第 37 卷　第 1 期
2016 年 1 月

华 侨 大 学 学 报（自 然 科 学 版）
Journal of Huaqiao University (Natural Science)

Vol. 37　No. 1
Jan.　2016

文章编号: 1000-5013(2016)01-0120-05　　**doi:** 10.11830/ISSN.1000-5013.2016.01.0120

某类调和函数的单叶半径和 Landau 定理

黄心中，黄赟

(华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021)

摘要:　研究单位圆盘 D 上解析部分 $h(z)$ 满足 $\mathrm{Re}(\{1+z\dfrac{h''(z)}{h'(z)}\}>c(-\dfrac{1}{2}<c\leqslant 0)$ 的调和函数 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 的单叶性问题，对其复伸张 $w(z)$ 为 z^n 及 $|w(z)|<1$ 的情况，分别给出 $f(z)$ 的稳定近于凸半径和单叶半径估计. 并在同时满足其他条件的情况下，给出单叶区域在调和函数作用下值域最大覆盖圆半径的估计，推广了 Chen 等的结果.

关键词:　调和函数；稳定近于凸；单叶半径；Landau 定理

中图分类号:　O 174.51；O 174.55　　　**文献标志码:**　A

1　预备知识

对平面区域 $\Omega\subset C$ 上的二阶连续可导复值函数 $f(z)=u(z)+\mathrm{i}v(z)(z=x+\mathrm{i}y\in\Omega)$，若满足 $\Delta f=4f_{z\bar{z}}=0$，则称 f 是调和的. 其中，$f_z=\dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial f}{\partial x}-\mathrm{i}\dfrac{\partial f}{\partial y})$，$f_{\bar{z}}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial f}{\partial x}+\mathrm{i}\dfrac{\partial f}{\partial y})$. 若 f 为单位圆盘 D 上的调和函数，$f(0)=f_z(0)-1=0$，则 $f(z)$ 可用解析函数 $h(z)$ 和 $g(z)$ 表示，$f(z)=h(z)+\overline{g(z)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nz^n+\overline{\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_nz^n}$. 其中，$a_1=1$. $f(z)$ 是保向且局部单叶的，当且仅当 Jacobi 为 $J_f=|f_z|^2-|f_{\bar{z}}|^2>0$，$z\in D$，即其复伸张 $|w(z)|=|\dfrac{g'(z)}{h'(z)}|<1$. 当 $|w(z)|\leqslant k<1$ 在单位圆盘上成立，则称保向同胚映照 $f(z)$ 为 K-拟正则映照，记为 $\mathrm{Har}_K(D)$，其中，$K=\dfrac{1+k}{1-k}>1$. 对于 $f(z)\in\mathrm{Har}_K(D)$，同时保持单叶性，则称 $f(z)$ 为 K-拟共形映照. $C_H(D)$ 表示所有单位圆盘上的单叶保向近于凸调和函数. Bshouty 等[1]给出了这类函数的性质. Mocanu[2]猜想单位圆盘上的调和函数族 $M(f)=\{f(z)=h(z)+\overline{g(z)},g'(z)=zh'(z),\mathrm{Re}\{1+z\times\dfrac{h''(z)}{h'(z)}\}>-\dfrac{1}{2}\}$ 是单叶的. 文献[1]利用解析函数近于凸判定定理和稳定近于凸的充要条件，证明 $M(f)$ 中的调和函数 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 不仅单叶，而且近于凸. Bshouty 等[3]还提出问题，当 $g'(z)=z^2h'(z)$ 时，调和函数 f 的单叶性情况如何.

定理 A[4]　设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 是单位圆盘 D 上的调和函数，$h'(0)\neq 0$，满足 $\mathrm{Re}\{1+z\dfrac{h''(z)}{h'(z)}\}>c$. 其中，$-\dfrac{1}{2}<c\leqslant 0$，$z\in D$. 当 $w(z)=z^2$ 时，调和函数 $f(z)$ 的稳定近于凸半径 $r\geqslant\sqrt{\dfrac{1+2c}{5+2c}}$.

定理 B　设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 为单位圆盘 D 上的调和函数，h 可以标准化为 $h(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots$，满足 $\mathrm{Re}\{1+z\dfrac{h''(z)}{h'(z)}\}>c$，其中，$-\dfrac{1}{2}<c\leqslant 0$，$z\in D$. 则有系数估计

收稿日期:　2015-08-23

通信作者:　黄心中(1957-)，男，教授，博士，主要从事函数论的研究. E-mail: huangxz@hqu.edu.cn.

基金项目:　国家自然科学基金资助项目(11471128)；福建省自然科学基金资助项目(2014J01013)

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ |a_n| \leqslant \prod_{i=1}^{n-1}\left(1-\dfrac{2c}{i+1}\right), \quad n \geqslant 2. \end{cases}$$

调和函数稳定近于凸性质和单叶半径的研究受到许多学者的关注，且有不少进展[5-7]. 文中对复伸张 $w(z)=z^n$ 时，利用解析函数近于凸判定定理和稳定近于凸的充要条件，对 $f(z)$ 的稳定近于凸半径做出估计；当 $|w(z)|<1$ 时，利用单叶解析函数的凸半径估计，进而估计 $f(z)$ 的单叶半径.

Landau 定理和 Bloch 常数是复分析理论中的重要课题，近年来人们在函数类间建立联系，试图利用解析函数的 Landau 定理推广到调和函数的情形[8-10].

定理 C　f 在单位圆盘 D 上解析，若 $f(0)=0, f'(0)=\alpha$，当 $z\in D$，有 $|f(z)|<1$，那么 f 在以原点为圆心的圆盘 D_{r_0} 上单叶，其像域包含以原点为圆心的圆盘 D_{R_0}. 其中，$r_0=\dfrac{\alpha}{1+\sqrt{1-\alpha^2}}>\dfrac{\alpha}{2}, R_0=r_0^2$.

Chen 等[8]利用调和函数解析部分的性质和 Schwarz 引理，得到了调和函数的 Landau 定理 D.

定理 D　f 是 D 上的保向调和函数，$f(0)=0, f'(0)=\alpha$，当 $z\in D$，有 $|f(z)|<1$，那么 f 在包含原点的区域上单叶，其像域包含以原点为圆心的圆盘 D_{R_0}，$R_0=kr'^2\left(1-\dfrac{r'}{2}\right)$. 其中，$k=\dfrac{2\log 3}{\pi}$，$r'=\dfrac{\alpha}{2k+\sqrt{4k^2-\alpha^2}}$.

利用定理 B 中的系数估计，给出满足其条件的函数类的 Landau 定理，同时对定理 D 的证明过程进行改进，得到了更佳的结果.

2　主要结果及证明

将定理 A 进一步推广到复伸张为 $w(z)=z^n$ 的情形，得到定理 1.

定理 1　设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 是定义在单位圆盘 D 上的调和函数，这里 $h'(0)\neq 0$，满足

$$\mathrm{Re}\left\{1+z\frac{h''(z)}{h'(z)}\right\}>c, \qquad -\frac{1}{2}<c\leqslant 0, \quad z\in D.$$

当 $w(z)=z^n$ 时，调和函数 $f(z)$ 的稳定近于凸半径 $r\geqslant\sqrt[n]{\dfrac{1+2c}{2c+2n+1}}$.

证明　考虑解析函数 $F(z)=h(z)-\lambda g(z)$，其中 $|\lambda|=1$，那么

$$F'(z)=(1-\lambda z^n)h'(z), \qquad F''(z)=(1-\lambda z^n)h''(z)+(-n\lambda z^{n-1})h'(z).$$

显然，在 D 上 $F'(z)\neq 0$，故 $\mathrm{Re}\left\{1+z\dfrac{F''(z)}{F'(z)}\right\}=\mathrm{Re}\left\{1+z\dfrac{h''(z)}{h'(z)}\right\}+\mathrm{Re}\left\{\dfrac{n\lambda z^n}{\lambda z^n-1}\right\}$. 其中，$\mathrm{Re}\left\{\dfrac{n\lambda z^n}{\lambda z^n-1}\right\}=-\mathrm{Re}\left\{\dfrac{n\lambda z^n}{1-\lambda z^n}\right\}\geqslant-\left|\dfrac{n\lambda z^n}{1-\lambda z^n}\right|\geqslant-\dfrac{|n\lambda z^n|}{1-|\lambda z^n|}=-\dfrac{nr^n}{1-r^n}$.

当 $|z|=r<\sqrt[n]{\dfrac{1+2c}{2c+2n+1}}$ 时，

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{Re}\left\{1+z\frac{F''(z)}{F'(z)}\right\}\mathrm{d}\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{Re}\left\{1+z\frac{h''(z)}{h'(z)}\right\}\mathrm{d}\theta+\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{Re}\left\{\frac{n\lambda z^n}{\lambda z^n-1}\right\}\mathrm{d}\theta>$$

$$c(\theta_2-\theta_1)-\frac{nr^n}{1-r^n}(\theta_2-\theta_1)\geqslant\left(c-\frac{n\cdot\dfrac{2c+1}{2c+2n+1}}{1-\dfrac{2c+1}{2c+2n+1}}\right)(\theta_2-\theta_1)=$$

$$-\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)\geqslant-\frac{1}{2}\cdot 2\pi=-\pi.$$

其中，$\theta_1<\theta_2<\theta_1+2\pi$.

从而，$f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 至少在 $|z|<\sqrt[n]{\dfrac{1+2c}{2c+2n+1}}$ 内为稳定近于凸的.

解析部分满足相同条件的情况下，复伸张 $w(z)$ 为 n 次多项式时，可以由定理 2 得到调和函数 $f(z)$

的单叶半径估计.

定理 2 设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$是定义在 D 上的调和函数，这里 $h(0)=0$，$h'(0)=1$，满足 $\mathrm{Re}\{1+z\dfrac{h''(z)}{h'(z)}\}>c$. 其中，$-\dfrac{1}{2}<c\leqslant 0, z\in D$. 当 $w(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n|<1$ 时，$f(z)$在 $D_r=\{z||z|<r\}$上单叶，且 $f(D_r)\supset D_R$. 其中，$r\geqslant 2-\sqrt{3}$，$R\geqslant(2-\sqrt{3})(1-\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n|)$.

证明 对于解析函数 $h(z)$，满足 $\mathrm{Re}\{1+z\dfrac{h''(z)}{h'(z)}\}>c$，$0<\theta_1<\theta_2<\theta_1+2\pi$. 有

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{Re}\{1+z\frac{h''(z)}{h'(z)}\}\mathrm{d}\theta>\int_{\theta_1}^{\theta_2}c\mathrm{d}\theta\geqslant-\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)\geqslant-\pi.$$

因此，$h(z)$是近于凸的，故 $h(z)$在 D 上单叶. 显然 $h(z)\in S$，具有最凸半径为 $r_0\geqslant 2-\sqrt{3}$. 以原点为圆心，任取 $\rho\leqslant 2-\sqrt{3}$，$h(z)$在 D_ρ 上单叶，且 $h(D_\rho)$是凸区域.

令 $F(w)=f\circ h^{-1}(w)$，$w\in h(D_\rho)$，$F(0)=0$. 其中，$|\mu_F|=|\dfrac{F_{\bar{w}}}{F_w}|=|\dfrac{f_{\bar{z}}}{f_z}|=|w(z)|\leqslant\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n|=k<1$. 可知 $F(w)$是 $h(D_\rho)$上的 K-拟正则调和函数，其中 $K=\dfrac{1+k}{1-k}$. 对于任意 $w_1,w_2\in h(D_\rho)$，有

$$|F(w_1)-F(w_2)|=|\int_{\overline{w_1w_2}}F_w\mathrm{d}w+F_{\bar{w}}\mathrm{d}\bar{w}|\geqslant|\int_{\overline{w_1w_2}}F_w\mathrm{d}w|-$$
$$|\int_{\overline{w_1w_2}}F_{\bar{w}}\mathrm{d}\bar{w}|\geqslant|w_1-w_2|(1-k).$$

则 $F(w)$在 $h(D_\rho)$上单叶，又 $h(z)$在 D_ρ 上单叶，所以 $f(z)$在 D_ρ 上单叶.

令 $w_2\to 0$，$w_1\to\partial D_\rho$，有 $|F(w)|\geqslant|w|(1-k)=\rho(1-\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n|)$. $|F(h(D_\rho))|$包含一个以原点为圆心，半径至少为 $\rho(1-\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n|)$ 的圆盘，即 $f(D_\rho)$ 包含以原点为圆心，一个半径至少为 $\rho(1-\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n|)$ 的圆盘. 当 $\rho\to 2-\sqrt{3}$时，得到证明.

在定理 B 中得到了解析部分的系数估计表达式，利用这一表达式，对该函数类的 Landau 定理进行描述.

定理 3 设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$是 D 上的调和函数，若其解析部分满足 $\mathrm{Re}\{1+z\dfrac{h''(z)}{h'(z)}\}>c$. 其中，$-\dfrac{1}{2}\leqslant c<0$，$z\in D$，且 $|w(z)|<1$. $f(z)$在以原点为圆心的圆盘上单叶，其像域包含了以原点为圆心的圆盘 D_R，$R=(1-tr')Mr'^2$. 其中，当 $h(z)=z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n\,(n\geqslant 2)$时，$r'=\dfrac{t}{M+\sqrt{M^2-t^2}}$，$M=\dfrac{(1+|c|)^n-1}{|c|}$，$t\to 1^-$.

证明 由条件 $\mathrm{Re}\{1+z\dfrac{h''(z)}{h'(z)}\}>c$，定理 B 系数估计为

$$\begin{cases}a_1=1,\\ |a_n|\leqslant\prod\limits_{i=1}^{n-1}(1-\dfrac{2c}{i+1}).\end{cases}$$

对于 $n=2,3,\cdots$，有 $\log|a_n|\leqslant\log(\prod\limits_{i=1}^{n-1}(1-\dfrac{2c}{i+1}))=\sum\limits_{i=1}^{n-1}\log(1+\dfrac{2|c|}{i+1})<(n-1)\log(1+|c|)=\log(1+|c|)^{n-1}$. 即 $|a_n|\leqslant(1+|c|)^{n-1}$. 显然，当 $n=1$ 时，a_1 也满足这一表达式. 因此，

$$|h(z)|=|z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}(1+|c|)^{n-1}=\frac{(1+|c|)^n-1}{|c|}=M.$$

对于 $|z|<t<1$，令 $H(z)=h(tz)/M$，则 $H(z)$是定义在 D 上的解析函数，并且 $|H(z)|<1$，$H(0)=$

$0, H'(0)=th'(0)/M=t/M<1$. 根据定理 C 可知，$H(z)$ 在 $D_{r'}$ 上单叶，且 $H(D_{r'})\supset D_{R'}$. 其中，$r'=\dfrac{t}{M+\sqrt{M^2-t^2}}$，$R'=r'^2$. 故 $h(z)$ 在 $D_{tr'}$ 上单叶，且 $h(D_{tr'})\supset D_{MR'}$. 由 Schwarz 引理，$|w(z)|=|f_{\bar z}/f_z|\leqslant |z|\leqslant tr'$.

令 $G=h^{-1}(D_{MR'})\subset D_{tr'}$，对任意 $z_1, z_2\in G$，记 $\gamma=h^{-1}(\overline{h(z_1), h(z_2)})$，有

$$|h(z_1)-h(z_2)|=\left|\int_\gamma f_z\mathrm{d}z\right|=\int_\gamma |f_z||\mathrm{d}z|.$$

因此，

$$|f(z_1)-f(z_2)|=\left|\int_\gamma f_z\mathrm{d}z+f_{\bar z}\mathrm{d}\bar z\right|\geqslant\left|\int_\gamma f_z\mathrm{d}z\right|-\left|\int_\gamma f_{\bar z}\mathrm{d}\bar z\right|\geqslant$$
$$|h(z_1)-h(z_2)|-tr'\int_\gamma |f_z||\mathrm{d}z|=(1-tr')|h(z_1)-h(z_2)|.$$

令 $z_1\to\partial D_{tr'}, z_2\to 0$，有 $|f(z)|\geqslant(1-tr')|h(z)|\geqslant(1-tr')MR'=(1-tr')Mr'^2$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$R=(1-tr')Mr'^2$ 是关于 t 的单调递增函数. 因此，当 $t\to 1^-$ 时，R 取得最大值，$R=(1-tr')Mr'^2=M(1-M+\sqrt{M^2-1})(2M^2-1-2M\sqrt{M^2-1})$. 证毕.

定理 D 描述了在单位圆盘上满足条件 $f(0)=0, f_z(0)=\alpha>0, f_{\bar z}(0)=0, |f(z)|<1$ 的保向调和函数的 Landau 定理. 定理 4 将对其证明过程进行改进，得到更佳的结果.

定理 4　设 f 是 D 上的保向调和函数，对 $z\in D$ 满足 $f(0)=0, f_z(0)=\alpha>0, f_{\bar z}(0)=0, |f(z)|<1$. 那么，$f$ 在一个包含原点的区域上单叶，并将该区域映到以原点为圆心，以 $R_0=kr'^2(1-\frac{7}{10}r')$ 为半径的圆盘. 其中，$k=\dfrac{2}{\pi}\log\dfrac{17}{3}$，$r'=\dfrac{7\alpha}{10k+\sqrt{100k^2-49\alpha^2}}$.

证明　由于 f 是 D 上的保向调和函数，且 $f_{\bar z}(0)=0$，由 Schwarz 引理，有

$$|f_{\bar z}(z)|\leqslant|z|\cdot|f_z(z)|,\qquad z\in D.$$

当 $|z'|<t=7/10$ 时，

$$|h(z)|\leqslant\left|\int_{\overline{oz'}}f_z(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant\int_{\overline{oz'}}|f_z(z)||\mathrm{d}z|\leqslant\int_{\overline{oz'}}\Lambda_f(z)|\mathrm{d}z|\leqslant$$
$$\frac{4}{\pi}\int_0^{|z'|}\frac{\mathrm{d}r}{1-r^2}=\frac{2}{\pi}\log\frac{1+|z'|}{1-|z'|}<\frac{2}{\pi}\log\frac{17}{3}=k.$$

令 $\tilde h(z)=(1/k)h(tz)$ 是定义在 D 上的解析函数，且满足 $\tilde h(0)=0, \tilde h'(0)=7\alpha/(10k)>0, |\tilde h(z)|<1$. 由解析函数的 Landau 定理，$|h(z)|$ 在 $D_{r'}$ 内单叶，$h(D_{r'})\supset D_{R'}$. 其中，$r'=\dfrac{\frac{7\alpha}{10k}}{1+\sqrt{1-(\frac{7\alpha}{10k})^2}}=\dfrac{7\alpha}{10k+\sqrt{100k^2-49\alpha^2}}$，$R'=r'^2$. 因此，可以得到 $h(z)$ 在 $D_{\frac{7}{10}r'}$ 上单叶，$f(D_{\frac{7}{10}r'})\supset D_{kR'}$.

令 $\Delta=h^{-1}_{D_{\frac{7}{10}r'}}(D_{kR'})\subset D_{\frac{7}{10}r'}$，对于任意的 $z_1, z_2\in\Delta$，记 $\gamma=h^{-1}(\overline{h(z_1), h(z_2)})$，有

$$|h(z_1)-h(z_2)|=\left|\int_\gamma f_z(z)\mathrm{d}z\right|=\int_\gamma|f_z(z)||\mathrm{d}z|.$$

因此，

$$|f(z_1)-f(z_2)|=\left|\int_\gamma f_z\mathrm{d}z+f_{\bar z}\mathrm{d}\bar z\right|\geqslant\left|\int_\gamma f_z\mathrm{d}z\right|-\left|\int_\gamma f_{\bar z}\mathrm{d}\bar z\right|\geqslant$$
$$|h(z_1)-h(z_2)|-tr'\int_\gamma|f_z||\mathrm{d}z|=(1-\frac{7}{10}r')|h(z_1)-h(z_2)|.$$

令 $z_1\to\partial D_{tr'}, z_2\to 0$，有

$$|f(z)|\geqslant(1-\frac{7}{10}r')|h(z)|\geqslant(1-\frac{7}{10}r')kR'=(1-\frac{7}{10}r')kr'^2.$$

其中，$k=\dfrac{2}{\pi}\log\dfrac{17}{3}$，$r'=\dfrac{7\alpha}{10k+\sqrt{100k^2-49\alpha^2}}$.

这一结果改进了文献[8]的定理3.在 $t=0.7$ 和 $t=0.5$ 的情况下,单叶区域在满足条件的 f 作用下,覆盖圆的最大半径 R_0 的变化,如图1所示.R_0 的取值随着调和函数 f 的解析部分 $h(z)$ 的一次项系数 α 的取值而变化,如图2所示.

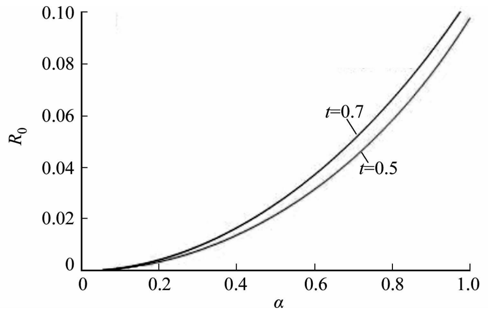

图1　R_0 随 t 变化曲线

Fig. 1　Curves of R_0 with different values of t

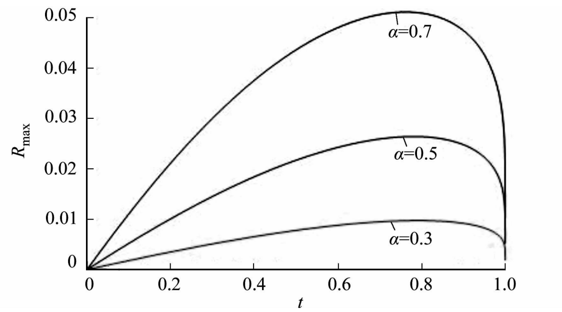

图2　R_0 随 α 变化曲线

Fig. 2　Curves of R_0 with different values of α

由图2可知:当 $\alpha=1$ 时,单叶区域在 f 作用下的值域覆盖的圆半径达到最大,约为0.106.

参考文献:

[1] BSHOUTY D,LYZZAIK A. Close-to-convexity criteria for planar harmonic mappings [J]. Complex Analysis and Operator Theory,2011,5(3):767-774.

[2] MOCANU P T. Injectivity conditions in the complex plane[J]. Complex Anal Oper Theory,2011,5(3):759-766.

[3] BSHOUTY D,LYZZAIK A. Problems and conjectures in planar harmonic mappings[J]. J Analysis,2010,18:69-81.

[4] 黄赟,黄心中.某些近于凸调和函数的解析性质和系数估计[J].华侨大学学报(自然科学版),2015,36(4):478-483.

[5] HERNÁNDEZ R,MARTÍN M T. Stable geometric properties of analytic and harmonic functions[J]. Math Proc Camb Phil Soc,2013,155(2):343-359.

[6] 石擎天,黄心中.调和映照与其剪切函数的单叶性[J].华侨大学学报(自然科学版),2013,34(3):334-338.

[7] 王其文,黄心中.在微分算子作用下调和函数的单叶半径估计[J].华侨大学学报(自然科学版),2014,35(2):227-231.

[8] CHEN Huaihui,GAUTHIER P M. The landau theorem and bloch theorem for planar harmonic and pluriharmonic mappings[J]. Proceeding of the American Mathematical Society,2011,139(2):583-595.

[9] 李东征,陈行堤.调和函数的Landau定理[J].华侨大学学报(自然科学版),2012,33(5):584-289.

[10] 李东征,陈行堤.调和函数的Bloch定理[J].华侨大学学报(自然科学版),2012,33(1):103-106.

On the Univalent Radius and Landau Theorem for Some Harmonic Mappings

HUANG Xinzhong, HUANG Yun

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: To the harmonic mappings $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ with their analytic parts $h(z)$ have the property of $\mathrm{Re}(\{1+z\frac{h''(z)}{h'(z)}\})>c\ (-\frac{1}{2}<c\leqslant 0)$ on a unit disk D, if the dilatation function $w(z)=z^n$ or $|w(z)|<1$, the stable close-to-convex radius and the univalent radius estimates are obtained respectively. Moreover, we also consider Landau theorem for harmonic functions with some other conditions, our results improve the one made by Chen.

Keywords: harmonic mapping; stable close-to-convex; univalent radius; Landau theorem

(责任编辑:黄晓楠　　英文审校:黄心中)