y}\left(\int_{x}^{x+y}h(t)\mathrm{d}t-\int_{x-y}^{x}h(t)\mathrm{d}t\right). \tag{3}$$

关于 Beurling-Ahlfors 延拓特征估计问题,一直以来吸引了众多国内外学者的眼球[1-2]. 迄今为止,最大特征 D 的最好估计是 $D\leqslant\max\{2\rho-1,\rho^{3/2}\}$[2].

Douady 等[3]讨论了单位圆到自身的边界对应问题,利用调和测度给出延拓表达式,并且讨论了它的特征估计尽管十分粗糙. Reich[4]用参数表示法对这一问题进行了探讨,然而,他的特征估计也不是最佳的. 文献[5-6]分别讨论了单位圆及上半平面到自身的调和拟共形延拓的边界对应问题,给出可延拓成单位圆或上半平面到自身的调和拟共形的边界对应所满足的充要条件,但没有涉及到特征估计.

定义在平面单连通区域 Ω 上的复值调和函数可表示为 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$,$h(z)$ 和 $g(z)$ 是 Ω 上的解析函数. 记 $J_f=|h'(z)|^2-|g'(z)|^2$,则 $f(z)$ 是 Ω 上局部单叶保向的充要条件是 $J_f>0$[7]. 又若 $f(z)$ 在 Ω 上单叶,且 $\operatorname*{ess\,sup}_{z\in\Omega}|g'(z)/h'(z)|\leqslant k<1$,$k$ 为常数,则称 $f(z)$ 为 Ω 上的调和拟共形映照. 关于调和映照的更多结果可参见文献[7-9].

定义 $h(x)\in L^\infty(R)$ 的 Hilbert 变换为

收稿日期: 2015-08-25

通信作者: 林珍连(1970-),女,副教授,主要从事函数论的研究. E-mail:zhenlian@hqu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11471128); 国家青年科学基金资助项目(11501220); 福建省自然科学基金计划资助项目(2014J01013); 华侨大学中青年教师科研提升资助计划(ZQN-YX110)

$$Hh(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} H_\varepsilon h(x). \tag{4}$$

式(4)中:

$$H_\varepsilon h(x) = \frac{1}{\pi}\int_{|x-t|>\varepsilon}\left(\frac{1}{x-t}+\frac{t}{t^2+1}\right)h(t)\mathrm{d}t. \tag{5}$$

$Hh(x)$几乎处处存在,但 $Hh(x)$未必属于 $L^\infty(R)$[10-11].

称 $h(x)$是双李普希兹的,若 $h(x)$绝对连续且有某个常数 c,使得 $1/c<h'(x)<c(x\in\mathbf{R}$,a. e.).

文献[6]证明了 $h(x)$具有 H 到 H 上的调和拟共形延拓的充分必要条件是 $h(x)$是双李普希兹的,且 $Hh'(x)\in L^\infty(R)$. 同时,还证明了定理 A.

定理 A 上半平面到自身的任意调和拟共形延拓具有唯一表示式,即

$$f(z) = 2\mathrm{Re}\int_{\mathrm{i}}^{z}\varphi(\zeta)\mathrm{d}\zeta + b + \mathrm{i}c\mathrm{Im}\ z. \tag{6}$$

式(6)中:$b+\mathrm{i}c\in H$;φ 是定义在 H 上的解析函数,满足 $\varphi(H)$是右半平面的相对紧子集.

由于调和映照的黎曼映照定理不再成立,使式(6)中 $f(z)$的特征估计变得困难. 本文就具体给定的边界对应,作出其上半平面到自身的调和拟共形延拓表达式,并对它的特征作出估计.

2 主要结论及其证明

定理 1 设 $h(x)=x+\frac{k}{\pi}\sin \pi x$,$0\leqslant k<1$,则其上半平面到自身的调和拟共形延拓表达式为

$$f(z) = x + \frac{k}{\pi}\exp(-\pi y)\sin \pi x + \mathrm{i}cy, \qquad c>0 \text{ 为常数}.$$

其特征 D 有估计式

$$D+\frac{1}{D}\leqslant\frac{2}{\sqrt{1-k^2}}.$$

证明 先证明 $h(x)$不但是双李普希兹的,而且 $Hh'(x)\in L^\infty(R)$,即 $h(x)$可调和拟共形延拓到上半平面. 由 $h(x)=x+\frac{k}{\pi}\sin \pi x$,$0\leqslant k<1$,可得 $h'(x)=1+k\cos \pi x$ 及 $1-k\leqslant h'(x)\leqslant 1+k$. 故 $h(x)$是双李普希兹的,单调递增的. 再证 $Hh'(x)\in L^\infty(R)$,依定义

$$Hh'(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} H_\varepsilon h'(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{|x-t|>\varepsilon}\left(\frac{1}{x-t}+\frac{t}{t^2+1}\right)(1+k\cos \pi t)\mathrm{d}t \xlongequal{\text{P. V.}}$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{t^2+1}(1+k\cos \pi t)\mathrm{d}t + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{|x-t|>\varepsilon}\frac{1+k\cos \pi t}{x-t}\mathrm{d}t.$$

分别计算上式两个积分,即

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{t^2+1}(1+k\cos \pi t)\mathrm{d}t \xlongequal{\text{P. V.}} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{t^2+1}\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{tk\cos \pi t}{t^2+1}\mathrm{d}t =$$
$$0 + \frac{k}{\pi}\mathrm{Re}[2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}(\frac{z}{z^2+1}\exp(\pi\mathrm{i}z),\mathrm{i}] = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{|x-t|>\varepsilon}\frac{1+k\cos \pi t}{x-t}\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{x-\varepsilon}\frac{1+k\cos \pi t}{x-t}\mathrm{d}t + \int_{x+\varepsilon}^{+\infty}\frac{1+k\cos \pi t}{x-t}\mathrm{d}t\right] \xlongequal{\text{P. V.}}$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+k\cos \pi t}{x-t}\mathrm{d}t \xlongequal{\text{P. V.}} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x-t}\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k\cos \pi t}{x-t}\mathrm{d}t =$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k\cos \pi t}{x-t}\mathrm{d}t = \frac{-k}{2\pi}\mathrm{Re}[2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}(\frac{\exp(\pi\mathrm{i}z)}{z-x},x)] = k\sin \pi x.$$

因此,$Hh'(x)\in L^\infty(R)$.

依据文献[6]的方法,给出 $h(x)$到上半平面的调和拟共形延拓的具体表达式,为此令

$$U(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y}{(t-x)^2+y^2}h'(x)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y}{(t-x)^2+y^2}(1+k\cos \pi t)\mathrm{d}t =$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y}{(t-x)^2+y^2}\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y}{(t-x)^2+y^2}k\cos \pi t\mathrm{d}t =$$

$$1+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y}{(t-x)^2+y^2}k\cos\pi t\mathrm{d}t=$$

$$1+\frac{ky}{\pi}\mathrm{Re}[2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}(\frac{\exp(\pi\mathrm{i}z)}{(z-x)^2+y^2},x+\mathrm{i}y)]=1+k\exp(-\pi y)\cos\pi x,\qquad y>0.$$

设 $V(z)$ 为 $U(z)$ 满足 $V(\mathrm{i})=0$ 的共轭调和函数，则 $V(z)=k\exp(-\pi y)\sin\pi x$，解析函数为

$$\varphi(z)=\frac{1}{2}(U(z)+\mathrm{i}V(z))=\frac{1}{2}(1+k\exp(\pi\mathrm{i}z)).$$

显然，$\varphi(H)$ 是右半平面的相对紧子集，根据定理 A，有

$$f(z)=2\mathrm{Re}\int_{\mathrm{i}}^{z}\varphi(\zeta)\mathrm{d}\zeta+\mathrm{i}cy=\mathrm{Re}\int_{\mathrm{i}}^{z}(1+k\exp(\pi\mathrm{i}\zeta))\mathrm{d}\zeta+\mathrm{i}cy=$$

$$x+\frac{k}{\pi}\exp(-\pi y)\sin\pi x+\mathrm{i}cy,\qquad c>0.$$

再估计 $f(z)$ 的最大特征. 令 $f(z)=x+\frac{k}{\pi}\exp(-\pi y)\sin\pi x+\mathrm{i}cy=u(z)+\mathrm{i}v(z)$，则有 $u_x(z)=1+k\exp(-\pi y)\cos\pi x$，$u_y(z)=-k\exp(-\pi y)\sin\pi x$，$v_x=0$，$v_y=c$. 于是，可得

$$D+\frac{1}{D}=\frac{u_x^2+u_y^2+v_x^2+v_y^2}{|u_xv_y-u_yv_x|}=\frac{1+2k\exp(-\pi y)\cos\pi x+k^2\exp(-2\pi y)+c^2}{(1+k\exp(-\pi y)\cos\pi x)c}=$$

$$\frac{2}{c}+\frac{k^2\exp(-2\pi y)+c^2-1}{(1+k\exp(-\pi y)\cos\pi x)c}=\frac{2}{c}+\frac{g(x,y)}{c}.$$

证明 $g(x,y)$ 在上半平面是次调和的. 经过计算，有

$$g_x(x,y)=k\pi\exp(-\pi y)\frac{(k^2\exp(-2\pi y)+c^2-1)\sin\pi x}{(1+k\exp(-\pi y)\cos\pi x)^2},$$

$$g_y(x,y)=k\pi\exp(-\pi y)\frac{-2k\exp(-\pi y)-k^2\exp(-2\pi y)\cos\pi x+(c^2-1)\cos\pi x}{(1+k\exp(-\pi y)\cos\pi x)^2},$$

$$g_{x,x}(x,y)=k\pi^2\exp(-\pi y)(k^2\exp(-2\pi y)+c^2-1)\frac{\cos\pi x+k\exp(-\pi y)+k\exp(-\pi y)\sin^2\pi x}{(1+k\exp(-\pi y)\cos\pi x)^3},$$

$$g_{y,y}(x,y)=k\pi^2\exp(-\pi y)[\frac{4k\exp(-\pi y)-(c^2-1)\cos\pi x+3k^2\exp(-2\pi y)\cos\pi x}{(1+k\exp(-\pi y)\cos\pi x)^3}+$$

$$\frac{k^3\exp(-3\pi y)\cos^2\pi x+k(c^2-1)\exp(-\pi y)\cos^2\pi x}{(1+k\exp(-\pi y)\cos\pi x)^3}].$$

因此，有

$$\frac{g_{x,x}+g_{y,y}}{\pi^2k\exp(-\pi y)}(1+k\exp(-\pi y)\cos\pi x)^3=k\exp(-\pi y)(2+2c^2+$$

$$4k\exp(-\pi y)\cos\pi x+2k^2\exp(-2\pi y))>0.$$

也就是说，$D+1/D$ 在上半平面 H 上是次调和的. 因而，它的最大值只能在边界上达到. 令

$$S(x)=\lim_{y\to0}(D+\frac{1}{D})=\lim_{y\to0}(\frac{2}{c}+\frac{k^2\exp(-2\pi y)+c^2-1}{(1+k\exp(-\pi y)\cos\pi x)c})=\frac{2}{c}+\frac{k^2+c^2-1}{(1+k\cos\pi x)c}.$$

求 $S(x)$ 的最大值.

1) 当 $0<c<\sqrt{1-k^2}$ 时，有

$$S_{\max}(x)=\frac{2}{c}+\frac{k^2+c^2-1}{(1+k)c}=\frac{1+k}{c}+\frac{c}{1+k}\leqslant\frac{1+k}{\sqrt{1-k^2}}+\frac{\sqrt{1-k^2}}{1+k}=\frac{2}{\sqrt{1-k^2}}.$$

2) 当 $c>\sqrt{1-k^2}$ 时，有

$$S_{\max}(x)=\frac{2}{c}+\frac{k^2+c^2-1}{(1-k)c}=\frac{1-k}{c}+\frac{c}{1-k}\leqslant\frac{1-k}{\sqrt{1-k^2}}+\frac{\sqrt{1-k^2}}{1-k}=\frac{2}{\sqrt{1-k^2}}.$$

3) 当 $c=\sqrt{1-k^2}$ 时，有

$$S(x)=\frac{2}{c}=\frac{2}{\sqrt{1-k^2}}.$$

综上可知,$f(z)$有最大特征估计 $D<\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}$.

3 结束语

若 $h(x)=x+\frac{k}{\pi}\sin \pi x, 0<k<1$,则对任意 $x\in\mathbf{R}, t>0$,由拉格朗日中值定理和 $1-k\leqslant h'(x)\leqslant 1+k$ 可知,$\frac{h(x+t)-h(x)}{h(x)-h(x-t)}=\frac{h'(\xi)}{h'(\eta)}, \xi\in(x,x+t), \eta\in(x-t,x)$. 即 $h(x)$是 $\rho=\frac{1+k}{1-k}$拟对称函数. 因此,$h(x)$可作 Beurling-Ahlfors 延拓. 很容易计算,$\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}<2\rho-1$,$\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}<\rho^{3/2}$. 由此可知,这类调和拟共形延拓优于 Beurling-Ahlfors 延拓.

参考文献:

[1] BEURLING A, AHLFORS L. The boundary correspondence under quasiconformal mappings[J]. Acta Mathematica, 1956, 96(1): 125-142.

[2] LEHTINEN M. Remarks on the maximal dilation of Beurling-Ahlfors extension[J]. Ann Acad Sci Fenn AI Math, 1984(9): 133-139.

[3] DOUADY A, EARLE C J. Conformally natural extension of homeomorphisms of the circle[J]. Acta Mathematica, 1986, 157(1): 23-48.

[4] REICH E. A quasiconformal extension using parametric representation[J]. Journal d Analyse Mathématique, 1990, 54(1): 246-258.

[5] PAVLOVIC M. Boundary correspondence under harmonic quasiconformal homeomorphisms of the unit disks[J]. Ann Acad Sci Fenn Math, 2002, 27(2): 365-372.

[6] KALAJ D, PAVLOVIC M. Boundary correspondence under quasiconformal harmonic diffeomorphisms of a half-plane[J]. Ann Acad Sci Fenn Math, 2005, 30(1): 159-165.

[7] LEWY H. On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings[J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1936, 42(10): 689-692.

[8] DUREN P. Harmonic mappingd in the plane[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004: 479, 481-506.

[9] CLUNIE J, SHELL-SMALL T, CLUNIE J. Harmonic univalent functions[J]. Ann Acad Sci Fenn Ser A I Math, 1984(9): 3-25.

[10] GARNETT J B. Bounded analytic function[M]. New York: Academic Press, 1981: 1-406.

[11] 林珍连. 某些调和单叶函数的稳定性及系数估计[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2009, 30(6): 718-719.

Dilatation Estimate for Some Kinds of Harmonic Quasiconformal Mappings of the Half Plane Onto Itself

LIN Zhenlian

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: In this paper, the harmonic quasiconformal extension expressions for upper half plane onto itself with boundary correspondence $h(x)=x+\frac{k}{\pi}\sin \pi x$, $0\leqslant k<1$ and their dilatations estimates are given, which shows that it is better than Beurling-Ahlfors extension.

Keywords: maximal dilatation; quasiconformal extension; harmonic quasiconformal mapping; Hilbert transformation

(**责任编辑:** 黄晓楠 **英文审校:** 黄心中)