

# Bandelet 变换及其逼近特性分析

黄 永

(昭通学院 数学与统计学院, 云南 昭通 657000)

**摘要:** 首先,从几何流和地平线模型出发,分析流积分及其扫描带内的边缘表达;其次,抑制离散二元小波基函数的不足,构建 Bandelet 变换的标准正交基;最后,对 Bandelet 变换在扫描带内的逼近特性进行分析,构建估计边缘和真实边缘的逼近误差计算公式.结果表明:文中方法在图像边缘表达上可以得到最优框架.

**关键词:** Bandelet 变换;基函数;逼近特性;估计边缘

**中图分类号:** TN 919.81

**文献标志码:** A

Bandelet 变换经历了两代变换理论的发展,其主要应用领域都是图像稀疏表达和图像压缩<sup>[1-4]</sup>.其中,Pennec 对于第一代 Bandelet 变换做出了重要贡献,他不仅参与提出第一代 Bandelet 变换理论,还进一步对 Bandelet 变换进行完善和发展,大大提升其在实际中的应用性<sup>[5]</sup>.Bandelet 变换的最大优势在于,它弥补了小波变换各向异性特征表达的缺陷,更利于图像的稀疏表达和稀疏编码<sup>[6]</sup>.第一代 Bandelet 变换技术是建立在小波变换的理论之上,从连续到离散进行推理和演进,进而依托几何流概念构建 Bandelet 变换基函数,从而推动离散 Bandelet 变换算法、连续 Bandelet 变换算法、快速 Bandelet 变换算法的发展<sup>[7-10]</sup>.本文从 Bandelet 变换原理出发,进而对 Bandelet 变换的带内逼近特性、全局逼近特性展开分析.

## 1 Bandelet 变换的基本原理

Bandelet 变换是以处理图像压缩、图像编码、图像稀疏表达为出发点建立的.

假定正则几何图像用  $g(x, y)$  表示,几何流是图像中用于表达  $g(x, y)$  正则变化方向的特征,可以用  $v(x, y)$  表示.进一步将分析范围限定在水平线模型条件下,模型中的边缘定义为  $H$ ,则几何流  $\bar{v}(x, y)$  可以进一步表示为

$$\bar{v}(x_1, x_2) = \bar{v}(x) = (1, h'(x)). \quad (1)$$

式(1)中:  $|h'(x)| \leq 2$ ;  $h(x)$  也称为流线积分,它满足  $h(x) = \int_0^x h'(t) dt$ ,在  $(x_1, x_2)$  这一点的切线方向,即几何流  $\bar{v}(x_1, x_2)$  的方向,可以定义为  $z = h(x) + K$ .如果用  $h(x)$  平移扫描分析区域,可以得到带状区域  $C$ ,这个带状区域内保证  $H$  全部置于其中,其数学表示为

$$C = \{(x, y) \mid x \in [a, b], y \in [h(x) + c, h(x) + d]\}. \quad (2)$$

对  $g(x, y)$  作一个变换,即  $x = u, y = v + g(u)$ ,分析 Bandelet 变换基函数的构建.用  $\theta(t)$  表示一维的小波函数,用  $\vartheta(t)$  表示这个小波函数对应的尺度函数,分别记为

$$\theta_{j,m}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \theta\left(\frac{t - 2^j m}{2^j}\right), \quad \vartheta_{j,m}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \vartheta\left(\frac{t - 2^j m}{2^j}\right). \quad (3)$$

由此构建二元小波基函数为

**收稿日期:** 2015-11-13

**通信作者:** 黄永(1966-),女,副教授,主要从事 Bandelet 变换逼近特性的研究. E-mail: 3281578930@qq.com.

**基金项目:** 云南省教育厅科学研究基金资助项目(2014Y499)

$$\left\{ \begin{array}{cc} \theta_{j,m}(u)\vartheta_{j,n}(v) & \\ \theta_{j,m}(u)\vartheta_{j,n}(v) & \theta_{j,m}(u)\theta_{j,n}(v) \end{array} \right\}. \quad (4)$$

通过反解,可以获得带状区域  $C$  上的标准正交基,即

$$\left\{ \begin{array}{cc} \theta_{j,m}(x)\vartheta_{j,n}(y-h(x)) & \\ \theta_{j,m}(x)\vartheta_{j,n}(y-h(x)) & \theta_{j,m}(x)\theta_{j,n}(y-h(x)) \end{array} \right\}. \quad (5)$$

## 2 Bandedet 变换的带内逼近特性分析

假设  $J(x, y)$  表示一个模糊核,对这个模糊核执行伸缩变换处理,其数学形式为

$$J(x, y) = r^{-2} J_1\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right). \quad (6)$$

$J_1$  在集合  $[-1, 1]^2$  上得到支撑,则同时存在

$$\left. \begin{array}{l} \|J_1\|_1 = \|J\|_1, \\ \|J\|_{D^\beta} = r^{-(2+\beta)} \Leftrightarrow \|J_1\|_{D^\beta} = 1. \end{array} \right\} \quad (7)$$

模糊核  $J(x, y)$  可以对图像边缘施加处理,这个处理的范围呈现为一个带状区域,用  $A_r$  表示.  $A_r$  区域内的点到达边缘的距离  $E$  符合如下关系,即

$$A_r = \{(x, y) \mid e((x, y), E) \leq r\}. \quad (8)$$

针对 Bandedet 变换在  $A_r$  区域内的逼近特性展开分析.

Bandedet 变换的原理始于几何流,相应的基函数的构造也出于同源.因此,分析 Bandedet 变换的带内逼近特性,需要从几何流的逼近特性开始.对于几何流的逼近效果而言,要使其达到最佳,必须尽可能地减少控制参量的个数<sup>[11]</sup>.

假设  $A_r$  可以在  $x$  轴上获得投影,且投影区间位于  $[a, b]$ ,可以计算出区间长度为  $d_1 = b - a$ .基于此,对于几何流的逼近,可以使用尺度  $2^k$  下的一族正交函数,如  $\{f_{k,m}(t) \mid d \leq m \leq d_1 2^{-k}\}$ .在这簇正交函数中,支撑集合包含在  $[a, b]$  内的函数可以用  $f(2^{-k}t - m)$  描述,满足

$$h(t) = \sum_{m=1}^{d_1 2^{-k}} \beta_m f_{k,m}(t). \quad (9)$$

如果  $\{f_{k,m}(t) \mid d \leq m \leq d_1 2^{-k}\}$  的空间  $W_k$  中含有  $q$  阶次的多项式,则  $f(t)$  是紧支撑  $q$  阶次的可微函数.基于此,式(9)中的  $h(t)$  受控于尺度大小  $2^k$  和  $(b-a)2^{-k}$  个系数  $\{\beta_m\}$ .又因为  $|h'(x)| \leq 2$ ,忽略常数的影响,再做一假设  $h(a) = 0$ ,存在  $|h(x)| \leq 2d_1$ ,且存在一个常数  $C_f$ ,这个常数仅和尺度函数  $f(t)$  存在关联,且这个常数使不等式  $|\beta_m| \leq C_f(b-a)$  成立.

假设边缘的精确特征用  $E(x)$  表示,而边缘特征的估计值则用  $\tilde{E}(x)$  表示.因为模糊核  $J(x, y)$  的存在,且此时  $J(x, y)$  是未知的,则  $\tilde{E}(x)$  在逼近真实值时存在一定的误差,这个误差符合  $\|\tilde{E} - E\|_\infty \leq C_E r$ .其中:参数  $C_E$  受到计算过程中计算精度的制约.

根据  $\tilde{E}(x)$  在空间  $W_k$  上的投影求取流积分,即

$$h(x) = Q_{W_k} \tilde{E}(x) = \sum_{m=1}^{d_1 2^{-k}} \beta_m f_{k,m}(x), \quad (10)$$

$$\beta_m = \langle \tilde{E}(x), f_{k,m} \rangle \|f_{k,m}\|^{-2}. \quad (11)$$

式(10), (11)中:参数  $C_E$  和尺度  $2^k$  如果小到一定程度,流线积分  $h(x)$  和边缘的精确特征  $E(x)$  之间的误差就会控制地非常小.

正是因为流积分的存在,才能根据一维小波函数  $\theta(t)$  构造 Bandedet 变换的基函数.为了简化 Bandedet 变换基函数的表达,将  $\theta_{j,m}(x)\theta_{j,n}(y-h(x))$  用  $\{c_m\}$  替代.那么,可以描述 Bandedet 变换基函数对几何图像  $g$  的稀疏的表达式为

$$g_N = \sum_{|\langle g, c_m \rangle| > T} \langle f, c_m \rangle c_m. \quad (12)$$

至此,根据 Bandedet 变换对图像的稀疏表达可知,整个表达需要  $N = N_h + N_c$  个参数.其中:  $N_h$  表

示流积分所用的参数;  $N_c$  表示实现图像逼近所需的参数.

最后,对 Bandedet 变换的逼近能力,给出如下结论.

当  $g$  是可以在  $[0,1]^2$  上用  $\beta$  阶次地平线模型,  $\tilde{E}(x)$  表达了对边缘精确特征  $E(x)$  的逼近,且二者之间形成的逼近误差为  $\|\tilde{E}-E\|_{\infty} \leq C_E r$ . 存在常数  $K$ , 对于可能的阈值  $T$ , 使用流积分  $h(x)$  界定的 Bandedet 变换基函数在尺度  $2^k = \max\{\|c\|_{K^{\beta/\beta}}, 1\} \max\{r, T^{2\beta/(\beta+1)}\}^{1/\beta}$  下的逼近误差可以描述为

$$\|g - g_N\| \leq KK_g^2 d_1^{\beta+1} N^{-\beta}. \quad (13)$$

式(13)中:  $K_g = \max\{K_1, K_2, K_3\}$ ;  $K_1 = \|\tilde{g}\|_{K^{\beta}} \max\{\|E\|_{K^{\beta}}, 1\} \max\{\|E\|_{K^{\beta}}, K_e, 1\}$ ;  $K_2 = \|\tilde{g}\|_{K^1}^{\beta+1}$ ;  $K_3 = \max\{\|E\|_{K^{\beta+\frac{1}{2}\beta}}, 1\}$ .

除了得到 Bandedet 变换逼近特性的确定性误差计算公式外,还可以得到一个结论:对于  $\beta$  阶次地平线模型, Bandedet 变换在一个 Bandedet 带内,可以达到最佳的逼近特性.

### 3 Bandedet 逼近特性在图像分割中的应用

#### 3.1 Bandedet 正交基框架

Bandedet 变换起源于对图像信息的压缩编码等处理,进而又可以进一步为图像处理技术服务,在图像分割方面有比较理想的应用效果<sup>[12]</sup>.

在 Bandedet 变换理论中, Bandedet 变换正是由图像中各个边缘特征附带的几何流思想引申出来的. 这些边缘特征信息附带的几何流,可以被用于自适应地跟踪图像之中可能存在的几何正则方向. 正常情况下,几何流信息和图像边缘特征的走向是保持一致的. 图像中边缘特征,如果放大到局部的任意一个点上,可以被区分为两种情况:沿着水平方向排布的边缘;沿着垂直方向排布的边缘.

根据这样的边缘特征可能排布方向,图像在二进制表达的过程中,图像的全部区域  $\Theta$  可以形成一个细分的结果,其数学形式为  $\Theta \cup \Theta_i$ . 其中:  $\Theta_i$  表征每一个被细分的图像区域. 这种细分工作做到非常细致的程度时,每一个  $\Theta_i$  内最多只保留一条边缘特征线. 图像的分割情况,如图 1 所示. 图 1 中:黑色的粗线为图像中的边缘特征;虚线框为分割出的区域. 最终分割出的区域可分为如下 4 种主要类型:

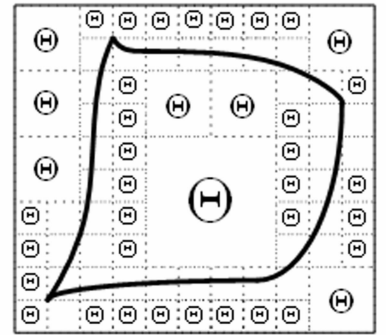


图 1 图像的分割

Fig. 1 Image segmentation

- 1) 区域内含有边缘特征信息,且边缘特征的方向是水平的;
- 2) 区域内含有边缘特征信息,且边缘特征的方向是垂直的;
- 3) 区域内含有边缘特征信息,恰好是两个方向走势的边缘特征不同走向,并形成相交;
- 4) 区域内不含有任何边缘特征信息.

进一步定义一个正交投影的计算子,其数学表达式为

$$Q_{Ag}(x, y) = \begin{cases} g(x, y), & (x, y) \in \Lambda, \\ 0, & (x, y) \notin \Lambda. \end{cases} \quad (14)$$

式(14)中:  $Q_{Ag}(x, y)$  为这个正交投影的计算子;  $\Lambda$  为正交投影计算子的空间.

进一步可以得出,在图像分割形成后的每一个区域上的正交投影计算子,可以合并成  $L^2([0,1]^2)$  上的一个完整的框架,这个框架就是 Bandedet 正交基框架.

#### 3.2 Bandedet 字典和分割寻优

实际上,构建 Bandedet 框架的意义在于,将要分析的图像按照支撑空间划分成细小的区域. 这样每一个细小的区域上可以采用几何流特征执行 Bandedet 逼近处理或者小波逼近处理. 这个分割处理的过程相当于执行二进制分割的策略. 首先,第一个层次上图像被划分成完全相等的 4 个小子块图像,可以采用二叉树的方法对这个分割结果进行表示. 然后,每一个子块的图像又可以根据是否含有特征信息的具体情况进一步执行二进制细分处理.

采用一个具体的图形说明这一分割过程,如图 2 所示. 由图 2 可知:原始图像已经被划分为多个子块图像,分别是子块图像 A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M. 这是一个多次二进制分割的结果,原始图

像经过三级分割,子块图像 M,L 属于第一级分割结果;左上角第一层级分割图像又被分为 4 个子块图像,即子块图像 E,F,G,H;右下角第一层级分割图像又被分成 4 个子块图像,即子块图像 I,J,K,以及最右下角的子块图像,它又被进一步细分成 4 个三级子块图像,即子块图像 A,B,C,D.

根据 Bandedet 变换构建的原始图像四叉树表达,如图 3 所示.由图 3 可知:子块图像 L,M 成为第二级四叉树节点;子块图像 E,F,G,H,I,J,K 成为第三级四叉树节点;子块图像 A,B,C,D 成为第四级四叉树节点.当然,子块图像 L,M,E,F,G,H,I,J,K,A,B,C,D 也都最终成为叶子节点.

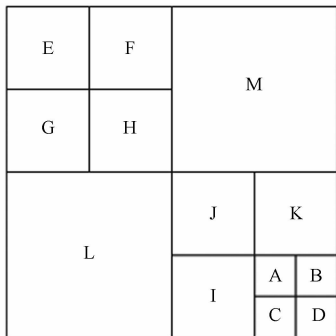


图 2 基于 Bandedet 变换的图像二进制分割处理

Fig. 2 Binary image segmentation based on Bandedet transform

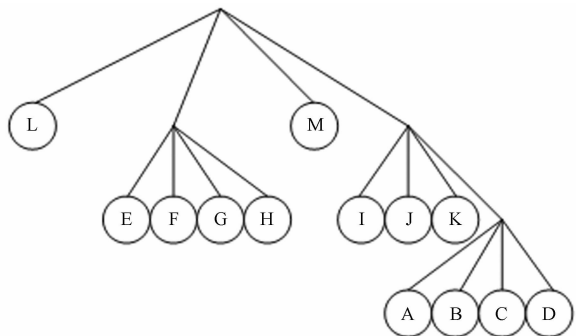


图 3 基于 Bandedet 变换的图像四叉树构建

Fig. 3 Image 4-fork tree construction based on Bandedet transform

图 2 所示的图像分块结果和图 3 所示的四叉树结果是一一对应的.如果将原始图像的整体宽度设置为 1 时,则对应宽度为  $2^{-k}$  的图像子块相当于在 Bandedet 四叉树中具有节点深度为  $|k|$ .

在图 1 中:每一个用  $\Theta_i$  标记的小图像方块,都可以采用一个参量表达这个小图像方块上的基函数是小波基函数,还是 Bandedet 基函数.如果其中的基函数是 Bandedet 基函数的类型,还需要进一步对 Bandedet 基函数构建模型的类别进行区分,即区分是水平方向上的基函数构建模型,还是垂直方向上的基函数的构建模型.

如前文所述,因为基函数模型需要借助流积分进行构造,因此,需要对在尺度  $2^{k_i}$  之下的流积分进一步明确表达,即

$$h(t) = \sum_{n=1}^{2^{-k_i}} \beta_n \vartheta_{k,n}(t). \quad (15)$$

原始图像分割后形成的所有子块图像,其上的 Bandedet 基函数或小波基函数所构建的完整集合,可以形成一个可用于 Bandedet 分析的逼近框架.即

$$F_C = \sum \langle F, B \rangle. \quad (16)$$

式(16)中: $F$  为一个子块图像上 Bandedet 基函数构成的框架; $B$  为这个子块图像上的 Bandedet 基函数; $F_C$  为全部子块图像形成的逼近框架, $C$  为框架中所含有的全部参数的个数, $C = C_S + C_H + C_B$ ,  $C_S$  为原始图像二进制分割所需要的参量个数,  $C_H$  为原始图像几何流表达所需要的参量个数,  $C_B$  为原始图像 Bandedet 表达所需要的参量个数.

至此,要获得图像分割最优结果的过程,就变成对式(16)的框架进行寻优的过程.如果原始图像的分辨率可以限制在  $T^2$  之内,按照 Lagrange 方法对  $C$  计算式执行寻优过程,那么,原始图像四叉树的最大深度可以表示为  $\| |\log_2 T^2| - 1 \|$ .此时,如果将流积分参数  $\beta_n$  执行量化处理,则对于尺寸为  $2^k$  的子图像块而言,在  $|\beta_n| < C_\theta 2^k$  的情况下,可以得到原始图像 Bandedet 字典表示的最优框架.

## 4 结束语

对 Bandedet 变换的基本原理及逼近特性展开研究.依托几何流和地平线模型分析 Bandedet 变换的基础流积分,在二元小波变换的理论基础之上,构建 Bandedet 变换的标准正交基.对 Bandedet 变换逼近特性进行分析,并利用这种性质实现图像边缘逼近的 Bandedet 最优框架.

参考文献：

[1] SHANTHI I,VALARMATHI M L. SAR image despeckling using possibilistic fuzzy C-means clustering and edge detection in bandelet domain[J]. Neural Computing and Applications,2013,23(1):279-291.

[2] 杨杨,戴明,周笋鱼,等. 基于非下采样 Bandelet 变换的多聚焦图像融合[J]. 吉林大学学报(工学版),2014,44(2): 525-530.

[3] PANDIAN K,SOUNDARA K,KUMAR E,et al. Reconstruction of missing data in VHR images using Bandelet and exemplar based inpainting strategies[C]//3rd International Conference on Computer Technology and Development. Chengdu:[s. n. ],2011:25-27.

[4] MAALOUF A,LARABI M C. Bandelet based stereo image coding[C]// International Conference of Acoustics, Speech, and Signal Processing. Dallas:IEEE Press,2010:698-701.

[5] MAALOUF A,LARABI M C. Image retargeting using a Bandelet-based similarity measure[C]// International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Dallas:IEEE Press,2010:942-945.

[6] JANSEN M,CHOI H,LAVU S,et al. Multiscale image processing using normal triangulated meshes[C]// International Conference on Image Processing. Thessaloniki:IEEE Press,2001:229-232.

[7] WAKIN M,ROMBERG J,CHOI H,et al. Rate distortion optimized image compression using wedgelets[C]// International Conference on Image Processing. Newyork:IEEE Press,2002:237-240.

[8] CANDES E,DONOHOO D. New tight frames of curvelets and optimal representations of objects with piecewise C2 singularities[J]. Pure Application of Math,2004,57(4):219-266.

[9] 潘晓明,余俊,杨钊,等. 一种将线性粘弹微分型本构方程应用到 ABAQUS 的方法[J]. 华侨大学学报(自然科学版),2010,31(5):570-575.

[10] ARTEAGA J A,VELASCO M J. Design of image codec based on Bandelet transform using a NIOS II processor [J]. Ingeniare Revista Chilena De Ingenieria,2012,20(2):211-219.

[11] 綦科,谢冬青. 基于第二代 Bandelet 变换的抗几何攻击图像水印[J]. 自动化学报,2012,38(10):1646-1653.

[12] 刘绪崇,罗永,王建新,等. 基于第二代 Bandelet 变换的图像认证水印算法[J]. 通信学报,2010,31(12):123-129.

Bandelet Transform and Analysis of Its Approximation Characteristics

HUANG Yong

(College of Mathematics and Statistics, Zhaotong University, Zhaotong 657000, China)

**Abstract:** Firstly, the flow integral and the edge expression in the scanning band are analyzed from the geometric flow and the horizon model. Secondly, the standard orthogonal basis of Bandelet transform is built by considering the problem of the suppression for the discrete wavelet basis functions. Finally, we analyze the approximation property of the Bandelet transform in the scanning band, and construct the approximate error formula for the estimating edge and the real edge. Results show that the optimal frame can be obtained by the image edge expression.

**Keywords:** Bandelet transform; basis function; approximation property; estimated edge

(责任编辑：钱筠      英文审校：吴逢铁)