

文章编号:1000-5013(2015)05-0603-06

doi:10.11830/ISSN.1000-5013.2015.05.0603

调和映照与像域为线性连结的 剪切函数的关系

占龙俊, 黄心中

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 为单位圆盘 $D=\{z||z|<1\}$ 上的局部单叶调和函数,若剪切函数 $h(z)-g(z)$ 在 D 上单叶且像域具有 M 线性连结,研究当伸缩商 $|\omega(z)|=|\frac{g'(z)}{h'(z)}|$ 在一定条件下, $h(z)$, $F_\lambda(z)=h(z)+\lambda\times\overline{g(z)}$ 等函数的单叶性及线性连结性问题,改进推广了陈少林的相应结果.

关键词: 调和映照; 线性连结; 调和拟共形映照; α 近于凸.

中图分类号: O174.51; O174.55

文献标志码: A

1 预备知识

设 $f(z)$ 是平面单连通区域 Ω 上的复值调和映照, Lewy^[1] 提出了 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$, 其中: $h(z)$ 和 $g(z)$ 是 Ω 上的解析函数, 称 $h(z)$ 是 $f(z)$ 的解析部分, $g(z)$ 是 $f(z)$ 的共轭解析部分. 若 $f(z)$ 在 Ω 上局部单叶, 则 $f(z)$ 的 Jacobian 函数表示为 $J_f(z)=|f_z(z)|^2-|f_{\bar{z}}(z)|^2\neq 0$. 当 $J_f(z)>0$ 时, $f(z)$ 为 Ω 上保向局部单叶的.

对于单连通区域 Ω , 如果存在常数 $M\in[1, \infty)$, 对于任意的两点 $w_1, w_2\in\Omega$, 存在 Ω 上的可求长曲线 γ , 使得 γ 的弧长 $l(\gamma)$ 满足 $l(\gamma)\leq M|w_1-w_2|$, 称 Ω 为 M 线性连结区域.

研究局部单叶调和映照 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 何时为单叶, 何时为调和拟共形映照引起了许多学者的兴趣^[2-5]. 单叶调和映照 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 满足 $|\frac{g'(z)}{h'(z)}|\leq k<1$, $f(z)$ 就是调和拟共形映照. Chuaqui^[2] 证明了定理 A, B.

定理 A 设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 是单位圆盘 $D=\{z||z|<1\}$ 上的保向单叶调和映照, $f(D)$ 是 M 线性连结区域, 当 $|\frac{g'(z)}{h'(z)}|\leq \frac{1}{1+M}$ 时, $h(z)$ 在 D 上单叶.

定理 B 设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 是 D 上保向单叶调和映照, $f(D)$ 是 M 线性连结区域, 当 $|\frac{g'(z)}{h'(z)}|\leq \frac{1}{1+2M}$ 时, 则对任何 $\theta\in\mathbf{R}$, $F_1(z)=h(z)+e^{i\theta}\overline{g(z)}$, $\theta\in[0, 2\pi)$ 为 D 上的单叶调和映照.

Huang^[3] 对 Chuaqui 等^[2] 所得的结论进一步推广, 得到不少有趣的成果. Huang^[3] 还特别指出, 在一定条件下, $f(D)$ 的线性连结性与 $f(z)$ 的拟共形性, 及 $h(D)$ 线性连结性与 $h(z)$ 的单叶性是一对不变量. 文献[6-8] 分别对单叶调和映照的性质及稳定性问题进行研究.

根据 Pommerenke^[9] 的定义, 令 $\alpha\in[0, 1)$, 称 $f(z)$ 为 α 近于凸, 若 $f(z)$ 为 D 上单叶解析映照, 且满足 $|\arg[\frac{f'(z)}{h'(z)}]|\leq \frac{\alpha\pi}{2}$ ($z\in D$), 其中: $h(z)$ 是单叶凸映照.

收稿日期: 2015-01-05

通信作者: 黄心中(1957-), 男, 教授, 博士, 主要从事函数论的研究. E-mail: huangxz@hqu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11471128); 福建省自然科学基金资助项目(2014J01013)

Chen 等^[10]证明了定理 C^[2].

定理 C 对于 $\alpha \in [0, 1)$, 令 $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ 是 D 上调和映照, 其中: $h(z)$ 和 $g(z)$ 是 D 上的解析函数.

1) 若 $h(z) - g(z)$ 在 D 上为 α 近于凸, $|\frac{g'(z)}{h'(z)}| \leq M_1, z \in D$, 则 $h(z)$ 是单叶的且 $h(D)$ 是 M_2 线性连结区域, 其中:

$$M_1 < \frac{\cos \frac{\alpha \pi}{2}}{1 + \cos \frac{\alpha \pi}{2}}; \quad M_2 = \frac{1}{\cos \frac{\alpha \pi}{2} - M_1 (1 + \cos \frac{\alpha \pi}{2})}.$$

2) 若 $h(z) - g(z)$ 在 D 上为 α 近于凸, $|\frac{g'(z)}{h'(z)}| \leq M_3, z \in D$, 则对于任意 $\theta \in [0, 2\pi)$, $f_\theta(z) = h(z) + e^{i\theta} \overline{g(z)}$ 是 K 调和拟共形映照, 且 $f_\theta(D)$ 是 M_4 线性连结区域, 其中:

$$K = \frac{1 + M_3}{1 - M_3}; \quad M_3 < \frac{\cos \frac{\alpha \pi}{2}}{2 + \cos \frac{\alpha \pi}{2}}; \quad M_4 = \frac{1 + M_3}{\cos \frac{\alpha \pi}{2} - M_3 (2 + \cos \frac{\alpha \pi}{2})}.$$

对于给定的局部单叶调和映照 $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$, 对 $f(z)$ 的水平剪切函数 $h(z) - g(z)$ 在 D 上单叶性, 以及像域具有 M 线性连结性与 $f(z)$ 的相应特征进行研究, 在复伸张 $|\frac{g'(z)}{h'(z)}|$ 满足一定条件下, 导出 $h(z)$ 与 $f(z)$ 之间的一些关系, 并得到 $f(z)$ 具有稳定单叶性的判别法等结果.

2 主要结果及证明

定理 1 假设 $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ 为 D 上的局部单叶调和映照, 其中: $h(z)$ 与 $g(z)$ 在 D 上解析, 若 $F(z) = h(z) - g(z)$ 在 D 上单叶, 且 $F(D)$ 是 M 线性连结区域, 则有

- 1) 当 $|\omega(z)| = |\frac{g'(z)}{h'(z)}| \leq \frac{1}{1+tM} (t > 1)$ 时, 则 $h(z)$ 在 D 上单叶, 且 $h(D)$ 是 $\frac{1+tM}{t-1}$ 线性连结区域.
- 2) 当 $|\omega(z)| = |\frac{g'(z)}{h'(z)}| \leq \frac{1}{1+tM} (t > 2)$ 时, 则 $f(z)$ 在 D 上为拟共形映照, 且 $f(D)$ 是 $\frac{2+tM}{t-2}$ 线性连结区域.

证明 假设 $F(z) = h(z) - g(z)$, 若 $h(z)$ 在 D 上不单叶, 则存在 $z_1, z_2 \in D$, 且 $z_1 \neq z_2$, 使得 $h(z_1) = h(z_2)$. 由 $h(z) = F(z) + g(z)$, 则 $F(z_2) - F(z_1) = g(z_1) - g(z_2)$. 根据 $F(z)$ 的单叶性, 令 $w = F(z)$ 有 $w_2 - w_1 = g(F^{-1}(w_1)) - g(F^{-1}(w_2))$. 由于 $F(D)$ 是 M -线性连结区域. 则存在连结 $w_1 - w_2 \in F(D)$ 的可求长曲线 $\gamma \in F(D)$ 满足 $l(\gamma) \leq M |w_1 - w_2|$, 即

$$\begin{aligned} |g(F^{-1}(w_1)) - g(F^{-1}(w_2))| &= \left| \int_\gamma (g(F^{-1}(w)))' dw \right| \leq \\ &\int_\gamma \left| \frac{g'(F^{-1}(w))}{h'(F^{-1}(w)) - g'(F^{-1}(w))} \right| |dw| \leq \\ &\int_\gamma \frac{|\omega(F^{-1}(w))|}{1 - |\omega(F^{-1}(w))|} |dw| \leq \frac{1}{tM} l(\gamma) \leq \\ &\frac{1}{t} |w_1 - w_2| < |w_1 - w_2|. \end{aligned}$$

这与 $w_2 - w_1 = g(F^{-1}(w_1)) - g(F^{-1}(w_2))$ 矛盾, 从而说明 $h(z)$ 在 D 上单叶.

令 $\xi = h(F^{-1}(w)) = w + g(F^{-1}(w))$, 任意 $\xi_1, \xi_2 \in h(D)$, 存在 $w_1, w_2 \in F(D)$, 使 $\xi_1 = h(F^{-1}(w_1))$, $\xi_2 = h(F^{-1}(w_2))$. 由于 $F(D)$ 是 M -线性的连结区域, 则存在 γ 为连结 w_1, w_2 的曲线, 使 $l(\gamma) \leq M |w_1 - w_2|$. 取 $\Gamma = h(F^{-1}(\gamma))$, 有

$$l(\Gamma) = \int_\Gamma |d\xi| = \int_\gamma |(h(F^{-1}(w)))'| |dw| \leq \int_\gamma \frac{|h'(F^{-1}(w))|}{|h'(F^{-1}(w)) - g'(F^{-1}(w))|} |dw| =$$

$$\int_{\gamma} \frac{1}{1-|\omega(F^{-1}(w))|} |dw| \leq \frac{1+tM}{tM} l(\gamma) \leq \frac{1+tM}{t} |w_1 - w_2|.$$

又

$$\begin{aligned} |\xi_1 - \xi_2| &\geq |w_1 - w_2| - |g(F^{-1}(w_1)) - g(F^{-1}(w_2))| \geq \\ &|w_1 - w_2| - \int_{\gamma} |g(F^{-1}(w_1))'| |dw| \geq |w_1 - w_2| - \\ &\int_{\gamma} \frac{1}{tM} |dw| \geq |w_1 - w_2| - \frac{1}{t} |w_1 - w_2| = \frac{t-1}{t} |w_1 - w_2|, \end{aligned}$$

得 $l(\Gamma) \leq \frac{1+tM}{t-1} |\xi_1 - \xi_2|$, 则 $h(D)$ 是 $\frac{1+tM}{t-1}$ 线性连结区域. 故结论 1) 成立.

由于 $|\frac{g'(z)}{h'(z)}| \leq \frac{1}{1+tM}$, 故只要证明 $f(z)$ 在 D 上单叶. 若 $f(z)$ 在 D 上不单叶, 则存在 $z_1, z_2 \in D$, 且 $z_1 \neq z_2$, 使 $f(z_1) = f(z_2)$. 那么 $w_2 - w_1 = g(F^{-1}(w_1)) - g(F^{-1}(w_2)) + \overline{g(F^{-1}(w_1)) - g(F^{-1}(w_2))}$, 其中: $w = F(z)$. 由于 $F(D)$ 是 M -线性连结区域, 则存在连结 $w_1, w_2 \in F(D)$ 的可求长曲线 $\gamma \in F(D)$ 满足: $l(\gamma) \leq M |w_1 - w_2|$, 即

$$\begin{aligned} |g(F^{-1}(w_1)) - g(F^{-1}(w_2)) + \overline{g(F^{-1}(w_1)) - g(F^{-1}(w_2))}| &\leq 2 \left| \int_{\gamma} (g(F^{-1}(w)))' dw \right| \leq \\ &2 \int_{\gamma} \left| \frac{g'(F^{-1}(w))}{h'(F^{-1}(w)) - g'(F^{-1}(w))} \right| |dw| \leq \\ &\frac{2}{tM} l(\gamma) \leq \frac{2}{t} |w_1 - w_2| < |w_1 - w_2|. \end{aligned}$$

这与 $w_2 - w_1 = g(F^{-1}(w_1)) - g(F^{-1}(w_2)) + \overline{g(F^{-1}(w_1)) - g(F^{-1}(w_2))}$ 矛盾, 说明 $f(z)$ 在 D 上单叶. 从而 $f(z)$ 是 D 上的 $2+tM/(tM)$ 拟共形映照.

令 $\xi = f(F^{-1}(w)) = w + g(F^{-1}(w)) + \overline{g(F^{-1}(w))}$, 任意 $\xi_1, \xi_2 \in f(D)$, 由于 $f(z)$ 与 $F(z)$ 单叶, 存在 $w_1, w_2 \in F(D)$, 使 $\xi_i = f(F^{-1}(w_i))$, $i=1, 2$. 根据 $F(D)$ 的线性连结性, 存在 γ 为连结 w_1, w_2 的曲线, 使 $l(\gamma) \leq M |w_1 - w_2|$, 取 $\Gamma_1 = h(F^{-1}(\gamma))$, 有

$$\begin{aligned} l(\Gamma_1) &\leq \int_{\Gamma_1} |d\xi| = \int_{\gamma} (|\xi_w| + |\xi_{\bar{w}}|) |dw| \leq \int_{\gamma} \left| \frac{h'(F^{-1}(w))}{h'(F^{-1}(w))} \right| + \left| \frac{g'(F^{-1}(w))}{g'(F^{-1}(w))} \right| |dw| = \\ &\int_{\gamma} \frac{1+|\omega(F^{-1}(w))|}{1-|\omega(F^{-1}(w))|} |dw| \leq \frac{2+tM}{tM} l(\gamma) \leq \frac{2+tM}{t} |w_1 - w_2|. \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} |\xi_1 - \xi_2| &\geq |w_1 - w_2| - |g(F^{-1}(w_1)) - g(F^{-1}(w_2)) + \overline{g(F^{-1}(w_1)) - g(F^{-1}(w_2))}| \geq \\ &|w_1 - w_2| - 2 \int_{\gamma} |g(F^{-1}(w_1))'| |dw| \geq |w_1 - w_2| - 2 \int_{\gamma} \frac{1}{tM} |dw| \geq \\ &\frac{t-2}{t} |w_1 - w_2|, \end{aligned}$$

得 $l(\Gamma_1) \leq \frac{2+tM}{t-2} |\xi_1 - \xi_2|$, 则 $f(D)$ 是 $\frac{2+tM}{t-2}$ 线性连结区域. 定理 1 证毕.

相应于定理 C 的结果, 进一步研究其参数化的情况, 得到定理 2.

定理 2 设 $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ 为 D 上的局部单叶调和映照, 其中: $h(z)$ 与 $g(z)$ 在 D 上解析, 并且满足对于 $\alpha \in [0, 1)$, 若 $F(z) = h(z) - g(z)$ 在 D 上 α 近于凸, 有

$$1) \text{ 当 } |\omega(z)| = \left| \frac{g'(z)}{h'(z)} \right| \leq \frac{\cos \frac{\alpha\pi}{2}}{t + \cos \frac{\alpha\pi}{2}} (t > 1) \text{ 时, 则 } h(z) \text{ 在 } D \text{ 上单叶, 并且 } h(D) \text{ 是 } \frac{t + \cos \frac{\alpha\pi}{2}}{(t-1)\cos \frac{\alpha\pi}{2}} \text{ 线性}$$

连结区域.

$$2) \text{ 当 } |\omega(z)| = \left| \frac{g'(z)}{h'(z)} \right| \leq \frac{\cos \frac{\alpha\pi}{2}}{t + \cos \frac{\alpha\pi}{2}} (t > 2) \text{ 时, 则 } f_{\theta}(z) = h(z) + e^{i\theta} \overline{g(z)} \text{ 在 } D \text{ 上为调和拟共形映照,}$$

并且 $f_{\theta}(D)$ 是 $\frac{t+\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{(t-2)\cos\frac{\alpha\pi}{2}}$ 线性连结区域.

证明 因 $F(z)$ 为 D 上 α 近于凸映照, 由文献[6]得 $F(z)$ 在 D 上的单叶, 且 $F(D)$ 是 $1/\cos(\alpha\pi/2)$ -线性连结区域, 则由定理 C 可得 $h(z)$ 在 D 上的单叶.

令 $\xi=h(F^{-1}(w))=w+g(F^{-1}(w))$, 任意 $\xi_1, \xi_2\in h(D)$, 存在 $w_1, w_2\in F(D)$, 使 $\xi_1=h(F^{-1}(w_1))$, $\xi_2=h(F^{-1}(w_2))$. 由于 $F(D)$ 是 $1/\cos(\alpha\pi/2)$ -线性连结区域, 则存在 γ 为连结 w_1, w_2 的曲线, 使 $l(\gamma)\leqslant 1/\cos(\alpha\pi/2|w_1-w_2|)$. 取 $\Gamma=h(F^{-1}(\gamma))$, 有

$$l(\Gamma)=\int_{\Gamma}|\mathrm{d}\xi|=\int_{\gamma}|h(F^{-1}(w))'|\mathrm{d}w|\leqslant\int_{\gamma}\frac{|h'(F^{-1}(w))|}{|h'(F^{-1}(w))|-|g'(F^{-1}(w))|}|\mathrm{d}w|=\int_{\gamma}\frac{1}{1-|\omega(F^{-1}(w))|}|\mathrm{d}w|\leqslant\frac{t+\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{t}l(\gamma)\leqslant\frac{t+\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{t\cos\frac{\alpha\pi}{2}}|w_1-w_2|.$$

又

$$\begin{aligned} |\xi_1-\xi_2|&\geqslant|w_1-w_2|-|g(F^{-1}(w_1))-g(F^{-1}(w_2))|\geqslant \\ &|w_1-w_2|-\int_{\gamma}|g(F^{-1}(w))'|\mathrm{d}w\geqslant|w_1-w_2|-\int_{\gamma}\frac{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{t}|\mathrm{d}w|\geqslant \\ &|w_1-w_2|-\frac{1}{t}|w_1-w_2|=\frac{t-1}{t}|w_1-w_2|, \end{aligned}$$

得 $l(\Gamma)\leqslant\frac{t+\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{(t-1)\cos\frac{\alpha\pi}{2}}|\xi_1-\xi_2|$, 则 $h(D)$ 是 $\frac{t+\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{(t-1)\cos\frac{\alpha\pi}{2}}$ 线性连结区域.

注意到 $\frac{t+\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{(t-1)\cos\frac{\alpha\pi}{2}}<\frac{1}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}-M_1(1+\cos\frac{\alpha\pi}{2})}$, 故 $h(D)$ 的线性连结性比定理 C 的结论好.

由定理 C, $f_{\theta}(z)$ 在 D 上是单叶的, 则 $f_{\theta}(z)$ 是 $\frac{t+2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{t}$ 拟共形映照.

令 $\zeta_{\theta}=f_{\theta}(F^{-1}(w))=w+g(F^{-1}(w))+e^{i\theta}\overline{g(F^{-1}(w))}$, 任意 $\zeta_{\theta_1}, \zeta_{\theta_2}\in f_{\theta}(D)$, 由于 $f_{\theta}(z)$ 与 $F(z)$ 单叶, 存在 $w_1, w_2\in F(D)$, 使 $\zeta_{\theta_i}=f_{\theta}(F^{-1}(w_i)), i=1, 2$. 根据 $F(D)$ 的线性连结性, 存在 γ 为连结 w_1, w_2 的曲线, 使 $l(\gamma)\leqslant\frac{1}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}|w_1-w_2|$. 取 $\Gamma_{\theta}=f_{\theta}(F^{-1}(\gamma))$, 有

$$\begin{aligned} l(\Gamma_{\theta})&=\int_{\Gamma_{\theta}}|\mathrm{d}\xi_{\theta}|\leqslant\int_{\gamma}(|(\zeta_{\theta})_w|+|(\zeta_{\theta})_{\overline{w}}|)|\mathrm{d}w|\leqslant \\ &\int_{\gamma}(\frac{|h'(F^{-1}(w))|}{|h'(F^{-1}(w))|-|g'(F^{-1}(w))|}+\frac{|g'(F^{-1}(w))|}{|g'(F^{-1}(w))|})|\mathrm{d}w|= \\ &\int_{\gamma}\frac{1+|\omega(F^{-1}(w))|}{1-|\omega(F^{-1}(w))|}|\mathrm{d}w|\leqslant\frac{t+2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{t}l(\gamma)\leqslant\frac{t+2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{t\cos\frac{\alpha\pi}{2}}|w_1-w_2|. \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} |\zeta_{\theta_1}-\zeta_{\theta_2}|&\geqslant|w_1-w_2|-|g(F^{-1}(w_1))-g(F^{-1}(w_2))+e^{i\theta}\overline{g(F^{-1}(w_1))-g(F^{-1}(w_2))}|\geqslant \\ &|w_1-w_2|-2\int_{\gamma}|g(F^{-1}(w))'|\mathrm{d}w\geqslant|w_1-w_2|-2\int_{\gamma}\frac{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{t}|\mathrm{d}w|\geqslant\frac{t-2}{t}|w_1-w_2|, \end{aligned}$$

得 $l(\Gamma_\theta) \leq \frac{t+2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{(t-2)\cos\frac{\alpha\pi}{2}} |\xi_{\theta_1} - \xi_{\theta_2}|$, 则可推出 $f(D)$ 是 $\frac{t+2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{(t-2)\cos\frac{\alpha\pi}{2}}$ 线性连结区域. 定理 2 证毕.

定理 3 设 $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ 为 D 上的局部单叶调和映照, 其中 $h(z)$ 与 $g(z)$ 在 D 上解析, 并且满足对于 $\alpha \in [0, 1)$, 若 $F(z) = h(z) - g(z)$ 在 D 上 α 近于凸, 有

1) 当 $|\omega(z)| = \left| \frac{g'(z)}{h'(z)} \right| \leq \frac{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{t + \cos\frac{\alpha\pi}{2}}$ ($t > |\lambda| + 1, |\lambda| \leq 1$) 时, $f_\lambda(z) = h(z) + \lambda g(z)$ 在 D 上单叶, 并

且 $f_\lambda(D)$ 是 $\frac{t + (|\lambda| + 1)\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{(t - |\lambda| - 1)\cos\frac{\alpha\pi}{2}}$ 线性连结区域.

2) 当 $|\omega(z)| = \left| \frac{g'(z)}{h'(z)} \right| \leq \frac{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{t + \cos\frac{\alpha\pi}{2}}$ ($t > |\lambda| + 1, |\lambda| \leq 1$) 时, $F_\lambda(z) = h(z) + \lambda \overline{g(z)}$ 在 D 上为调和拟

共形映照, 并且 $F_\lambda(D)$ 是 $\frac{t + (|\lambda| + 1)\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{(t - |\lambda| - 1)\cos\frac{\alpha\pi}{2}}$ 线性连结区域.

注 1 注意到当 $|\lambda| < 1$ 时, 这时 t 可以取到小于 2 的常数.

证明 1) 若 $F_\lambda(z)$ 在 D 上不单叶, 则存在 $z_1, z_2 \in D$, 且 $z_1 \neq z_2$, 使得 $F_\lambda(z_1) = F_\lambda(z_2)$, $w_2 - w_1 = (e^{2i\vartheta} + \lambda) \overline{g(F^{-1}(w_1))} - g(F^{-1}(w_2))$, 其中 $w = F(z)$; $\beta \arg(g(F^{-1}(w_1)) - g(F^{-1}(w_2)))$. 由于 $F(D)$ 为 D 上是 $1/\cos\frac{\alpha\pi}{2}$ -线性连结区域, 则存在连结 $w_1 - w_2 \in F(D)$ 的可求长曲线 $\gamma \in F(D)$, 其满足 $l(\gamma) \leq 1/\cos(\frac{\alpha\pi}{2}|w_1 - w_2|)$, 即

$$\begin{aligned} |(e^{2i\vartheta} + \lambda) \overline{g(F^{-1}(w_1))} - g(F^{-1}(w_2))| &\leq (1 + |\lambda|) \int_\gamma |(g(F^{-1}(w)))'| |dw| \leq \\ &(1 + |\lambda|) \int_\gamma \frac{|\omega(F^{-1}(w))|}{1 - |\omega(F^{-1}(w))|} |dw| \leq \\ &\frac{(1 + |\lambda|)\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{t} l(\gamma) \leq \frac{(1 + |\lambda|)}{t} |w_1 - w_2| < \\ &|w_1 - w_2|. \end{aligned}$$

这与 $w_2 - w_1 = (e^{2i\vartheta} + \lambda) \overline{g(F^{-1}(w_1))} - g(F^{-1}(w_2))$ 矛盾, 说明 $F_\lambda(z)$ 在 D 上单叶. 因此, $F_\lambda(z)$ 是 D

上的 $\frac{t + (1 + |\lambda|)\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{t + (1 - |\lambda|)\cos\frac{\alpha\pi}{2}}$ 拟共形映照.

又令 $\xi_\lambda = F_\lambda F^{-1}(w) = w + g(F^{-1}(w)) + \lambda \overline{g(F^{-1}(w))}$, 任意 $\xi_{\lambda_1}, \xi_{\lambda_2} \in F_\lambda(D)$, 由于 $F_\lambda(D)$ 与 $F(z)$ 单叶, 存在 $w_1, w_2 \in F(D)$, 使 $\xi_{\lambda_i} = F_\lambda(F^{-1}(w_i))$, $i = 1, 2$, 根据 $F(D)$ 的线性连结性, 存在 γ 为连结 w_1, w_2 的曲线, 使 $l(\gamma) \leq 1/\cos(\frac{\alpha\pi}{2}|w_1 - w_2|)$. 取 $\Gamma_\gamma = F_\lambda(F^{-1}(\gamma))$, 有

$$\begin{aligned} l(\Gamma_\lambda) = \int_\lambda |d\xi_\lambda| &\leq \int_\gamma (|\xi_\lambda|_w + |\xi_\lambda|_{\bar{w}}) |dw| \leq \\ &\int_\gamma \left(\frac{|h'(F^{-1}(w))| + |\lambda| |g'(F^{-1}(w))|}{|h'(F^{-1}(w))| - |g'(F^{-1}(w))|} \right) |dw| = \int_\gamma \frac{1 + |\lambda| |\omega(F^{-1}(w))|}{1 - |\omega(F^{-1}(w))|} |dw| \leq \\ &\frac{t + (1 + |\lambda|)\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{t} l(\gamma) \leq \frac{t + (1 + |\lambda|)\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{t \cos\frac{\alpha\pi}{2}} |w_1 - w_2|. \end{aligned}$$

又

$$| \zeta_{\lambda_1} - \zeta_{\lambda_2} | \geq | w_1 - w_2 | - | g(F^{-1}(w_1)) - g(F^{-1}(w_2)) + \lambda \overline{g(F^{-1}(w_1)) - g(F^{-1}(w_2))} | \geq$$
$$| w_1 - w_2 | - (1 + | \lambda |) \int_{\gamma} | g(F^{-1}(w_1))' | | dw | \geq$$
$$| w_1 - w_2 | - (1 + | \lambda |) \int_{\gamma} \frac{\cos \frac{\alpha \pi}{2}}{t} | dw | \geq \frac{t - (1 + | \lambda |)}{t} | w_1 - w_2 | ,$$

得 $l(\Gamma_{\lambda}) \leq \frac{t + (| \lambda | + 1) \cos \frac{\alpha \pi}{2}}{(t - | \lambda | - 1) \cos \frac{\alpha \pi}{2}} | \xi_{\lambda_1} - \xi_{\lambda_2} |$, 推出 $F_{\lambda}(D)$ 是 $\frac{t + (| \lambda | + 1) \cos \frac{\alpha \pi}{2}}{(t - | \lambda | - 1) \cos \frac{\alpha \pi}{2}}$ 线性连结区域.

对于 $f_{\lambda}(z) = h(z) + \lambda g(z)$ 时, 采用相同的证明方法, 可得到定理 3 中的结论. 定理 3 证毕.
在定理 1, 2, 3 中, 若 $F(z) = h(z) + g(z)$ 有相应的假定, 结论仍是成立的.

参考文献:

[1] LEWY H. On the non-vanishing of the jacobian in certain one-to-one mappings[J]. Bull Amer Math Soc, 1936, 42 (10): 689-698.

[2] CHUAQUI M, HERNANDEZ R. Univalent harmonic mappings and linearly connected domains[J]. J Math Anal Appl, 2007, 33(2): 1189-1194.

[3] HUANG Xin-zhong. Locally univalent harmonic mappings with linearly connected image domains[J]. Chinese Ann Math Ser A (Chinese), 2010, 31A(5): 625-630.

[4] 王其文, 黄心中. 某些调和函数的系数估计与像区域的近于凸性质[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2013, 34(2): 225-229.

[5] 石擎天, 黄心中. 调和映照与其剪切函数的单叶性[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2013, 34(3): 334-338.

[6] HERMÁNDEZ R, MARTÍN M J. Stable geometric properties of analytic and harmonic functions[J]. Math Proc Camb Phil Soc, 2013, 155(2): 343-359.

[7] HUANG Xin-zhong. Harmonic quasiconformal mappings on the upper half-plane[J]. Complex Variables and Elliptic Equations, 2013, 58(7): 1005-1011.

[8] 夏小青, 黄心中. 一类双调和映照的单叶半径估计[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2011, 32(2): 218-221.

[9] POMMERENKE C. Boundary behaviour of conformal maps[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1992: 106-107.

[10] CHEN Shao-lin, PONNUASMY S, RASILA A, et al. Linear connectivity, Schwarz-Pick lemma and univalence criteria for planar harmonic mappings[EB/OL]. [2015-01-05]. <http://arxiv.org/abs/1404.4155>.

Relation Between Harmonic Mapping and Its Shear Function
With Linearly Connected Image Domain

ZHAN Long-jun, HUANG Xin-zhong

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Suppose that $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ is a locally univalent harmonic mapping on the unit disk $D = \{z \mid |z| < 1\}$, if its shear function $h(z) - g(z)$ is univalent with linearly connected image domain, we consider the univalence and the image properties of $h(z)$, $F_{\lambda}(z) = h(z) + \lambda \overline{g(z)}$ under some restriction conditions of the dilatation of $f(z)$. Our results improve and generalize some results made in CHEN Shao-lin.

Keywords: harmonic mapping; linearly connected domain; harmonic quasiconformal mapping; α -close-to convex