第 36 卷　第 6 期　　华侨大学学报（自然科学版）　　Vol. 36　No. 6
2015 年 11 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Nov. 2015

文章编号：1000-5013(2015)06-0726-05　　**doi**：10.11830/ISSN.1000-5013.2015.06.0726

$\boldsymbol{A}$-收敛与几乎处处收敛

鲍玲鑫[1]，施慧华[2]

（1. 福建农林大学 计算机与信息学院，福建 福州 350002；
2. 华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021）

摘要：设 $\boldsymbol{A}\equiv(\boldsymbol{a}_i)_{i=1}^{\infty}\subset S_{\ell_1}^{+}$，其中，$S_{\ell_1}^{+}$ 表示 ℓ_1 单位球面上的所有正向量构成的集合. Banach 空间 X 中的序列$(\boldsymbol{x}_n)$称为 $\boldsymbol{A}$-收敛于 $\boldsymbol{x}\in X$，是指对任意的 $\varepsilon>0$，$\lim\limits_{i\to\infty}\langle \boldsymbol{a}_i,\chi_{A(\varepsilon)}\rangle=0$，其中，$A(\varepsilon)=\{n\in\mathbf{N}:\ \|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}\|\geqslant\varepsilon\}$. 用两种不同的收敛方式刻画 $\boldsymbol{A}$-收敛，即证明对任意 $\boldsymbol{A}\equiv(\boldsymbol{a}_i)_{i=1}^{\infty}\subset S_{\ell_1}^{+}$，存在一个 $\mathbf{N}$ 上的理想 $\boldsymbol{I}_A$，以及一族极端有限可加概率测度 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{I}_A)$，使 $\boldsymbol{A}$-收敛且理想 $\boldsymbol{I}_A$-收敛和测度 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{I}_A)$-收敛互为等价. 此外，证明 $\boldsymbol{A}$-收敛为测度 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{I}_A)$-几乎处处收敛的充分必要条件是该 $\boldsymbol{A}$-收敛为非退化的.

关键词：统计收敛；理想收敛；几乎处处收敛；极端测度；Banach 空间

中图分类号：O 177.2　　**文献标志码**：A

统计收敛的定义由 Fast[1] 和 Steinhaus[2] 于 1951 年在实数空间中引入，它是经典序列收敛定义的一种推广形式. 在此后半个多世纪中，统计收敛出现许多推广形式，如 $\boldsymbol{A}$-统计收敛[3]、Lacunary-统计收敛[4] 和理想 $\boldsymbol{I}$-收敛等[5]. 给定 $A\subseteq\mathbf{N}$，χ_A 表示集合 A 的特征函数，$\mathbf{N}$ 表示所有自然数构成的集合. Banach 空间 X 中的序列$(\boldsymbol{x}_n)$称为统计收敛于 $\boldsymbol{x}\in X$，指对任意 $\varepsilon>0$，$\lim\limits_{i\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\chi_{A(\varepsilon)}(j)=0$，其中，$A(\varepsilon)=\{n\in\mathbf{N}:\ \|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}\|\geqslant\varepsilon\}$（下同，略）. 2008 年，Cheng 等[6-7] 利用几何泛函分析与 Banach 空间理论引入了统计测度理论，并证明了各种具体形式的统计收敛均可以用相应的一族统计测度收敛加以刻画. 给定一族统计测度 $\boldsymbol{S}$，Banach 空间 X 中的序列$(\boldsymbol{x}_n)$称为测度 $\boldsymbol{S}$-收敛于 $\boldsymbol{x}\in X$ 是指对任意的 $\varepsilon>0$，$\mu(A(\varepsilon))=0$ 对一切 $\mu\in\boldsymbol{S}$ 成立. 2013 年，Bao 等[8] 进一步证明了任意一个理想 $\boldsymbol{I}\subset2^{\mathbf{N}}$，存在一族统计测度 $\boldsymbol{S}$，使理想 $\boldsymbol{I}$-收敛等价于测度 $\boldsymbol{S}$-收敛. 2013 年，Bao 等[9] 利用 ℓ_1 单位球面上的一列正向量 $\boldsymbol{A}\equiv(\boldsymbol{a}_i)_{i=1}^{\infty}$，定义了一个推广形式的 $\boldsymbol{A}$-统计收敛，即 $\boldsymbol{A}$-收敛. 文献[9]证明了 $\boldsymbol{A}$-收敛可以用一族概率测度 $\boldsymbol{M}_A$-收敛加以刻画，并证明了 $\boldsymbol{A}$-收敛等价于统计测度收敛，依赖于 $\boldsymbol{A}$ 的 w^*-拓扑性质. $\boldsymbol{A}$-收敛可以用测度 $\boldsymbol{M}_A$-收敛等价刻画，也就存在是否等价于依测度 $\boldsymbol{M}_A$-几乎处处收敛的问题. 基于此，本文首先证明 $\boldsymbol{A}$-收敛、测度收敛与理想收敛相互等价，并证明 $\boldsymbol{A}$-收敛为测度 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{I}_A)$-几乎处处收敛的充分必要条件是该 $\boldsymbol{A}$-收敛为非退化的.

1　$\boldsymbol{A}$-收敛和理想收敛与极端测度收敛

文中的所有记号都是统一的. X 表示实 Banach，S_X 和 X^* 分别表示 X 的单位球面和共轭空间. 如果 X 是一个序列空间，X^+ 表示 X 的正锥，即 $X^+=\{\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}(n))\in X:\boldsymbol{x}(n)\geqslant0\}$，$P^+$ 表示 X^* 中所有正线性泛函所构成的集合. 因此，有 $S_X^+=S_X\cap X^+$，$S_{X^*}^+=S_{X^*}\cap P^+$. 对任意一个集合 G，$\overline{\overline{G}}$表示集合 G 的基数(势). 给定 $A\subseteq\mathbf{N}$，A 的特征函数 χ_A 可以看作是 ℓ_∞ 中的一个向量，记 $\chi_{\mathbf{N}}=\boldsymbol{e}$，$(\boldsymbol{e}_n)$表示 ℓ_∞ 中的标准

收稿日期：2015-04-03

通信作者：鲍玲鑫(1982-)，男，讲师，博士，主要从事基础数学泛函分析、Banach 空间几何的研究. E-mail：bolingxmu@sina.com.

基金项目：国家自然科学基金专项数学天元基金资助项目(11426064，11426061)；国家自然科学基金青年基金资助项目(11401227，11501108)；福建省自然科学基金资助项目(2015J01579)

单位向量. 设$(\boldsymbol{x}_n)\subset X$及$\boldsymbol{x}\in X$,对任意的$\varepsilon>0$,定义集合$A((\boldsymbol{x}_n),\boldsymbol{x},\varepsilon)=\{n\in\mathbf{N}:\|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}\|\geqslant\varepsilon\}$,简记为$A(\varepsilon)$.

定义 1[9]　设$\boldsymbol{A}\equiv(\boldsymbol{a}_i)_{i=1}^{\infty}\subset S_{\ell_1}^{+}$,且设$(\boldsymbol{x}_n)\subset X$及$\boldsymbol{x}\in X$. 如果对任意的$\varepsilon>0$,$\lim\limits_{i\to\infty}\langle\boldsymbol{a}_i,\chi_{A(\varepsilon)}\rangle=0$,则称序列$(\boldsymbol{x}_n)$**A**-收敛于$\boldsymbol{x}$.

注释 1　1) 若令定义中$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{e}_i)$,则**A**-收敛等价于经典的序列收敛.

2) 设$(a_{i,j})_{\mathbf{N}\times\mathbf{N}}$表示一个非负正则可和矩阵,满足$\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{i,j}=1$对任意的$i\in\mathbf{N}$. 如果令定义中$\boldsymbol{a}_i=(a_{i,j})_{j=1}^{\infty}(i=1,2,\cdots)$,则**A**-收敛即为经典意义下的**A**-统计收敛.

对于定义 1 中的序列$\boldsymbol{A}\equiv(\boldsymbol{a}_i)_{i=1}^{\infty}=((a_{i,j})_{j=1}^{\infty})_{i=1}^{\infty}\subset S_{\ell_1}^{+}\subset S_{\ell_\infty^*}^{+}$,定义$\ell_\infty$上的连续半范数$p_A$为

$$p_A(\boldsymbol{x})=\lim_{i\to\infty}\sup\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j}\,|\,\boldsymbol{x}(j)\,|,\qquad \boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}(j))\in\ell_\infty.$$

记$\boldsymbol{M}_A=\{\boldsymbol{x}^*\circ\chi_{(\cdot)}:\boldsymbol{x}^*\in\partial p_A(\boldsymbol{e})\}$,则文献[9]证明了$\boldsymbol{M}_A\subset\boldsymbol{P}(\mathbf{N},2^{\mathbf{N}})$,其中,$\boldsymbol{P}(\mathbf{N},2^{\mathbf{N}})$表示定义在可测空间$(\mathbf{N},2^{\mathbf{N}})$上所有有限可加概率测度构成的集合.

定理 1[9]　设$\boldsymbol{A}\equiv(\boldsymbol{a}_i)_{i=1}^{\infty}\subset S_{\ell_1}^{+}$,且$(\boldsymbol{x}_n)\subset X$以及$\boldsymbol{x}\in X$. 则序列$(\boldsymbol{x}_n)$**A**-收敛于$\boldsymbol{x}$当且仅当$(\boldsymbol{x}_n)$测度$\boldsymbol{M}_A$-收敛于$\boldsymbol{x}$.

若$\boldsymbol{I}\subset 2^{\mathbf{N}}$满足:1) 任意$A,B\in\boldsymbol{I}$,$A\cup B\in\boldsymbol{I}$;2) 任意的$A\in\boldsymbol{I}$及$B\subseteq A$,$B\in\boldsymbol{I}$,则称$\boldsymbol{I}$为$\mathbf{N}$上的一个理想. 如果理想$\boldsymbol{I}$还满足:$\boldsymbol{I}\neq\varnothing$($\mathbf{N}\notin\boldsymbol{I}$,包含所有单点集),则称$\boldsymbol{I}$为非平凡(真,统计型)理想. 对于上述定义的连续半范数p_A,令$\boldsymbol{I}_A=\{A\in 2^{\mathbf{N}}:p_A(\chi_A)=0\}$,则容易验证$\boldsymbol{I}_A$为$\mathbf{N}$上的一个非平凡的真理想. $\boldsymbol{I}_A$为统计型理想的充分必要条件参见文献[9]的定理 4.2. 定义

$$X_{\boldsymbol{I}_A}=\overline{\operatorname{span}}\{\chi_A:A\in\boldsymbol{I}_A\}\subset\ell_\infty.$$

令$\widetilde{P}=\{\tilde{\boldsymbol{x}}\in\ell_\infty/X_{\boldsymbol{I}_A}:\boldsymbol{x}\in\ell_\infty^{+}\}$表示商空间$(\ell_\infty/X_{\boldsymbol{I}_A},\|\cdot\|_Q)$的正锥以及$\widetilde{P}^{+}$表示其共轭锥. 定义$\ell_\infty$上的连续半范数$q_A$为

$$q_A(\boldsymbol{x})=\|\tilde{\boldsymbol{x}}\|_Q,\qquad \boldsymbol{x}\in\ell_\infty,\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}+X_{\boldsymbol{I}_A}.$$

设f是定义在X上的连续凸函数,则f在点$\boldsymbol{x}\in X$的次微分映射$\partial f(:X\to 2^{X^*})$定义为

$$\partial f(\boldsymbol{x})=\{\boldsymbol{x}^*\in X^*:f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x})\geqslant\langle\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}\rangle,\text{对任意的 }\boldsymbol{y}\in X\}.$$

性质 1 是经典的[10].

性质 1　设p是定义在X上连续的 Minkowski 泛函,则对任意给定$\boldsymbol{x}\in X$,有 1) $\partial f(\boldsymbol{x})$是非空$w^*$-紧凸集;2) $\boldsymbol{x}^*\in\partial f(\boldsymbol{x})$,当且仅当$\boldsymbol{x}^*\leqslant p$,且$\langle\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{x}\rangle=p(\boldsymbol{x})$.

定理 2　1) 对任意的$A\in 2^{\mathbf{N}}$,$p_A(\chi_A)=0$,当且仅当$q_A(\chi_A)=0$.

2) $\partial q_A(\boldsymbol{e})\subset\partial\|\boldsymbol{e}\|=S_{\ell_\infty^*}^{+}$.

3) 对任意的$\boldsymbol{x}\in\ell_\infty^{+}$,$q_A(\boldsymbol{x})=\sup\{\langle\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{x}\rangle:\boldsymbol{x}^*\in\partial q_A(\boldsymbol{e})\}=\sup\{\langle\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{x}\rangle:\boldsymbol{x}^*\in\operatorname{ext}\partial q_A(\boldsymbol{e})\}$. 其中,$\operatorname{ext}\partial q_A(\boldsymbol{e})$表示$\partial q_A(\boldsymbol{e})$的所有端点构成的集合.

证明　1) 对任意的$A\in 2^{\mathbf{N}}$,$p_A(\chi_A)=0\Rightarrow q_A(\chi_A)=0$是显然的. 设$q_A(\chi_A)=0$,则$\chi_A\in X_{\boldsymbol{I}_A}$. 从而对任意的$0<\varepsilon<1$,存在$\boldsymbol{x}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_j\chi_{A_j}\in\operatorname{span}\{\chi_A:A\in\boldsymbol{I}_A\}$,使$\|\chi_A-\boldsymbol{x}\|<\varepsilon$. 这意味着$A\subseteq\bigcup\limits_{j=1}^{n}A_j$. 因为$\boldsymbol{I}_A$是一个理想,$A\in\boldsymbol{I}_A$. 从而$p_A(\chi_A)=0$.

2) 根据文献[8]的引理 2.9 可知,$q_A(\boldsymbol{e})=\operatorname{dist}(\boldsymbol{e},X_{\boldsymbol{I}_A})=1=\|\boldsymbol{e}\|$. 另外,不难验证$q_A(\boldsymbol{x})\leqslant\|\boldsymbol{x}\|$对一切$\boldsymbol{x}\in\ell_\infty$成立. 根据性质 1 中 2)可知,$\partial q_A(\boldsymbol{e})\subset\partial\|\boldsymbol{e}\|$. $\partial\|\boldsymbol{e}\|=S_{\ell_\infty^*}^{+}$为文献[9]中命题 2.2 的一部分.

3) 首先,证明第一个"=". 设$X_{\boldsymbol{I}_A}^{\perp}$表示$X_{\boldsymbol{I}_A}$的零化子空间. 由性质 1 中 2)可知,$\partial q_A(\boldsymbol{e})\subset X_{\boldsymbol{I}_A}^{\perp}$. 从而,对于$\boldsymbol{x}\in\ell_\infty^{+}\cap X_{\boldsymbol{I}_A}$的情形结论成立是显然的. 设$\boldsymbol{x}\in\ell_\infty^{+}\setminus X_{\boldsymbol{I}_A}$,同样根据性质 1 中 2)可知

$$\sup\{\langle\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{x}\rangle:\boldsymbol{x}^*\in\partial q_A(\boldsymbol{e})\}\leqslant q_A(\boldsymbol{x}).$$

基于此,只需找到一个$\boldsymbol{x}^*\in\partial q_A(\boldsymbol{e})$使$\langle\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{x})=q_A(\boldsymbol{x}\rangle$,便可以保证第一个"="成立. 对于上述$\boldsymbol{x}\in\ell_\infty^{+}\setminus X_{\boldsymbol{I}_A}$,在商空间$\ell_\infty/X_{\boldsymbol{I}_A}$中,利用 Hahn-Banach 定理可知,存在$\tilde{\boldsymbol{x}}^*\in\widetilde{P}^{+}$使$\|\tilde{\boldsymbol{x}}^*\|=1$,并且$\langle\tilde{\boldsymbol{x}}^*,\tilde{\boldsymbol{x}}\rangle=\|\tilde{\boldsymbol{x}}\|$. 根据经典定理$(\ell_\infty/X_{\boldsymbol{I}_A})^*=X_{\boldsymbol{I}_A}^{\perp}$[11]可知,存在唯一的$\boldsymbol{x}^*\in X_{\boldsymbol{I}_A}^{\perp}$,使$\|\tilde{\boldsymbol{x}}^*\|=\|\boldsymbol{x}^*\|$及$\langle\tilde{\boldsymbol{x}}^*,\tilde{\boldsymbol{y}}\rangle=\langle\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}\rangle$对所有的$\boldsymbol{y}\in\ell_\infty$成立. 特别的,

$$\langle \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{x}\rangle = \langle \tilde{\boldsymbol{x}}^*, \tilde{\boldsymbol{x}}\rangle = \|\tilde{\boldsymbol{x}}\| = q_A(\boldsymbol{x}).$$

下面证明 $\boldsymbol{x}^* \in \partial q_A(\boldsymbol{e})$. 因 $\|\tilde{\boldsymbol{x}}^*\| = 1$,故有 $\langle \tilde{\boldsymbol{x}}^*, \tilde{\boldsymbol{e}}\rangle = 1$,即 $\langle \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{e}\rangle = 1$. 另外,对任意的 $\boldsymbol{y} \in \ell_\infty$,有

$$\langle \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}\rangle = \langle \tilde{\boldsymbol{x}}^*, \tilde{\boldsymbol{y}}\rangle \leqslant \|\tilde{\boldsymbol{y}}\| = q_A(\boldsymbol{y}).$$

再根据性质 1 中 2)可知,$\boldsymbol{x}^* \in \partial q_A(\boldsymbol{e})$.

对于第二个"$=$",注意到性质 1 中 1),$\partial q_A(\boldsymbol{e})$ 是一个非空的 w^*-紧凸集. 从而根据 Krein-Milman 定理得到第二个等号成立.

注释 2　由定理 2 中 2)可知,$\partial q_A(\boldsymbol{e}) \circ \chi_{(\cdot)} \subset \partial \|\boldsymbol{e}\| \circ \chi_{(\cdot)} = \boldsymbol{P}(\mathbf{N}, 2^{\mathbf{N}})$. 定义

$$\boldsymbol{P}(\mathbf{N}, 2^{\mathbf{N}}, \boldsymbol{I}_A) = \{\mu \in \boldsymbol{P}(\mathbf{N}, 2^{\mathbf{N}}) : \mu(A) = 0 \text{ 对所有的 } A \in \boldsymbol{I}_A\}.$$

根据定理 2 中 1),3),在文献[8]定理 2.3 的意义下,有 $\boldsymbol{P}(\mathbf{N}, 2^{\mathbf{N}}, \boldsymbol{I}_A) \cong \partial q_A(\boldsymbol{e})$. 即有 $\boldsymbol{P}(\mathbf{N}, 2^{\mathbf{N}}, \boldsymbol{I}_A) = \partial q_A(\boldsymbol{e}) \circ \chi_{(\cdot)}$.

令 $\boldsymbol{P}_{\text{ext}}(\mathbf{N}, 2^{\mathbf{N}}, \boldsymbol{I}_A) = \text{ext}\ \partial q_A(\boldsymbol{e}) \circ \chi_{(\cdot)}$. 下文中分别用 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{I}_A)$ 和 $\boldsymbol{P}_{\text{ext}}(\boldsymbol{I}_A)$ 表示 $\boldsymbol{P}(\mathbf{N}, 2^{\mathbf{N}}, \boldsymbol{I}_A)$ 和 $\boldsymbol{P}_{\text{ext}}(\mathbf{N}, 2^{\mathbf{N}}, \boldsymbol{I}_A)$.

定理 3　设 $\boldsymbol{A} \equiv (\boldsymbol{a}_i)_{i=1}^{\infty} \subset S_{\ell_1}^+$,且设 $(\boldsymbol{x}_n) \subset X$ 及 $\boldsymbol{x} \in X$,则下列说法等价:1) $(\boldsymbol{x}_n)$ $\boldsymbol{A}$-收敛于 $\boldsymbol{x}$;2) $(\boldsymbol{x}_n)$ $\boldsymbol{M}_A$-收敛于 $\boldsymbol{x}$;3) $(\boldsymbol{x}_n)$ $\boldsymbol{I}_A$-收敛于 $\boldsymbol{x}$,即对任意 $\varepsilon > 0$,$A(\varepsilon) \in \boldsymbol{I}_A$;4) $(\boldsymbol{x}_n)$ $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{I}_A)$-收敛于 $\boldsymbol{x}$;5) $(\boldsymbol{x}_n)$ $\boldsymbol{P}_{\text{ext}}(\boldsymbol{I}_A)$-收敛 $\boldsymbol{x}$.

证明　1)$\Leftrightarrow$2) 即为定理 1.

2)$\Leftrightarrow$3) 由性质 1,定理 2 以及 $\boldsymbol{I}_A$ 的定义即可验证.

3)$\Leftrightarrow$4) 注意到注释 2 的 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{I}_A) \cong \partial q_A(\boldsymbol{e})$ 即可得到.

4)$\Leftrightarrow$5) 只需利用定理 2 中 3)即可验证.

2　A-收敛与几乎处处收敛

作为文献[12]定理 1.5 的特殊情形,有如下结论成立.

定理 4　设 $\boldsymbol{x}^* \in \partial q_A(\boldsymbol{e})$,则 $\boldsymbol{x}^* \in \text{ext}\ \partial q_A(\boldsymbol{e})$ 当且仅当 $\boldsymbol{x}^*$ 为 ℓ_∞ 上的保正交不变的泛函,即对任意的 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}(n))$,$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{y}(n)) \in \ell_\infty$ 满足:$\boldsymbol{xy} = (\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{y}(n)) = 0$,$\langle \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{xy}\rangle = 0$.

基于此,可以得到如下结论.

定理 5　设 $\boldsymbol{x}^* \in \text{ext}\ \partial q_A(\boldsymbol{e})$,则或 $\boldsymbol{x}^* \in c_0^{\perp}$,或 $\boldsymbol{x}^* \in \ell_1$. 当 $\boldsymbol{x}^* \in \ell_1$ 时,存在某个 $n \in \mathbf{N}$ 使 $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{e}_n$.

证明　设 $\boldsymbol{x}^* \in \text{ext}\ \partial q_A(\boldsymbol{e})$,若 $\langle \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{e}_n\rangle = 0$ 对一切 $n \in \mathbf{N}$ 成立,则此时有 $\boldsymbol{x}^* \in c_0^{\perp}$. 若存在某个 $n_0 \in \mathbf{N}$ 使 $\langle \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{e}_{n_0}\rangle \neq 0$,根据定理 4 可知,$\langle \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{e}_{n_0}\rangle \langle \boldsymbol{x}^*, \chi_{\mathbf{N}\setminus\{n_0\}}\rangle = 0$. 从而有 $\langle \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{e}_{n_0}\rangle = 1$ 及 $\langle \boldsymbol{x}^*, \chi_{\mathbf{N}\setminus\{n_0\}}\rangle = 0$. 如果 $\boldsymbol{x}^* \in \ell_1$,且注意到定理 2 中 2),可得 $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{e}_{n_0}$. 下面只需证明 $\boldsymbol{x}^* \in \ell_1$. 因为 $\ell_\infty^* = \ell_1 \oplus_{\ell_1} c_0^{\perp}$[11],所以存在正分解 $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x}_1^* + \boldsymbol{x}_2^*$,其中,$\boldsymbol{x}_1^* \in \ell_1 \cap P^+$ 及 $\boldsymbol{x}_2^* \in c_0^{\perp} \cap P^+$. 从而有

$$1 = \langle \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{e}_{n_0}\rangle = \langle \boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{e}_{n_0}\rangle + \langle \boldsymbol{x}_2^*, \boldsymbol{e}_{n_0}\rangle = \langle \boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{e}_{n_0}\rangle,$$

以及

$$0 = \langle \boldsymbol{x}^*, \chi_{\mathbf{N}\setminus\{n_0\}}\rangle = \langle \boldsymbol{x}_1^*, \chi_{\mathbf{N}\setminus\{n_0\}}\rangle + \langle \boldsymbol{x}_2^*, \chi_{\mathbf{N}\setminus\{n_0\}}\rangle = \langle \boldsymbol{x}_1^*, \chi_{\mathbf{N}\setminus\{n_0\}}\rangle.$$

由定理 2 中 2)可知,$\boldsymbol{x}_2^*$ 是正线性泛函,从而具有单调性. 于是对任意的 $\boldsymbol{x} \in \ell_\infty$,有

$$\langle \boldsymbol{x}_2^*, \boldsymbol{x}\rangle = \langle \boldsymbol{x}_2^*, \boldsymbol{x}\boldsymbol{e}_{n_0}\rangle + \langle \boldsymbol{x}_2^*, \boldsymbol{x}\chi_{\mathbf{N}\setminus\{n_0\}}\rangle = 0.$$

因为 $\boldsymbol{x}$ 的选取是任意的,所以 $\boldsymbol{x}_2^* = 0$,故有 $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x}_1^* \in \ell_1$.

注释 3　对任意的 $\boldsymbol{x}^* \in \text{ext}\ \partial q_A(\boldsymbol{e})$,$\boldsymbol{x}^*$ 要么是纯连续,要么是 w^*-序列连续的. 从而对任意的 $\mu \in \boldsymbol{P}_{\text{ext}}(\boldsymbol{I}_A)$,$\mu$ 要么是可数可加测度,要么是纯有限可加测度. 其中,相关概念与性质可以参考文献[13].

$\boldsymbol{A}$-收敛某种意义上说具有选择收敛性,它与经典收敛的差异可以是巨大的. 如选取 $\boldsymbol{A} \equiv (\boldsymbol{a}_i)_{i=1}^{\infty} \subset S_{\ell_1}^+$ 使 $(\boldsymbol{a}_i)$ 按范收敛于 $\boldsymbol{e}_1$,则对任意一个序列 $(\boldsymbol{x}_n) \subset X$ 都是 $\boldsymbol{A}$-收敛的($\boldsymbol{A}$-收敛于 $\boldsymbol{x}_1$),但不能保证存在 $(\boldsymbol{x}_n)$ 子列按范收敛于 $\boldsymbol{x}_1$. 另外,设序列 $(\boldsymbol{x}_n) \subset X$ 按范收敛于 $\boldsymbol{x} \in X$,当 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_1$ 时,$(\boldsymbol{x}_n)$ 不会 $\boldsymbol{A}$-收敛于 $\boldsymbol{x}_1$. 文中将这种类型的 $\boldsymbol{A}$-收敛称为退化的.

定义 2　设 $\boldsymbol{A} \equiv (\boldsymbol{a}_i)_{i=1}^{\infty} \subset S_{\ell_1}^+$ 满足:$\text{ext}\ \partial q_A(\boldsymbol{e}) \subset \ell_1$,且 $\overline{\overline{\text{ext}\ \partial q_A(\boldsymbol{e})}} < \infty$,则称该 $\boldsymbol{A}$-收敛是退化的. 否则,称为非退化的.

这里称 $\boldsymbol{A}$-收敛为退化的原因是它等价于由有限个退化的测度定义的收敛. 称 $A\in 2^{\mathbf{N}}$ 为 $\boldsymbol{P}_{\text{ext}}(\boldsymbol{I}_A)$-零测集是指对任意的 $\mu\in\boldsymbol{P}_{\text{ext}}(\boldsymbol{I}_A)$ 都有 $\mu(A)=0$.

定义 3　设 $\boldsymbol{A}\equiv(\boldsymbol{a}_i)_{i=1}^{\infty}\subset S_{\ell_1}^{+}$，且设 $(\boldsymbol{x}_n)\subset X$ 及 $\boldsymbol{x}\in X$. 如果存在 $\boldsymbol{P}_{\text{ext}}(\boldsymbol{I}_A)$-零测集 $G\subset\mathbf{N}$ 使 $(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbf{N}\setminus G}$ 按范数收敛于 $\boldsymbol{x}$，则称 $(\boldsymbol{x}_n)$ $\boldsymbol{P}_{\text{ext}}(\boldsymbol{I}_A)$-几乎处处收敛于 $\boldsymbol{x}$.

注释 4　由定理 3 及定义 3 可知，序列 $(\boldsymbol{x}_n)\subset X$ 为 $\boldsymbol{P}_{\text{ext}}(\boldsymbol{I}_A)$-几乎处处收敛于 $\boldsymbol{x}$ 总是意味着 $(\boldsymbol{x}_n)$ $\boldsymbol{A}$-收敛于 $\boldsymbol{x}$.

下面给出 $\boldsymbol{A}$-收敛为几乎处处收敛的一个充分必要条件.

定理 6　设 $\boldsymbol{A}\equiv(\boldsymbol{a}_i)_{i=1}^{\infty}\subset S_{\ell_1}^{+}$，且设 $(\boldsymbol{x}_n)\subset X$ 及 $\boldsymbol{x}\in X$. 则该 $\boldsymbol{A}$-收敛为非退化的当且仅当 $(\boldsymbol{x}_n)$ $\boldsymbol{A}$-收敛于 $\boldsymbol{x}$ 意味着 $(\boldsymbol{x}_n)$ 为 $\boldsymbol{P}_{\text{ext}}(\boldsymbol{I}_A)$-几乎处处收敛于 $\boldsymbol{x}$. 从而，当 $\boldsymbol{A}$-收敛为非退化时，$\boldsymbol{A}$-收敛与 $\boldsymbol{P}_{\text{ext}}(\boldsymbol{I}_A)$-几乎处处收敛是等价的.

证明　充分性是显然的. 因为如果 $\boldsymbol{A}$-收敛是退化的，根据定理 5 可知，存在有限个正整数 $A\equiv\{n_1,n_2,\cdots,n_k\}$ 使 $\boldsymbol{P}_{\text{ext}}(\boldsymbol{I}_A)=\{\boldsymbol{e}_{n_1}\circ\chi_{(\cdot)},\boldsymbol{e}_{n_2}\circ\chi_{(\cdot)},\cdots,\boldsymbol{e}_{n_k}\circ\chi_{(\cdot)}\}$. 对任意的 $\boldsymbol{x}_0\in X\setminus\{0\}$，定义序列 $\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{x}_0$，$n\in A$；$=0$，$n\in\mathbf{N}\setminus A$. 则不难验证，$(\boldsymbol{x}_n)$ $\boldsymbol{A}$-收敛于 $\boldsymbol{x}_0$，但不会 $\boldsymbol{P}_{\text{ext}}(\boldsymbol{I}_A)$-几乎处处收敛于 $\boldsymbol{x}_0$. 这是一个矛盾.

往证必要性. 设 $(\boldsymbol{x}_n)$ $\boldsymbol{A}$-收敛于 $\boldsymbol{x}$，且令

$$C_0=\{n\in\mathbf{N}:\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}\|\geqslant 1\},\qquad C_k=\{n\in\mathbf{N}:2^{-k}<\|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}\|\leqslant 2^{-(k-1)}\},(k=1,2,\cdots).$$

根据定理 3 可知，$\{C_k\}_{k=0}^{\infty}$ 是一列两两不交的 $\boldsymbol{P}_{\text{ext}}(\boldsymbol{I}_A)$-零测集. 而且依 $\boldsymbol{A}$-收敛的定义，$\lim\limits_{i\to\infty}\langle\boldsymbol{a}_i,\chi_{C_k}\rangle=0$ 对任意的 $k(=0,1,2,\cdots)$ 成立. 从而可以找到一个严格单增的子列 $(m_k)\subset\mathbf{N}$ 使对任意 k，有

$$\sum_{n=0}^{k}\langle\boldsymbol{a}_i,\chi_{C_n}\rangle<2^{-k},\qquad\forall\, i\geqslant m_k.$$

另外，因为 $\boldsymbol{A}\equiv(\boldsymbol{a}_i)_{i=1}^{\infty}\subset S_{\ell_1}^{+}$，所以存在一个严格单增的子列 $(J(i))\subset\mathbf{N}$，使

$$\sum_{j=J(i)}^{\infty}a_{i,j}<2^{-i},\qquad\forall\, i\in\mathbf{N}.$$

令 $B_k=(C_k\setminus\{1,2,\cdots,J(m_k)\}(k(=0,1,2,\cdots))$，且令 $B=\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}B_k$. 则断言：1) B 为 $\boldsymbol{P}_{\text{ext}}(\boldsymbol{I}_A)$-零测集；2) $\overline{\overline{\mathbf{N}\setminus B}}=\infty$；3) $(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbf{N}\setminus B}$（按通常范数意义下）收敛于 $\boldsymbol{x}$.

下面证明上述 3 个断言.

1) 对任意 $i\geqslant m_0$，都存在唯一的 $k(i)\in\mathbf{N}$，使 $m_{k(i)}\leqslant i<m_{k(i)+1}$. 另外，当 $j\leqslant J(m_{k(i)+1})$ 及 $k>k(i)$ 时，$j\notin B_k$. 故而

$$\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j}\chi_B(j)=\sum_{j=1}^{J(m_{k(i)+1})}a_{i,j}\chi_B(j)+\sum_{j=J(m_{k(i)+1})+1}^{\infty}a_{i,j}\chi_B(j)\leqslant\sum_{j=1}^{J(m_{k(i)+1})}a_{i,j}\chi_B(j)+\sum_{j=J(i)+1}^{\infty}a_{i,j}<$$
$$\sum_{j=1}^{J(m_{k(i)+1})}\chi_B(j)+2^{-i}\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j}\sum_{k=0}^{k(i)}\chi_{C_k}(j)+2^{-i}=\sum_{k=0}^{k(i)}(a_i,\chi_{C_k})+2^{-i}<2^{-k(i)}+2^{-i}.$$

注意到 $i\to\infty$ 时，$k(i)\to\infty$. 根据定理 2 中 1)，3) 可知

$$p_A(\chi_B)=0=q_A(\chi_B)=\sup\{(\boldsymbol{x}^*,\chi_B):\boldsymbol{x}^*\in\text{ext}\,\partial q_A(\boldsymbol{e})\}.$$

即得到 B 为 $\boldsymbol{P}_{\text{ext}}(\boldsymbol{I}_A)$-零测集.

2) 根据 1) 可知，$\mu(\mathbf{N}\setminus B)=1$ 对所有 $\mu\in\boldsymbol{P}_{\text{ext}}(\boldsymbol{I}_A)$，即对任意 $\boldsymbol{x}^*\in\text{ext}\,\partial q_A(\boldsymbol{e})$，$\langle\boldsymbol{x}^*,\chi_{\mathbf{N}\setminus B}\rangle=1$. 如果 $\overline{\overline{\mathbf{N}\setminus B}}<\infty$，记 $\mathbf{N}\setminus B=\{n_1,n_2,\cdots,n_k\}$. 对任意给定 $\boldsymbol{x}^*\in\text{ext}\,\partial q_A(\boldsymbol{e})$，$\langle\boldsymbol{x}^*,\chi_{\mathbf{N}\setminus B}\rangle=\sum\limits_{j=1}^{k}\langle\boldsymbol{x}^*,\chi_{\{n_j\}}\rangle=1$. 根据定理 4（$\boldsymbol{x}^*$ 的正交性）可知，必然存在 $\mathbf{N}\setminus B$ 中的某个 n_k，使 $\langle\boldsymbol{x}^*,\chi_{\{n_k\}}\rangle=1$. 从而根据定理 5 可知，$\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{e}_{n_k}\in\ell_1$. 注意到 $\boldsymbol{x}^*$ 的选取是任意的，故而该 $\boldsymbol{A}$-收敛为退化的，这与定理假设相矛盾.

3) 对任意的 $0<\varepsilon<1$，存在 $m\in\mathbf{N}$，使 $2^{-m}<\varepsilon\leqslant 2^{-(m-1)}$. 从而有 $A(\varepsilon)\subset\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}C_k$，其中，$A(\varepsilon)=\{n\in\mathbf{N}:\|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}\|\geqslant\varepsilon\}$. 进一步地，$\overline{\overline{A(\varepsilon)\setminus\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}B_k}}<\infty$. 故而 $\overline{\overline{A(\varepsilon)\setminus B}}<\infty$，这意味着 $(\boldsymbol{x}_n)_{m\in\mathbf{N}\setminus B}$（按通常范数意义下）收敛于 $\boldsymbol{x}$.

推论 1　经典统计收敛、$\boldsymbol{A}$-统计收敛（包括 lacunary-统计收敛和 λ-统计收敛）在统计测度意义下都

是几乎处处收敛的.

参考文献:

[1] FAST H. Sur la convergence statistique[J]. Colloq Math,1951,2:241-244.

[2] STEINHAUS H. Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique[J]. Colloq Math,1951,2:73-74.

[3] CONNOR J. On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence[J]. Canad Math Bull,1989,32(2):194-198.

[4] FRIDY J,ORHAN C. Lacunary statistical convergence[J]. Pacific J Math,1993,160(1):43-51.

[5] KOSTYRKO P,SALAT T,WILCZYNSKI W. I-convergence[J]. Real Anal Exchange,2000/2001,26(2):669-689.

[6] CHENG Lixin,LIN Guochen,LAN Yongyi. Measure theory of statistical convergence[J]. Sci China Ser A,2008,51(12):2285-2303.

[7] CHENG Lixin,LIN Guochen,SHI Huihua. On real-valued measures of statistical type and their applications to statistical convergence[J]. Mathematical and Computer Modelling,2009,50:116-122.

[8] BAO Lingxin,CHENG Lixin. On statistical measure theory[J]. J Math Anal Appl,2013,407:413-424.

[9] BAO Lingxin,LIN Lihua. On convergences[J]. Journal of Mathmatical Study,2013,46:116-125.

[10] CHENG Lixin,SHI Shuzhong,LEE E. Generic Frechet differentiability of convex functions on non-Asplund spaces[J]. J Math Anal Appl,1997,214(2):367-377.

[11] HOLMES R B. Geometric functional analysis and its appications[M]. New York:Sringer-Verlag,1975:123-124,129-130.

[12] BAO Lingxin. Ideal convergence and almost usual convergence[EB/OL]. [2015-06-01]. http://advmath. pku. edu. cn/CN/10. 11845/sxjz. 2015061b.

[13] CHENG Lixin,SHI Huihua. A functional characterization of measures and the Banach-Ulam problem[J]. J Math Anal Appl,2011,374:558-565.

On *A*-Convergence and Almost Usual Convergence

BAO Lingxin[1], SHI Huihua[2]

(1. School of Computer and Information, Fujian Agriculture and Forestry University, Fuzhou 350002, China;
2. School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Let $\boldsymbol{A}\equiv(\boldsymbol{a}_i)_{i=1}^{\infty}\subset S_{\ell_1}^{+}$, a sequence $(\boldsymbol{x}_n)$ of points in a Banach X is said to be $\boldsymbol{A}$-convergent to $\boldsymbol{x}\in X$ provided that for any $\varepsilon>0$, $\lim\limits_{i\to\infty}\langle \boldsymbol{a}_i,\chi_{A(\varepsilon)}\rangle=0$, where $A(\varepsilon)=\{n\in\mathbf{N}:\ \|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}\|\geqslant\varepsilon\}$. In this paper, we give two different approaches of $\boldsymbol{A}$-convergence via ideal on $\mathbf{N}$ and via extreme measures. We show that for any $\boldsymbol{A}\equiv(\boldsymbol{a}_i)_{i=1}^{\infty}\subset S_{\ell_1}^{+}$, there exist an ideal $\boldsymbol{I}_A$ and a collection $\boldsymbol{P}_{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{I}_A)$ of extreme probability measures such that the $\boldsymbol{A}$-convergence, the ideal $\boldsymbol{I}_A$-convergence and the measure $\boldsymbol{P}_{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{I}_A)$-convergence are equivalent. We also show that $\boldsymbol{A}$-convergence equivalent to $\boldsymbol{P}_{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{I}_A)$-almost usual convergence if and only if it is nondegenerate.

Keywords: statistical convergence; ideal convergence; almost usual convergence; extreme measures; Banach space

(责任编辑:钱筠 英文审校:黄心中)