

双自由度串联机械手的输入转矩优化

张安民<sup>1</sup>, 赵武<sup>2</sup>

(1. 泸州职业技术学院 机械工程系, 四川 广安 646000;  
2. 四川大学 制造科学与工程学院, 四川 绵阳 621000)

**摘要:** 针对串联机械手在执行任务过程中执行机构输入转矩较大,导致机构运动不平稳的问题,创建双自由度串联机械手运动简图模型.采用能量最小化控制方式,构造能量控制的动力学方程,分析机械手关节角度、连杆质量及各关节之间的距离,确定优化关系式.采取优化方法计算输入转矩的控制方程,得出输入转矩的最佳尺寸,并结合具体实例,在 Matlab/Simulink 软件中对优化后输入转矩进行仿真.结果表明:与优化前的仿真结果相比较,优化设计后机械手输入转矩较小,整体波动相对平稳,效果较好.

**关键词:** 机械手; 串联; 双自由度; 输入转矩; 动力学方程; 仿真分析

**中图分类号:** TP 241 **文献标志码:** A

机械手是指能够具备人手和臂的某些动作功能<sup>[1]</sup>,完成对现实生活中产品的加工、抓取及搬运等工作.机械手具有提高生产效率、连续工作、降低成本等很多优点,主要应用于航空航天、海洋探测、危险品搬运等许多行业.当前,机械手按照驱动方式分为机械式、液压式、电动式及气动式;按照机构种类分为串联式和并联式;按照自由度分为单自由度式、双自由度式及多自由度式.目前,对机械手输入转矩的研究文献有许多.文献[2-4]针对平面机械手关节驱动力矩限制器控制问题进行优化研究,建立机械手空间模型,对力矩方程式进行推导和分析.文献[5-7]针对机械手输入转矩算法问题展开研究,采用神经网络算法,计算机械手输入转矩控制结构,增强了机械手运动过程中控制结构的整体稳定性.文献[8-10]针对机械手关节输入转矩最小化问题进行研究,采用遗传算法,对关节最小力矩的轨迹要求进行优化,保证机械手高速运转时输入转矩最小.以往研究的串联机械手在执行任务过程中,执行机构输入转矩较大,导致运动不平稳,不能很好满足任务的需求.机械手执行机构的负荷不仅取决于连杆上质量的分布,也取决于有效运动的产生.鉴于此,本文基于能量最小化的优化实现双自由度串联机械手的输入转矩最小化,通过动力学方程推导得到的优化运动方程式,优化各个相关参数,并通过 Matlab/Simulation 软件对优化输入转矩进行仿真验证.

1 能量最小控制

1.1 机械手的动力学方程

双自由度串联机械手简图,如图 1 所示.高度非线性动力学条件的耦合微分方程为

$$\tau = A(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta,\dot{\theta})\dot{\theta} + Q(\theta).$$
(1)

式(1)中: $\tau$ 是作用于机械手关节上的  $2 \times 1$  阶转矩向量; $\theta, \dot{\theta}$  及  $\ddot{\theta}$  分别是代表角位置、速度和加速度的  $2 \times 1$  阶向量; $A(\theta)$ 是  $2 \times 2$  阶惯性矩阵; $C(\theta, \dot{\theta})$ 和  $Q(\theta)$ 是向心力和重

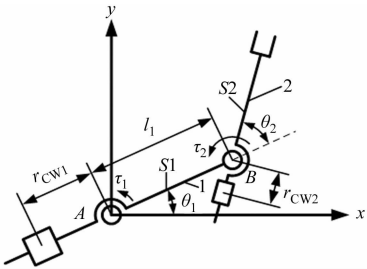


图 1 双自由度串联机械手  
Fig. 1 Double degree of freedom serial manipulator

力荷载的  $2 \times 1$  阶向量。

依照获得的关节角度和角度的导数, 可以将双自由度非平衡串联机械手的动力学方程(1)改写为

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= (k_{11}^0 + k_{1,2}^0 \cos \theta_2) \ddot{\theta}_1 + (k_{3,1}^0 + k_{3,2}^0 \cos \theta_2) \ddot{\theta}_2 - k_{1,2}^0 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - \\ &\quad k_{3,2}^0 \dot{\theta}_2^2 + p_1^0 \cos \theta_1 + p_2^0 \cos(\theta_1 + \theta_2), \\ \tau_2 &= (k_{3,1}^0 + k_{3,2}^0 \cos \theta_2) \ddot{\theta}_1 + 2k_2^0 \ddot{\theta}_2 + 0.5k_{1,2}^0 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 + p_2^0 \cos(\theta_1 + \theta_2). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式(2)中:  $k_{11}^0 = I_A + I_{S2} + m_2(l_1^2 + l_{S2}^2)$ ;  $k_{1,2}^0 = 2m_2 l_1 l_{S2}$ ;  $k_2^0 = 0.5(I_{S2} + m_2 l_{S2}^2)$ ;  $k_{3,1}^0 = I_{S2} + m_2 l_{S2}^2$ ;  $k_{3,2}^0 = m_2 l_1 l_{S1}$ ;  $p_1^0 = m_2 g l_1 + m_1 g l_{S2}$ ;  $p_2^0 = m_2 g l_{S2}$ ;  $m_1$  和  $m_2$  是连杆 1 和连杆 2 的质量;  $l_1$  是关节中心 A 和 B 间的距离;  $\theta_1$  是连杆 1 相对于基体的角位移;  $\theta_2$  是连杆 2 相对于连杆 1 的角位移;  $\dot{\theta}_1$  是连杆 1 相对于基体的角速度;  $\dot{\theta}_2$  是连杆 2 相对于连杆 1 的角速度;  $I_A$  是连杆 1 相对于点 A 的轴惯性矩;  $l_{S1}$  是连杆 1 的质心 S1 和关节中心 A 间的距离;  $I_{S2}$  是连杆 2 相对于连杆 2 的质心 S2 的轴惯性矩;  $l_{S2}$  是连杆 2 的质心 S2 和关节中心 B 间的距离;  $g$  是重力加速度。

## 1.2 改进的计算力矩控制律<sup>[11-12]</sup>

在关节空间逆动力学中, 对拉格朗日方程(1)中高度非线性化和高度耦合的动力学条件(参数)进行精确补偿. 对非线性反馈控制法则(前馈计算力矩)的计算为

$$\hat{\tau} = \hat{A}(\theta) \ddot{v} + \hat{C}(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta} + \hat{Q}(\theta). \quad (3)$$

式(3)中:  $\hat{A}(\theta)$ ,  $\hat{C}(\theta, \dot{\theta})$  及  $\hat{Q}(\theta)$  分别是矩阵  $A(\theta)$ ,  $C(\theta, \dot{\theta})$  及  $Q(\theta)$  的估算值。

图 2 为反馈线性化结构. 在图 2 中的反馈线性化架构(有插入符号的项代表预估矩阵)中执行关节空间逆动力学求解. 如果  $\hat{A}(\theta) = A(\theta)$ ,  $\hat{C}(\theta, \dot{\theta}) = C(\theta, \dot{\theta})$  及  $\hat{Q}(\theta) = Q(\theta)$ , 机器人的反馈线性化将驱动去耦合线性二重积分器, 有

$$\ddot{\theta} = v(t). \quad (4)$$

## 1.3 二重积分器的闭环控制器

给定一个关节空间轨迹  $\theta_j(t)$ , 作为一个对控制器而言, 是很明显的选择, 它所产生的  $v(t)$  是一个比例-微分加上前馈加速度控制的函数, 有

$$v(t) = \ddot{\theta}_j + K_P(\theta_j - \theta) + K_D(\dot{\theta}_j - \dot{\theta}). \quad (5)$$

式(5)中: 比例矩阵和微分矩阵  $K_P$  和  $K_D$  是正对角矩阵。

将式(5)代入式(4)可得

$$\ddot{\theta} = \ddot{\theta}_j + K_P(\theta_j - \theta) + K_D(\dot{\theta}_j - \dot{\theta}). \quad (6)$$

如果定义  $\tilde{\theta} = \theta_j - \theta$ , 可得线性的去耦闭环系统为

$$\ddot{\tilde{\theta}} + K_D \dot{\tilde{\theta}} + K_P \tilde{\theta} = 0. \quad (7)$$

线性去耦的闭环系统, 如图 3 所示. 反馈线性化结构和闭环控制器之间的分隔因为若干原因变得重要. 反馈线性化的结构被拉格朗日方程固定住了. 式(6)给出的闭环控制器仅仅是最简单的选择, 能实现在由式(1)提供的模型具有完全知识的理想情况下, 对关节空间轨迹进行渐近追踪. 然而, 具有完全的自由可以修改闭环控制器以实现不同的其他目标(如增强针对参数不确定性、外部干扰等条件的鲁棒性), 不需要修改专用于反馈线性化的结构。

## 1.4 二重积分器的能量最小化

二重积分器系统表达式为

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad (8)$$

它是完全可以控制的。

寻找一个函数  $u(t)$ , 它能引导  $x(0) = [0 \quad \theta_1]^T$  到  $x(T) = [0 \quad \theta_F]^T$ , 对以下积分进行最小化, 即

$$\int_0^T u^2(t) dt = \int_0^T \ddot{\theta}^2(t) dt \rightarrow \min. \quad (9)$$

式(9)中:  $\theta_1$  和  $\theta_F$  分别是初始位置和最终位置。

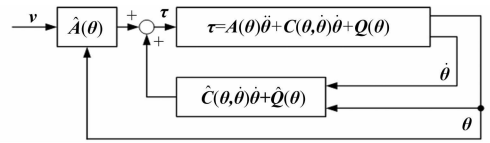


图 2 反馈线性化结构

Fig. 2 Structure of feedback linearization

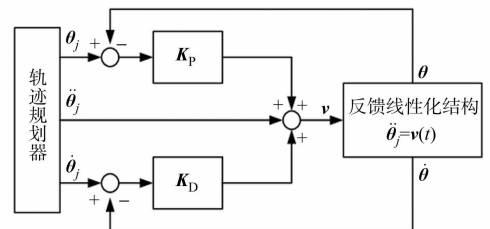


图 3 线性去耦闭环系统

Fig. 3 Closed-loop system of linear decoupling

在  $0 \leq t \leq T$  区间, 最小范数连续输入<sup>[13]</sup>为

$$u(t) = \mathbf{B}^T \exp(\mathbf{A}(T-1)) \left[ \int_0^T \exp(\mathbf{A} \cdot t) \mathbf{B} \mathbf{B}^T \exp(\mathbf{A}Tt) dt \right]^{-1} \times \\ [\mathbf{x}(T) - \exp(\mathbf{A} \cdot T) \mathbf{x}(0)]. \quad (10)$$

式(10)中:  $u(t) = \frac{6}{T^2}(\theta_F - \theta_1)[1 - 2\frac{t}{T}]$ . 因此, 对一个双自由度串联机械手, 由最小化条件式(9)得出的角加速度、角速度和角位置为

$$\ddot{\theta}_j(t) = \frac{6}{T^2}(\theta_{j,F} - \theta_{j,1})[1 - 2\frac{t}{T}], \quad (11)$$

$$\dot{\theta}_j(t) = \frac{6}{T}(\theta_{j,F} - \theta_{j,1})[1 - (\frac{t}{T})^2], \quad (12)$$

$$\theta_j(t) = \theta_{j,1} + (\theta_{j,F} - \theta_{j,1})[3(\frac{t}{T})^2 - 2(\frac{t}{T})^3]. \quad (13)$$

应该注意到, 这些保证了初始位置和最终位置间运动执行的关系为系统提供了最小的能量消耗.

## 2 转矩最小化

考虑由于平衡重引起的输入转矩, 有

$$\tau_1^{\text{CW}} = (k_{1,1} + k_{1,2} \cos \theta_2) \ddot{\theta}_1 + (k_{3,1} + k_{3,2} \cos \theta_2) \ddot{\theta}_2 - k_{1,2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - \\ k_{3,2} \dot{\theta}_2^2 + p_1 \cos \theta_1 + p_2 \cos(\theta_1 + \theta_2), \quad (14)$$

$$\tau_2^{\text{CW}} = (k_{3,1} + k_{3,2} \cos \theta_2) \ddot{\theta}_1 + 2k_2 \ddot{\theta}_2 + 0.5k_{1,2} \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 + p_2 \cos(\theta_1 + \theta_2). \quad (15)$$

式中:  $k_{1,1} = m_{\text{CW1}} + r^2 m_{\text{CW1}} + m_{\text{CW1}}(l_1^2 + r_{\text{CW2}}^2)$ ;  $k_{1,2} = -2m_{\text{CW2}} l_1 r_{\text{CW2}} + m_{\text{CW2}}(l_1^2 + r_{\text{CW2}}^2)$ ;  $k_2 = 0.5m_{\text{CW2}} r_{\text{CW2}}^2$ ;  $k_{3,1} = m_{\text{CW2}} r_{\text{CW2}}^2$ ;  $k_{3,2} = -m_{\text{CW2}} l_1 r_{\text{CW2}}$ ;  $p_1 = -m_{\text{CW1}} g r_{\text{CW1}} + m_{\text{CW2}} g l_1$ ;  $p_2 = m_{\text{CW2}} g r_{\text{CW2}}$ ;  $m_{\text{CW1}}$  和  $m_{\text{CW2}}$  分别是平衡重的质量;  $r_{\text{CW1}}$  是平衡重质心相对于 A 的转动半径;  $r_{\text{CW2}}$  是平衡重质心相对于 B 的转动半径.

为显示平衡重质心的转动半径对输入转矩的影响, 将式(14), (15)改写为

$$\tau_1^{\text{CW}} = c_{1,1} r_{\text{CW1}}^2 + c_{1,2} r_{\text{CW1}} + c_{1,3}, \quad (16)$$

$$\tau_2^{\text{CW}} = c_{2,1} r_{\text{CW2}}^2 + c_{2,2} r_{\text{CW2}}. \quad (17)$$

式中:  $c_{1,1} = m_{\text{CW1}} \ddot{\theta}_1$ ;  $c_{1,2} = -m_{\text{CW1}} g \cos \theta_1$ ;  $c_{1,3} = m_{\text{CW2}} [(l_1^2 + r_{\text{CW2}}^2 - l_1 r_{\text{CW2}} \cos \theta_2) \ddot{\theta}_1 + (r_{\text{CW2}}^2 - l_1 r_{\text{CW1}} \cos \theta_2) \times \ddot{\theta}_2 + 2l_1 r_{\text{CW2}} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + l_1 g \cos \theta_1 - r_{\text{CW2}} g \cos(\theta_1 + \theta_2)]$ ;  $c_{2,1} = m_{\text{CW2}} (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)$ ;  $c_{2,2} = m_{\text{CW2}} \times [l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 + l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 + g \cos(\theta_1 + \theta_2)]$ . 因此, 问题可以表示为寻找这样的一个平衡重质心的转动半径值, 该值能使输入转矩的均方根值最小. 应该注意到, 在该情况下, 静态平衡的条件并不成立, 因为平衡重的排列形式改变了, 而它的质量没变.

为了获得一个最小的均方根值, 需要对以下和进行最小化, 即

$$\Delta \tau_j = \sum_{i=1}^N (\tau_{j,i} + \tau_{j,i}^{\text{CW}})^2, \quad j = 1, 2. \quad (18)$$

式(18)中:  $i$  和  $N$  分别是所计算的机械手位置的序号和数目. 为了实现该目的, 需要保证条件  $\frac{\partial \Delta \tau_j}{\partial r_{\text{CWj}}} = 0$  成立. 从以上式子中, 可以得到 2 个三次方程, 即有

$$z_j^3 + a_j z_j^2 + b_j z_j + c_j = 0, \quad j = 1, 2. \quad (19)$$

式中:  $z_1 = r_{\text{CW1}}$ ;  $z_2 = r_{\text{CW2}}$ ;  $a_1 = 3 \sum_{i=1}^N c_{1,1,i} c_{1,2,i} / 2 \sum_{i=1}^N c_{1,1,i}^2 c_{1,2,i}$ ;  $a_2 = 3 \sum_{i=1}^N c_{2,1,i} c_{2,2,i} / 2 \sum_{i=1}^N c_{2,1,i}^2$ ;  $b_1 = (2 \sum_{i=1}^N c_{1,1,i} \tau_{1,i} + 2 \sum_{i=1}^N c_{1,1,i}^2 c_{1,3,i} + \sum_{i=1}^N c_{1,2,i}^2) / 2 \sum_{i=1}^N c_{1,1,i}^2$ ;  $b_2 = (2 \sum_{i=1}^N c_{2,1,i} \tau_{2,i} + \sum_{i=1}^N c_{2,2,i}^2) / 2 \sum_{i=1}^N c_{2,1,i}^2$ ;  $c_1 = (\sum_{i=1}^N c_{1,2,i} \tau_{1,i} + \sum_{i=1}^N c_{1,2,i} c_{1,3,i}) / 2 \sum_{i=1}^N c_{1,1,i}^2$ ;  $c_2 = (\sum_{i=1}^N c_{2,2,i} \tau_{2,i}) / 2 \sum_{i=1}^N c_{2,1,i}^2$ .

三次方程式(19)的实数解可以由 Viette-Cordano 方法<sup>[14]</sup>表示为代数形式. 为了确定根, 首先应该计算以下关系式, 即

$$Q_j = (a_j^2 - 3b_j)/9, \quad R_j = (2a_j^3 - 9a_jb_j + 27c_j)/54.$$

(20)

当  $R_j^2 < Q_j^3$  时, 三次方程具有 3 个实根, 由以下的表达式决定, 即

$$\begin{cases} z_{1,j} = -2\sqrt{Q_j}\cos(t_j) - a_j/3, \\ z_{2,j} = -2\sqrt{Q_j}\cos(t_j + 2\pi/3) - a_j/3, \\ z_{3,j} = -2\sqrt{Q_j}\cos(t_j - 2\pi/3) - a_j/3, \\ t_j = \cos^{-1}[R_j\sqrt{Q_j^3}/3]. \end{cases}$$

当  $R_j^2 \geq Q_j^3$  时, 一般性的三次方程具有 1 个实根, 复合性的方程具有 2 个实根.

为了确定复数根, 需要计算以下关系式, 即

$$A_j = -\text{sign}(R_j)\sqrt[3]{|R_j| + \sqrt{R_j^2 - Q_j^3}}, \quad B_j = Q_j/A_j.$$

其中, 实根为  $z_{1,j} = A_j + B_j - a_j/3$ . 当  $A_j = B_j$  时, 复根变成实根, 则有  $z_{2,j} = -A_j - a_j/3$ .

3 设计实例

采用 Matlab 软件对转矩值进行优化, 优化计算所得尺寸, 如表 1 所示. 将优化后的尺寸参数输入 Matlab/Simulink 中进行输入转矩仿真, 同时与优化前的输入转矩进行了对比, 结果如图 4 所示. 图 4 中:  $\tau$  为转矩输入值;  $t$  为时间.

从图 4 可知: 优化后的双自由度机械手输入转矩值整体波动比较小, 波动的最大值约为  $3.5\text{ N}\cdot\text{m}$ ; 而优化前的双自由度机械手输入转矩值整体波动比较大, 波动的最大值约为  $7.5\text{ N}\cdot\text{m}$ . 通过对比可知, 优化后输入转矩值相对优化前大约减少了 53%, 转矩输入值有明显地降低, 效果较好.

表 1 优化后的尺寸参数  
Tab. 1 Optimized size parameters

参数	数值	参数	数值	参数	数值
$\theta_{1,1}/(^{\circ})$	0	$m_2/\text{kg}$	2.1	$l_{S2}/\text{m}$	0.12
$\theta_{2,1}/(^{\circ})$	1.17	$l_1/\text{m}$	0.35	$I_{S1}/\text{kg}\cdot\text{m}^2$	0.16
$\theta_{1,F}/(^{\circ})$	0.54	$l_{A,S1}/\text{m}$	0.11	$I_{S2}/\text{kg}\cdot\text{m}^2$	0.11
$\theta_{2,F}/(^{\circ})$	1.69	$l_{B,S2}/\text{m}$	0.11	$r_{CW1}/\text{m}$	0.27
$m_1/\text{kg}$	2.4	$l_{S1}/\text{m}$	0.12	$r_{CW2}/\text{m}$	0.16

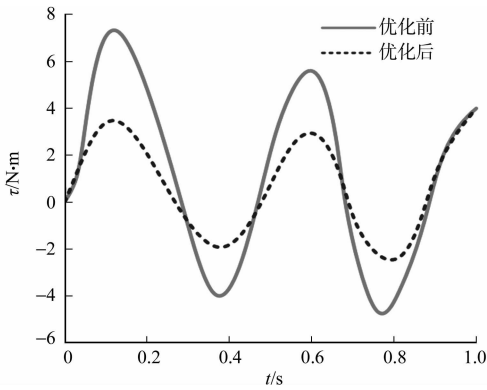


图 4 转矩输入值仿真曲线

Fig. 4 Simulation curve of torque input value

4 结束语

通过能量最小控制和优化可动质量重分布, 对双自由度串联机械手进行输入转矩最小化, 双自由度串联机械手的输入转矩最小化由基于能量最小的优化运动执行实现. 通过对动态和静态载荷引起的输入转矩的均方根值进行最小化, 得到了优化的平衡重布置方式. 推导得到了 2 个三次方程, 使平衡重质心回转半径的确定成为可能. 最后, 采取 Matlab/Simulink 软件实现了优化数值仿真. 仿真结果显示, 优化后的双自由度串联机械手的输入转矩有明显地降低, 为机械手的转矩深入研究提供了参考依据.

参考文献:

[1] 郭洪武. 浅析机械手的应用与发展趋势[J]. 中国西部科技, 2012, 11(10): 3-4.

[2] ZHANG Meiying, GOSSELIN C. Optimal design of safe planar manipulators using passive torque limiters [J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2015, 8(1): 1-11.

[3] SUN Yongjun, LIU Yiwei, ZOU Tian, et al. Design and optimization of a novel six-axis force/torque sensor for space robot [J]. Measurement, 2015, 65(4): 136-147.

[4] MELIN P, ASTUDILLO L, CASTILLO O, et al. Optimal design of type-2 and type-1 fuzzy tracking controllers for autonomous mobile robots under perturbed torques using a new chemical optimization paradigm[J]. Expert Systems with Applications, 2013, 40(7): 3186-3195.

- [5] ONIZ Y, KAYNAK O. Control of a direct drive robot using fuzzy spiking neural networks with variable structure systems-based learning algorithm[J]. *Neurocomputing*, 2015, 149(11): 607-616.
- [6] TOLOUE S F, AKBARZADEH M R, AKBARZADEH M A, et al. Position tracking of a 3-PSP parallel robot using dynamic growing interval type-2 fuzzy neural control[J]. *Applied Soft Computing*, 2015, 37(12): 2-13.
- [7] TRAN D T, KOO I M, LEE Y H, et al. Central pattern generator based reflexive control of quadruped walking robots using a recurrent neural network [J]. *Robotics and Autonomous Systems*, 2014, 62(11): 1497-1515.
- [8] GUO Dongsheng, ZHANG Yunong. Different-level two-norm and infinity-norm minimization to remedy joint-torque instability/divergence for redundant robot manipulators[J]. *Robotics and Autonomous Systems*, 2012, 60(5): 874-886.
- [9] TIAN Qiang, CHEN Liping, ZHANG Yunqing, et al. An efficient hybrid method for multibody dynamics simulation based on absolute nodal coordinate formulation[J]. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2009, 4(2): 1-13.
- [10] WU Jun, WANG Jinsong, YOU Zheng. A comparison study on the dynamics of planar 3-DOF 4-RRR, 3-RRR and 2-RRR parallel manipulators[J]. *Robotics and Computer Integrated Manufacturing*, 2011, 27(1): 150-156.
- [11] 彭宇. 非经性智能观测器及其应用研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2000: 13-23.
- [12] 赵文杰. 不确定非线性系统的变结构控制研究[D]. 北京: 华北电力大学, 2004: 25-33.
- [13] TITOV V, SHARDYKO I, ISAENKO S. Force-torque control implementation for 2 DoF manipulator[J]. *Procedia Engineering*, 2014, 69(1): 1232-1241.
- [14] LI Zhiyun, YANG Yipeng, LI Jianxun. Adaptive motion force control of mobile under-actuated manipulators with dynamics uncertainties by dynamic coupling and output feedback[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2010, 18(5): 1068-1079.

## Input Torque Optimization of a Double Degree of Freedom Serial Manipulator

ZHANG Anmin<sup>1</sup>, ZHAO Wu<sup>2</sup>

(1. Department of Mechanical and Engineering, Luzhou Vocational and Technical College, Guang'an 646000, China;

2. College of Manufacturing Science and Engineering, Sichuan University, Mianyang 621000, China)

**Abstract:** As for the problem that the input torque of the serial manipulator actuator is large in the executing process, which leads to the instability of the mechanism motion, a double degree of freedom serial manipulator kinematic sketch model is created. Using the energy minimization control method, the dynamic equation of the energy control is constructed. Manipulator joint angle, the quality of connecting rod, and the distance between joints are analyzed, then the optimization equation are determined. Taking the optimization method to calculate the input torque control equation, the optimal size of the input torque is obtained. Combining with concrete examples, the optimized input torque is simulated in the Matlab/Simulink software. Results show that compared with the simulation results before optimization, the optimized design of the manipulator input torque is smaller, the overall fluctuation is relatively stable and the result is better.

**Keywords:** manipulator; series; double degree of freedom; input torque; dynamic equation; simulation analysis

(责任编辑: 黄晓楠      英文审校: 杨建红)