

# 斜裂纹转子刚度特性分析

李志农, 夏恒恒, 肖尧先

(南昌航空大学 航空制造工程学院, 江西 南昌 330063)

**摘要:** 在材料力学和断裂力学的基础上,运用应变能释放率的方法,得出斜裂纹的刚度矩阵.讨论在裂纹全开的状态时,裂纹倾角、轴细长比和裂纹深度对转轴刚度的影响,并对裂纹处于旋转时的开闭情况及相应轴的刚度变化规律进行研究.结果表明:当裂纹处于全开状态时,随着裂纹倾角的增大,裂纹的刚度随之减小,轴刚度的变化随着裂纹深度的增大更加显著;当裂纹处于开闭状态时,随着裂纹深度的增加,轴的刚度不再一直减小,而是有一定规律的波动,即时变特性,此时,轴的耦合振动随之增强,转子的动力特性变得愈加复杂.

**关键词:** 斜裂纹; 转子刚度; 时变特性; 开裂; 呼吸裂纹

**中图分类号:** TH 133

**文献标志码:** A

疲劳裂纹是旋转类机械转轴上常见的故障之一,也是引起机械系统失效的主要原因.而含裂纹轴的非线性动力学特性主要是受转轴刚度的影响.因此,如何合理地建立含裂纹的转子系统动力学模型,计算裂纹转轴的刚度显得尤为重要.当前,国内外许多学者对裂纹的刚度模型进行了研究,并取得了一些成果<sup>[1-10]</sup>.然而,裂纹全开和裂纹处于开闭交替时,裂纹转轴的刚度变化规律有显著的差别.基于此,本文通过应变能释放率的方法,得到斜裂纹轴的刚度矩阵,并使用应力强度因子为零法,近似模拟了裂纹的呼吸特点,着重分析裂纹倾角为  $45^\circ$  时,在裂纹处于全开状态下,转轴轴细长比和裂纹深度比对转轴刚度的影响,以及裂纹处于开闭交替状态下,转轴的刚度变化规律.

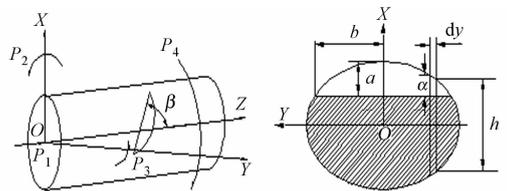
## 1 裂纹模型

建立的裂纹模型的轴半径  $R$  为 4.75 mm;轴长  $L$  为 260 mm;弹性模量  $E$  为 210 GPa;泊松比  $\nu$  为 0.3.裂纹轴的示意图,如图 1 所示.图 1 中: $\beta$  为裂纹倾角; $a$  为深度; $P_1$  为轴向力; $P_2$  和  $P_3$  分别为  $X$  轴和  $Y$  轴的弯矩; $P_4$  为扭矩.用微分的方式,可将裂纹分成宽度为  $h = 2\sqrt{R^2 - y^2}$ ,厚度为  $dy$ ,且裂纹深度为  $a$  的若干单元.

通过能量释放率的方法,求出裂纹的应变能,运用卡式定理求出裂纹轴的附加柔度.根据文献[6]提出的局部柔度理论,得出斜裂纹在  $P_1 \sim P_4$  方向上的应力强度因子分别为

$$P_1: K_{I,1} = \frac{P_1}{2\pi R^2}(1 + \cos 2\beta), \quad K_{III,1} = \frac{P_1}{2\pi R^2}\sin 2\beta, \quad (1)$$

$$P_2: K_{I,2} = \frac{2P_2 Y}{\pi R^4}(1 + \cos 2\beta), \quad (2)$$



(a) 转轴的受力图 (b) 裂纹的截面

图 1 斜裂纹转轴

Fig. 1 Slant crack shaft

收稿日期: 2015-07-10

通信作者: 李志农(1966-),男,教授,博士,主要从事智能检测方面的研究. E-mail: lizhinong@tsinghua.org.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51265039, 51075372, 50775208);江西省研究生创新专项资金资助项目(YC2014-S390);江西省教育厅科技计划项目(GJJ12405);重庆大学机械传动国家重点实验室开放基金(SKLM-T-KFKT-201514)

$$P_3: K_{1,3} = \frac{P_3 h}{\pi R^4} (1 + \cos 2\beta), \quad K_{\text{III},3} = \frac{P_3 h}{\pi R^4} \sin 2\beta, \quad (3)$$

$$P_4: K_{1,4} = \frac{2P_4 \sqrt{Y^2 + (h/2)^2}}{\pi R^4} \sin 2\beta. \quad (4)$$

总的应力强度因子为

$$K_I = K_{1,1} + K_{1,2} + K_{1,3} + K_{1,4}, \quad (5)$$

$$K_{\text{III}} = K_{\text{III},1} + K_{\text{III},3}. \quad (6)$$

3个影响系数<sup>[6]</sup>分别为

$$F_1 = \sqrt{\frac{\tan \lambda}{\lambda}} [0.752 + 2.02(\frac{\alpha}{h}) + 0.37(1 - \sin \lambda)^3] \frac{1}{\cos \lambda}, \quad (7)$$

$$F_2 = \sqrt{\frac{\tan \lambda}{\lambda}} [0.923 + 0.199(1 - \sin \lambda)^4] \frac{1}{\cos \lambda}, \quad (8)$$

$$F_{\text{III}} = \sqrt{\frac{\tan \lambda}{\lambda}}. \quad (9)$$

式(7)~(9)中:  $\lambda = \frac{\pi a}{2h}$ .

能量释放率密度函数可表示为

$$J = \frac{1}{E'} [K_I^2 + (1 + \nu) K_{\text{III}}^2]. \quad (10)$$

对式(10)进行积分,可得到裂纹轴释放的应变能为

$$W = \iint_A (\frac{1}{E'} (K_I^2 + \frac{1+\nu}{E'} K_{\text{III}}^2)) d\alpha dY. \quad (11)$$

式(11)中:A为裂纹张开区域,因此,通过卡氏定理对其微分,得到裂纹轴的附加柔度为

$$\Delta c_{i,j} = \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_j}. \quad (12)$$

无裂纹转轴的柔度矩阵<sup>[7]</sup>为

$$\mathbf{c}_s = \begin{bmatrix} \frac{l^3}{48EI} & \frac{l^3}{48EI} & \frac{l}{2EA} & \frac{l}{2EA} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

式(13)中: $I = \pi d^4 / 64$ .由裂纹轴的附加柔度加上无裂纹轴的柔度,可得裂纹轴的柔度为

$$\Delta \mathbf{c} = \mathbf{G}_1 \Delta c_{i,j} \mathbf{G}_2 + \mathbf{c}_s. \quad (14)$$

其中,

$$\mathbf{G}_1 = \text{diag} \left[ \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad 1 \right], \quad (15)$$

$$\mathbf{G}_2 = \text{diag} \left[ \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad 1 \quad 1 \right]. \quad (16)$$

故裂纹轴的刚度可表示为

$$\mathbf{k}_{\text{crack}} = \Delta \mathbf{c}^{-1}. \quad (17)$$

为了更加直观地表示出裂纹对刚度的影响,采用裂纹的无量纲刚度表示,即

$$\bar{\mathbf{k}} = \mathbf{k}^{-1} \mathbf{k}_{\text{crack}}. \quad (18)$$

式(18)中: $\mathbf{k}$ 为无裂纹轴的刚度,且矩阵 $\bar{\mathbf{k}}, \mathbf{k}$ 中的元素分别用 $\bar{k}_{i,j}, k_{i,j}$ 表示, $i, j = 1, 2, 3, 4$ .

## 2 斜裂纹全开时转轴刚度特性分析

不同裂纹倾角下,裂纹的无量纲刚度的变化情况,如图2所示.图2中: $\alpha/R$ 为裂纹深度比.由图2可知:裂纹轴的刚度随着裂纹深度比的增加而减小;当裂纹深度相同时,裂纹轴的刚度随着裂纹倾角的增大越来越小,且减小的速率越大.

当裂纹倾角为 $45^\circ$ 时,转轴细长比对裂纹轴刚度的变化图,如图3所示.由图3可知:当裂纹深度比相同时,随着转轴细长比减小,主方向的刚度随之增大,且增大速度加快;当裂纹深度比较小时,裂纹轴

的刚度变化较小, 随着裂纹深度比增大, 轴的刚度越来越小, 且下降速率越来越大; 随着裂纹深度比接近 1 时,  $\bar{k}_{1,1}$  和  $\bar{k}_{2,2}$  变为之前的 80% 左右,  $\bar{k}_{4,4}$  变为原先的 90% 左右, 而  $\bar{k}_{3,3}$  变为之前的 50% 左右. 由图 3 还可知: 无量纲耦合刚度  $\bar{k}_{1,3}$  的值是负的, 且当裂纹深度比越大时, 其值越小, 当裂纹深度比相同时, 随着转轴细长比的增大而减小; 而对于无量纲耦合刚度  $\bar{k}_{2,4}$ , 当裂纹深度比越大时, 其值越大, 当裂纹深度比相同时, 随着转轴细长比的增大而增大; 当裂纹深度较小时,  $\bar{k}_{2,4}$  几乎没有什么变化, 所以当裂纹深度比较小时, 计算时几乎可以忽略刚度  $\bar{k}_{2,4}$  的变化.

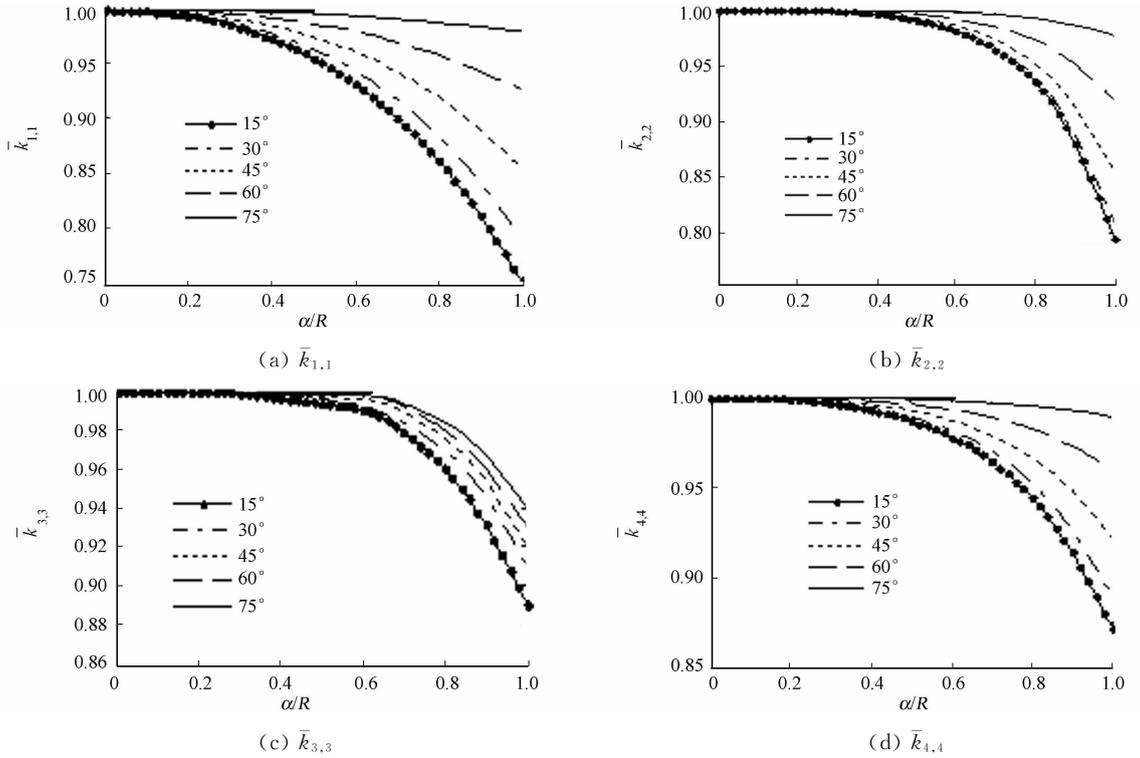
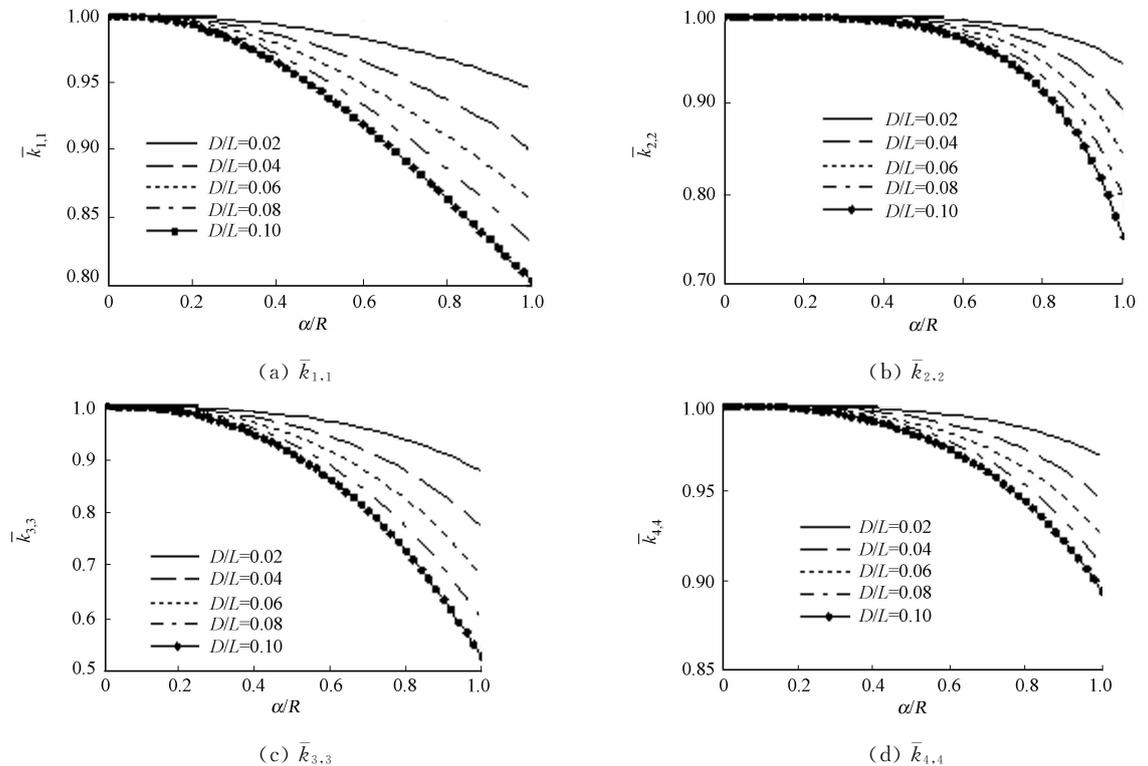


图 2 不同裂纹倾角对裂纹转轴的刚度变化对比图

Fig. 2 Stiffness of the cracked shaft with different crack inclination angle



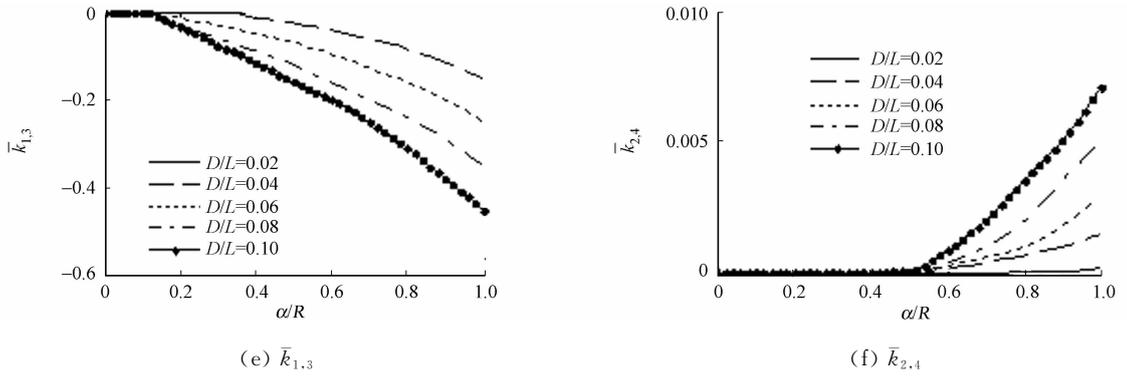


图3 转轴细长比对裂纹轴刚度的变化图

Fig. 3 Stiffness of the cracked shaft with the axial slenderness ratio

### 3 斜裂纹截面开闭特性

裂纹开闭线位置(CCLP)变化点分布,如图4所示.将裂纹边界平均分成50等份,通过式(5)可计算出裂纹边缘线各点的总应力强度因子,确定 $K_I$ 的正负号的位置.通过该位置作垂直于裂纹边界的直线,该直线就是裂纹的开闭线.由图4可知:开闭线一侧区域的点由于受到拉应力而张开,而另外一侧区域的点由于受到压应力而闭合,这样可以得到转轴在不同转角下的裂纹开闭区域.在一个稳态的旋转周期内,可以得到裂纹的开闭特性即呼吸特性;当CCLP确定,可以确定裂纹转轴刚度求解的积分区域,从而求出该积分区域下的裂纹转轴刚度矩阵.

运用牛顿第二定律,在Jeffcott转子模型的基础上,可以建立裂纹转子的动力学方程,即

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\mu}} + \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\mu}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{P}. \quad (19)$$

式(19)中: $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$ 分别是转子系统的总体质量矩阵、阻尼矩阵、刚度矩阵; $\ddot{\boldsymbol{\mu}}, \dot{\boldsymbol{\mu}}, \boldsymbol{\mu}$ 分别为节点的横向方向上的加速度、速度、位移; $\mathbf{P}$ 为转子所受外力的矩阵.

裂纹轴长度为260 mm,裂纹轴直径为9.5 mm,转盘质量为0.6 kg,转盘尺寸为 $\Phi 76 \text{ mm} \times 25 \text{ mm}$ ,弹性模量 $E$ 为210 GPa,阻尼系数 $C$ 为 $40 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ ,转盘的偏心量 $e$ 为0.16 mm,经计算求得无裂纹转子系统横向振动固有频率为 $3\,928 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1}$ ,转子旋转速度为 $2\,000 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1}$ .以无裂纹转子的静态作为裂纹完全闭合的初始状态,可以求出裂纹轴刚度,运用龙格库塔法求得此时转子系统横向振动响应,从而得到作用在裂纹截面上的力.此时,利用应力强度因子为零法可确定CCLP,从而求出刚度矩阵.然后,通过刚度矩阵得出转子转过一定角度时的振动响应,如此循环,又可以确定CCLP,得到转子在一个稳态的旋转周期内的裂纹开闭规律.

当裂纹深度比为0.2时,一个稳定周期内裂纹开闭过程如下:转子旋转角度 $\varphi$ 在 $0^\circ \sim 66^\circ$ 时,裂纹处于闭合阶段;当转角超过 $66^\circ$ 时,裂纹开始张开,到 $128^\circ$ 时,完全张开,一直持续到 $246^\circ$ ,再闭合,直到转过 $360^\circ$ 完成一个旋转周期;裂纹处于闭合与全开时的角度跨度都为 $181^\circ$ .

裂纹轴刚度随旋转角和裂纹深度的变化,如图5所示.图5中: $\varphi$ 为旋转角度.由图5可知:当裂纹深度较浅时,主方向的裂纹轴刚度随裂纹转角的变化不是很明显,随着裂纹深度的增加,裂纹主方向上的刚度均有一定的程度下降;当裂纹深度较深时,裂纹轴向方向的刚度 $\bar{k}_{1,1}$ 下降最大;裂纹轴向 $\bar{k}_{1,1}$ 和扭转方向的刚度 $\bar{k}_{4,4}$ 变化关于 $180^\circ$ 对称;裂纹的轴向 $\bar{k}_{1,1}$ 、扭转方向 $\bar{k}_{4,4}$ 和横向弯曲方向 $\bar{k}_{2,2}$ 的刚度变化都是先减小后增大,而裂纹的弯曲方向的刚度 $\bar{k}_{3,3}$ 跟以上3个方向的刚度变化趋势不同,先减小,而后又有小幅度的上升,然后,降到最低点,最后,又回到原点的变化趋势.

由图5还可知:在裂纹深度较浅时,刚度变化都不明显,随着裂纹深度的增加,变化逐渐变得明显;

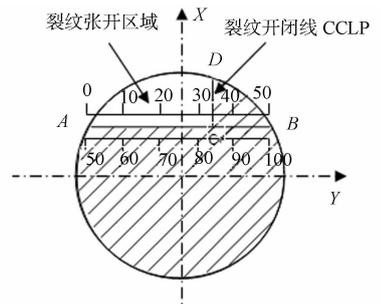


图4 裂纹开闭线位置变化点分布图  
Fig. 4 Changing point distribution of crack opening and closing line position

耦合刚度  $\bar{k}_{1,2}$  随着转轴的旋转角的变化不再一直为正值, 而是在零线附近上下波动, 类似正弦曲线变化; 当转角为  $0^\circ \sim 280^\circ$  时, 耦合刚度  $\bar{k}_{1,3}$  的变化趋势类似主方向  $\bar{k}_{1,1}$  和  $\bar{k}_{4,4}$  的变化, 但是, 当  $280^\circ \sim 60^\circ$  有一个小突起; 耦合刚度  $\bar{k}_{1,4}$  随转角的变化趋势在一个完整的周期内都类似主方向  $\bar{k}_{1,1}$  和  $\bar{k}_{4,4}$  的变化, 只是大小为负值; 耦合刚度  $\bar{k}_{2,4}$  随转轴的转角变化也类似正弦曲线, 跟耦合刚度  $\bar{k}_{1,2}$  类似, 但变化范围较小; 所有耦合方向的刚度在初始时刻, 转轴的旋转角为  $0^\circ$  时, 刚度都为零, 产生耦合振动越多越明显, 使裂纹转轴的动力学性能更加复杂。

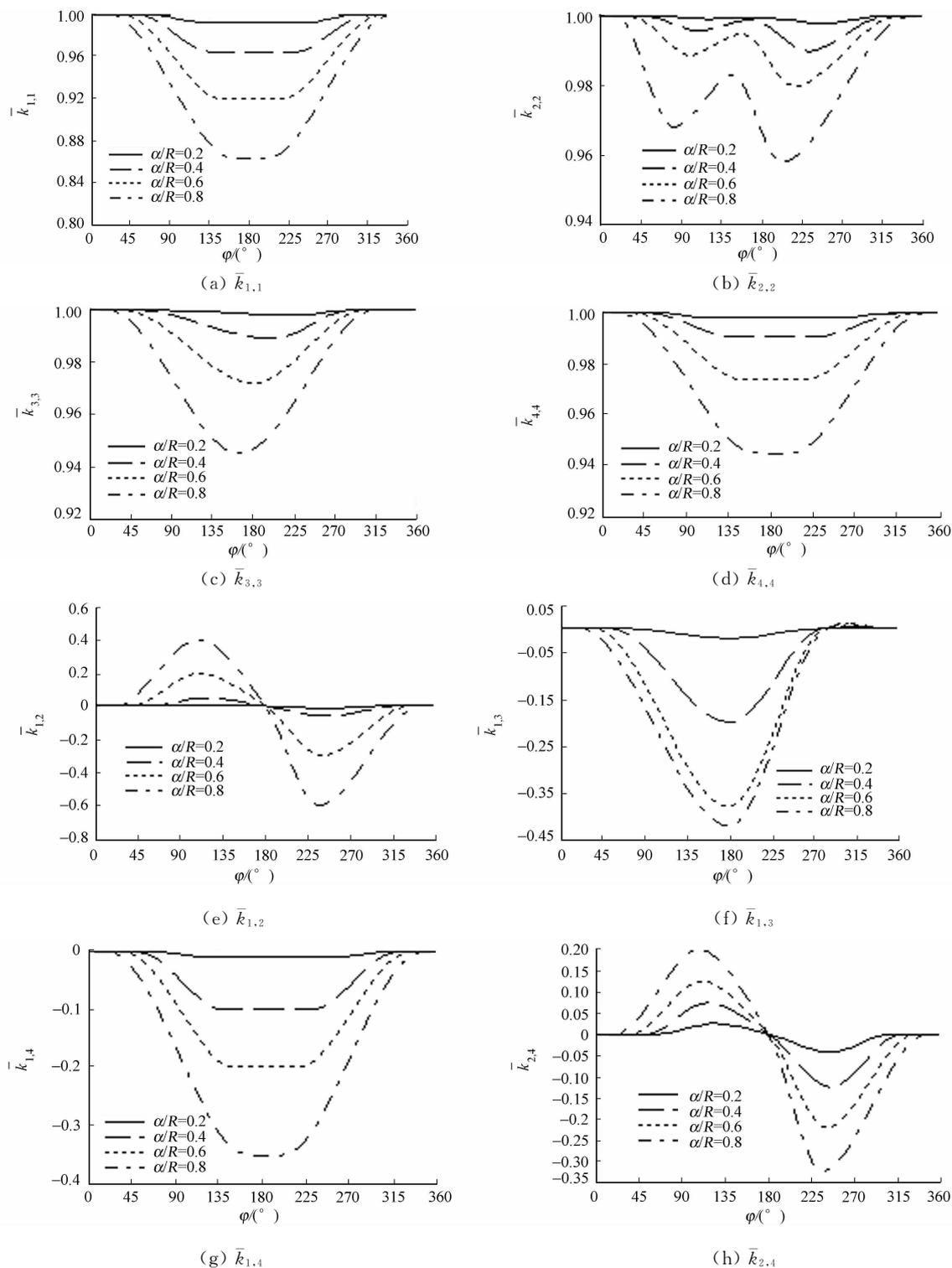


图 5 裂纹轴刚度随旋转角和裂纹深度的变化

Fig. 5 Variation of crack shaft stiffness with rotation angle and crack depth

## 4 结论

从转轴裂纹全开状态和裂纹的时变特性两方面研究斜裂纹转子刚度特性,得出以下2点结论。

1) 当裂纹处于全开状态时,转轴的刚度随着裂纹深度比增加而减小;当裂纹深度相同时,裂纹轴的刚度随着裂纹倾角增大而减小;耦合刚度中只有  $\bar{k}_{1,3}$  和  $\bar{k}_{2,4}$  变化较为明显,当裂纹深度比增大时,主方向的刚度均减小;当裂纹深度相同时,转轴细长比越大,主方向的刚度越小。

2) 裂纹处于呼吸状态时,当裂纹深度较浅时,主方向的裂纹轴刚度随裂纹转角的变化不是很明显,随着裂纹深度的增加,裂纹主方向上的刚度均有一定的程度下降;当裂纹深度较深时,裂纹轴向方向的刚度  $\bar{k}_{1,1}$  下降最大;裂纹的轴向  $\bar{k}_{1,1}$ 、扭转方向  $\bar{k}_{4,4}$  和横向弯曲方向  $\bar{k}_{2,2}$  的刚度变化都是先减小后增大;在裂纹深度较浅时,耦合刚度变化都不明显,随着裂纹深度的增加,变化逐渐变得明显;耦合刚度  $\bar{k}_{1,2}$  随着转轴的旋转角的变化类似正弦曲线变化;耦合刚度  $\bar{k}_{2,4}$  随着转轴的转角变化也类似正弦曲线,所有耦合方向的刚度在初始时刻,刚度都为零。

## 参考文献:

- [1] GASCH R. A survey of the dynamic behavior of a simple rotating shaft with a transverse crack[J]. J Sound and Vibration, 1993, 160(2): 313-332.
- [2] 高建民, 朱晓梅. 转轴上裂纹开闭模型的研究[J]. 应用力学学报, 1992, 9(1): 108-112.
- [3] PAPAPOULOS C A, DIMAROGONAS A D. Coupled longitudinal and bending vibrations of a rotating shaft with an open crack[J]. Journal of Sound and Vibration, 1987, 117(1): 81-93.
- [4] 曾复, 吴昭同. 含横向裂纹简单转子刚度的计算[J]. 机械科学与技术, 1999, 18(5): 745-747.
- [5] 林言丽. 斜裂纹转子动力学特性的研究[D]. 北京: 清华大学, 2008: 20-25.
- [6] DARPE A K. Dynamics of a Jeffcott rotor with slant crack[J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 303(1): 1-28.
- [7] DARPE A K, GUPTA K, CHAWALA A. Coupled bending, longitudinal and torsional vibrations of a crack rotor [J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 269(1/2): 33-60.
- [8] 何为, 任兴民, 杨永锋. 横向裂纹轴耦合刚度分析[J]. 振动与冲击, 2007, 26(12): 44-48.
- [9] SEKHAR A S. Crack identification in a rotor system: A model-based approach[J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 270(4): 887-902.
- [10] 王宗勇, 林伟, 闻邦椿, 等. 开闭裂纹转轴刚度的解析研究[J]. 振动与冲击, 2010, 29(9): 69-72.

## Stiffness Characteristics Analysis of a Rotor With Slant Crack

LI Zhinong, XIA Hengheng, XIAO Yaoxian

(School of Aeronautical Manufacturing Engineering, Nanchang Hangkong University, Nanchang 330063, China)

**Abstract:** The stiffness matrix of the slant crack was obtained based on material mechanics and fracture mechanics theory through the use of strain energy release rate method. While the crack is fully open, the influence of the crack angle, the axial slenderness ratio and the crack depth on the stiffness of the shaft was discussed. At the same time, the opening and closing conditions in the rotating state and the stiffness change law of the corresponding shaft were studied. The results show that, when the crack is in the fully open state, the stiffness of the crack decreases with the increase of the crack angle. And the shaft stiffness changes more significantly with the increase of the crack depth; when the crack is in the opening and closing state, with the increase of the crack depth, the shaft stiffness is no longer decreases, but there is a certain law of fluctuation, which is time-varying characteristics, in this case, the shaft coupling vibration also increases, the dynamic characteristics of the rotor becomes increasingly complex.

**Keywords:** slant crack; rotor stiffness; time-variant characteristics; open crack; breaking crack