

# 一类调和映照的系数估计

阙玉琴, 陈行堤

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

**摘要:** 在单叶调和映照的系数猜想的基础上, 获得单叶调和映照在第二复伸张满足标准化条件下的系数估计, 结果渐进于单叶函数的系数估计, 建立了两个猜想的联系, 并获得此类映照的增长和覆盖定理.

**关键词:** 单叶调和映照; 稳定调和映照; 系数估计; 增长定理

**中图分类号:** O 174. 55

**文献标志码:** A

## 1 预备知识

若  $f(z)$  为定义在单位圆盘  $D = \{ |z| < 1 \}$  上的调和映照, 则存在  $D$  上的两个解析函数  $h(z)$  和  $g(z)$ , 使得  $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ , 且称  $h(z)$  和  $g(z)$  为  $f$  的解析元和反解析元<sup>[1-11]</sup>. 由 Lewy<sup>[6]</sup> 定理知, 调和映照  $f$  在单位圆上局部单叶当且仅当

$$J_f = |h'|^2 - |g'|^2 \neq 0.$$

若  $J_f > 0$ , 则  $f$  为单位圆盘上的保向调和映照, 其第 2 复伸张为  $\omega(z) = g'(z)/h'(z)$ , 且在单位圆内满足  $|\omega(z)| < 1$ .  $S_H$  表示单位圆盘上的单叶保向调和映照且具有展式, 即

$$\left. \begin{aligned} h(z) &= z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, & z \in D, \\ g(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n, & z \in D \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

的全体. 记  $S_H^0 = \{ f \in S_H : f_z(0) = 0 \}$ .

经典的单叶解析函数类, 即

$$S = \{ f = h + \overline{g} \in S_H : g(z) \equiv 0, z \in D \}.$$

1985 年, de Branges<sup>[4]</sup> 证明了 Bieberbach 猜想, 当  $n \geq 2$  时,  $|a_n| \leq n$ . 1984 年, Clunie 等<sup>[1]</sup> 提出了规范化单叶调和映照的系数猜想 A.

**猜想 A** 如果  $f = h + \overline{g} \in S_H^0$ , 且  $h$  和  $g$  的表达式为 (1), 那么不等式

$$\left. \begin{aligned} |a_n| &\leq \frac{(n+1)(2n+1)}{6}, \\ |b_n| &\leq \frac{(n-1)(2n-1)}{6}, \\ |a_n| - |b_n| &\leq n \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

对所有的  $n \geq 2$  成立. 当  $f(z)$  为调和 Koebe 函数, 即

$$K(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3} + \overline{\left( \frac{\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3} \right)} \quad (3)$$

收稿日期: 2014-10-27

通信作者: 陈行堤 (1976-), 男, 副教授, 博士, 主要从事函数论的研究. E-mail: chxtt@hqu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11471128); 福建省自然科学基金计划资助项目 (2014J01013); 华侨大学中青年教师科研提升资助计划 (ZQN-YX110)

时,等号成立.

这个猜想在  $S_H^0$  一些子类是成立的,如凸、星象、近于凸、典型实和沿一个方向凸的单叶调和映照类<sup>[1,10-11]</sup>. 记

$$\begin{aligned} S_H^0(S) &= \{h + \bar{g} \in S_H^0 : h + \exp(i\theta)g \in S, \text{对一些 } \theta \in \mathbf{R}\}, \\ S_H(S) &= \{f = f_0 + b_1\bar{f}_0 : f_0 \in S_H^0(S), b_1 \in D\}. \end{aligned}$$

2014 年,Ponnusamy 等<sup>[8]</sup>证明了猜想 A 在类  $H_H^0(S)$ 也是正确的,即定理 A.

**定理 A** 设  $f=h+\bar{g}\in S_H^0(S)$ ,式(1)为  $h$  和  $g$  的表达式,则对所有的  $n\geqslant 2$ ,式(2)成立. 这是  $S_H^0(S)$  类系数的精确上界,当  $f$  为调和 Koebe 函数  $K(z)$ 时,等号成立.

2013 年,Hernández 等<sup>[7]</sup>提出了稳定性理论. 如果调和映照  $f=h+\bar{g}$  单叶(凸)且对于所有的  $\theta$  有  $f_\theta=h+\exp(i\theta)\bar{g}$  单叶,则称  $f$  是稳定单叶(凸);而且还证明了若调和映照  $f=h+\bar{g}$  稳定单叶当且仅当解析函数  $F=h+g$  稳定单叶. 不是所有的调和映照都是稳定单叶的,比如调和 Koebe 函数只在  $\theta=\pi$  时成立. 2014 年,Ponnusamy<sup>[8]</sup>提出了一个猜想:对于每一个  $f=h+\bar{g}\in S_H^0(S)$ ,一定存在一个  $\theta$  使得  $h+\exp(i\theta)g\in S$ .

文中继续研究  $S_H^0(S)$ 类调和映照,利用第 2 复伸张的标准化条件,得到渐进于经典的单叶解析函数类  $S$  的系数估计.

## 2 主要定理及证明

**定理 1** 假设单位圆盘上的保向调和映照  $f=h+\bar{g}\in S_H^0(S)$ , $h$  和  $g$  的表达式满足式(1),其第 2 复伸张为  $\omega(z)$ 满足  $\omega(0)=0, \omega'(0)=0, \omega''(0)=0, \cdots, \omega^{(m-1)}(0)=0, \omega^{(m)}(0)\neq 0$ .

当  $n\leqslant m$  时,有

$$|a_n|\leqslant n, \quad b_n=0.$$

当  $n=m+k, k=1,2,3, \cdots$ 时,有

$$\begin{cases} |a_{m+k}|\leqslant m+k+\frac{k(k+1)(2k+1)}{6(m+k)}, \\ |b_{m+k}|\leqslant \frac{k(k+1)(2k+1)}{6(m+k)}. \end{cases}$$

特别地,当  $m\rightarrow\infty$ 时,  $|a_n|\leqslant n$ ;当  $m=1$  时,  $|a_n|\leqslant (n+1)(2n+1)/6, |b_n|\leqslant (n-1)(2n-1)/6$ .

**证明** 因为  $f=h+\bar{g}\in S_H^0(S)$ ,所以存在一个  $\theta$ ,使得

$$\varphi=h+\exp(i\theta)g=z+\sum_{n=2}^{\infty}(a_n+\exp(i\theta)b_n)z^n=z+\sum_{n=2}^{\infty}\varphi_nz^n\in S.$$

由 de Branges 定理,当  $n\geqslant 2$  时,  $|\varphi_n|\leqslant n$ . 因为  $f$  为保向的调和映照,所以  $\omega(0)=0$ ,且对于所有的  $z\in D$ ,有

$$|\omega(z)|<1,$$

而且有

$$\varphi'=h'(1+\exp(i\theta)\omega)=1+\sum_{n=2}^{\infty}n\varphi_nz^{n-1},$$

所以有

$$\begin{cases} h'=\frac{\varphi'}{1+\exp(i\theta)\omega}, \\ g'=\frac{\varphi'\omega}{1+\exp(i\theta)\omega}. \end{cases}$$

因为  $\omega(z)$ 满足  $\omega(0)=0, \omega'(0)=0, \omega''(0)=0, \cdots, \omega^{(m-1)}(0)=0, \omega^{(m)}(0)\neq 0$ ,所以有

$$\omega(z)=\sum_{n=m}^{\infty}c_nz^n.$$

又由于

$$\frac{1}{1+\exp(i\theta)\omega}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\exp(i\theta)^n,$$
$$\frac{\omega}{1+\exp(i\theta)\omega}=\frac{1}{\exp(i\theta)}(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\exp(i\theta)\omega^n),$$

所以,可令

$$\frac{1}{1+\exp(i\theta)\omega}=1+\sum_{n=m+1}^{\infty}w_{n-1}z^{n-1},$$
$$\frac{\omega}{1+\exp(i\theta)\omega}=\sum_{n=m+1}^{\infty}v_{n-1}z^{n-1}.$$

因为 $|\omega(z)|<1$ ,由从属原理,有

$$\begin{cases} \frac{1}{1+\exp(i\theta)\omega}<\frac{1}{1-z}=1+\sum_{n=1}^{\infty}z^n, \\ \frac{-\exp(i\theta)\omega}{1+\exp(i\theta)\omega}<\frac{z}{1-z}=\sum_{n=1}^{\infty}z^n. \end{cases}$$

根据 Rogosinski 定理<sup>[9]</sup>,对所有的  $n$ ,有

$$|w_{n-1}|\leqslant 1,\qquad |v_{n-1}|\leqslant 1.$$

因此有

$$\begin{aligned} \varphi'\frac{1}{1+\exp(i\theta)\omega}&=(1+\sum_{n=2}^{\infty}n\varphi_nz^{n-1})(1+\sum_{n=m+1}^{\infty}w_{n-1}z^{n-1})=\\ &1+\sum_{n=m+1}^{\infty}w_{n-1}z^{n-1}+\sum_{n=2}^{\infty}n\varphi_nz^{n-1}+\sum_{n=2}^{\infty}n\varphi_nz^{n-1}\sum_{n=m+1}^{\infty}w_{n-1}z^{n-1}=\\ &1+\sum_{n=2}^m n\varphi_nz^{n-1}+\sum_{n=m+1}^{\infty}(n\varphi_n+w_{n-1})z^{n-1}+\sum_{n=m+2}^{\infty}(\sum_{l=2}^{n-m}l\varphi_lw_{n-l})z^{n-1}=\\ &1+\sum_{n=2}^m n\varphi_nz^{n-1}+((m+1)\varphi_{m+1}+w_m)z^m+\sum_{n=m+2}^{\infty}(n\varphi_n+w_{n-1}+\sum_{l=2}^{n-m}l\varphi_lw_{n-l})z^{n-1}=\\ &1+\sum_{n=2}^m n\varphi_nz^{n-1}+((m+1)\varphi_{m+1}+w_m)z^m+\\ &\sum_{k=1}^{\infty}((m+k+1)\varphi_{m+k+1}+w_{m+k}+\sum_{l=2}^{k+1}l\varphi_lw_{m+k+1-l})z^{m+k}. \end{aligned}$$

当  $n\leqslant m$  时,  $|na_n|=|n\varphi_n|\leqslant n^2$ . 从而有  $|a_n|\leqslant n$ .

当  $n=m+1$  时, 有

$$|(m+1)a_{m+1}|=|(m+1)\varphi_{m+1}+w_m|\leqslant (m+1)^2+1, \text{ 所以 } |a_n|\leqslant n+1/n.$$

当  $n=m+k, k=2,3,\cdots$  时, 有

$$|(m+k+1)a_{m+k+1}|=|(m+k+1)\varphi_{m+k+1}+w_{m+k}+\sum_{l=2}^{k+1}l\varphi_lw_{m+k+1-l}|\leqslant$$
$$(m+k+1)^2+1+\sum_{l=2}^{k+1}l^2=(m+k+1)^2+\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6},$$

从而有

$$|a_{m+k}|\leqslant m+k+\frac{k(k+1)(2k+1)}{6(m+k)}.$$

又因为

$$g'=\frac{\varphi'\omega}{1+\exp(i\theta)\omega}=(1+\sum_{n=2}^{\infty}n\varphi_nz^{n-1})(\sum_{n=m+1}^{\infty}v_{n-1}z^{n-1})=\sum_{n=1}^{\infty}n\varphi_nz^{n-1}\sum_{n=m+1}^{\infty}v_{n-1}z^{n-1}=$$
$$\sum_{n=m+1}^{\infty}(\sum_{l=1}^{n-m}l\varphi_lv_{n-l})z^{n-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{l=1}^{k+1}l\varphi_lv_{m+k+1-l})z^{m+k}.$$

其中:  $\varphi_1=1$ . 因此, 当  $n<m$  时,  $b_n=0$ .

当  $n=m+k, k=0,1,2,\dots$  时,有

$$|(m+k+1)b_{m+k+1}| = \left| \sum_{l=1}^{k+1} l\varphi_l v_{m+k+1-l} \right| \leq \sum_{l=1}^{k+1} l^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6},$$

所以

$$|b_{m+k}| \leq \frac{k(k+1)(2k+1)}{6(m+k)}.$$

特别地,当  $m \rightarrow \infty$  时,  $|a_{m+k}| \leq m+k$ , 即  $|a_n| \leq n, |b_n| = 0$ , 其为解析函数类的系数估计; 当  $m=1$ ,  $|a_n| \leq (n+1)(2n+1)/6, |b_n| \leq (n-1)(2n-1)/6$ , 其为 Ponnusamy 的  $S_H^0(S)$  类的系数估计.

由于解析函数  $S$  类的子类凸函数的系数估计为当  $n \geq 2$  时系数的模小于等于 1, 所以类似定理 1 的证明得到.

**推论 1** 假设  $f=h+\bar{g} \in S_H^0(C)$ , 其中  $h$  和  $g$  满足式(1)且第 2 复伸张  $\omega(z)$  满足式(4), 则当  $n \leq m$  时, 有

$$|a_n| \leq 1.$$

当  $n=m+k, k=1,2,3,\dots$  时,有

$$|a_{m+k}| \leq 1 + k(k+1)/2(m+k).$$

特别地,当  $m \rightarrow \infty$  时,  $|a_n| \leq 1$ ; 当  $m=1$  时,  $|a_n| \leq (n+1)/2$ .

**推论 2** 假设  $f=h+\bar{g} \in S_H(S)$ , 其中  $h$  和  $g$  满足式(1), 则当  $n < m$  时, 有

$$|a_n| \leq n, \quad |b_n| \leq n.$$

当  $n=m+k, k=0,1,2,\dots$  时,有

$$\begin{cases} |a_n| \leq n + \frac{k(k+1)(2k+1)}{3n}, \\ |b_n| \leq n + \frac{k(k+1)(2k+1)}{3n}. \end{cases}$$

**证明** 设  $f_0=h_0+\bar{g}_0 \in S_H^0(S)$ , 其中:  $h_0=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_{0n}z^n, g_0=\sum_{n=2}^{\infty} b_{0n}z^n$ , 且其第 2 复伸张  $\omega_0(z)$  满足  $\omega_0(0)=0, \omega_0'(0)=0, \dots, \omega_0^{(m-1)}(0)=0, \omega_0^{(m)}(0) \neq 0$ , 则

$$f=f_0+b_1\bar{f}_0=h_0+b_1g_0+\overline{g_0+b_1h_0} \in S_H(S), \quad b_1 \in D.$$

由定理 1, 当  $n < m$  时, 有

$$|a_{0,n}| \leq n, \quad |b_{0,n}| = 0.$$

当  $n=m+k, k=0,1,2,\dots$  时,有

$$\begin{cases} |a_{0,n}| \leq n + \frac{k(k+1)(2k+1)}{6n}, \\ |b_{0,n}| \leq n + \frac{k(k+1)(2k+1)}{6n}. \end{cases}$$

所以, 当  $n < m$  时, 有

$$\begin{cases} |a_n| = |a_{0,n} + b_1 b_{0,n}| \leq |a_{0,n}| + |b_{0,n}| \leq n, \\ |b_n| = |b_{0,n} + b_1 a_{0,n}| \leq |b_{0,n}| + |a_{0,n}| \leq n. \end{cases}$$

当  $n=m+k, k=0,1,2,\dots$  时,有

$$\begin{cases} |a_n| \leq |a_{0,n}| + |b_{0,n}| \leq n + \frac{k(k+1)(2k+1)}{3n}, \\ |b_n| \leq |a_{0,n}| + |b_{0,n}| \leq n + \frac{k(k+1)(2k+1)}{3n}. \end{cases}$$

### 3 结果的运用

$S_H(S)$  类有下列的性质: 若  $f \in S_H(S)$ , 则函数为

$$(f+c\bar{f})/(1+cb_1) \in S_H(S).$$

其中  $c \in D$ , 此性质称为仿射不变. 类似地, 若  $f \in S_H(S)$ , 则函数为

$$F(z) = \frac{f(\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z}) - f(\zeta)}{(1-|\zeta|^2)h'(\zeta)} \in S.$$

此性质称为线性不变. 定理 B 为  $S_H$  类调和函数的增长和覆盖定理<sup>[3]</sup>.

**定理 B** 假设  $\alpha$  是所有函数  $f \in S_H$  类第二项系数  $|a_2|$  的上确界, 则对于每个函数  $f \in S_H^0$  满足

$$\frac{1}{2\alpha}[1 - (\frac{1-r}{1+r})^\alpha] \leq |f(z)| \leq \frac{1}{2\alpha}[(\frac{1-r}{1+r})^\alpha - 1], \quad r = |z| < 1.$$

特别地, 每个函数  $f \in S_H^0$  包含一个  $1/2\alpha$  圆.

定理 1 证明了第 2 复伸张满足式(4)的  $S_H^0(S)$  类的精确系数估计, 作为定理 1 的运用, 可以证明第 2 复伸张满足式(4)的条件下  $S_H^0(S)$  类的精确系数估计. 利用定理 B, 给出一个  $S_H^0(S)$  类更优的增长和覆盖定理.

**定理 2** 对每一个复伸张满足式(4)的  $f \in S_H^0(S)$ , 当  $m > 1$  时, 满足下面的不等式, 即

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}, \quad r = |z| < 1.$$

特别地, 此类映照包含了一个  $1/4$  圆.

参考文献:

[1] CLUNIE J G, SHEIL-SMALL T. Harmonic univalent functions[J]. Ann Acad Sci Fenn Ser A L, 1984, 9(1): 3-25.  
[2] DUREN P. Univalent functions[M]. New York: Springer-Verlag, 1983: 17-21.  
[3] DUREN P. Harmonic mappings in the plane[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004: 86-110  
[4] de BRANGES L. A proof of the Bieberbach conjecture[J]. Acta Math, 1985, 154(1/2): 137-152.  
[5] GREINER P. Geometric properties of harmonic shears[J]. Comput Methods Funct Theory, 2004, 4(1): 77-96.  
[6] LEWY H. On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings[J]. Bull Amer Math Soc, 1936, 42(1): 689-692.  
[7] HERNÁNDEZ R, MARTÍN M J. Stable geometric properties of analytic and harmonic functions[J]. Math Proc Camb Phil Soc, 2013, 155(2): 343-359.  
[8] PONNUSAMY S, KALIRAJ A S. On the coefficient conjecture of clunie and sheil-small on univalent harmonic mappings [DB/OL][2014-03-22]. <http://arxiv.org/abs/1403.5619>.  
[9] ROGOSINSKI W. On the coefficients of subordinate functions[J]. Proc London Math Soc, 1990, 42(1): 237-248.  
[10] SHEIL-SMALL T. Constants for planar harmonic mappings[J]. J London Math Soc, 1990, 42(1): 237-248.  
[11] WANG Xiao-tian, LIANG Xiang-qian, ZHANG Yu-qin. Precise coefficient estimates for close-to-convex harmonic univalent mappings[J]. J Math Anal Appl, 2001, 263(2): 501-509.

On the Coefficient Estimates for One Subclass of Harmonic Mappings

QUE Yu-qin, CHEN Xing-di

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

**Abstract:** We study the coefficient estimates of a subclass of harmonic mappings, which second complex dilatations satisfy some normal condition. The result is asymptotic to the estimates of univalent analytic functions, the relationship of the coefficient conjecture of these two class mappings is established. We also obtain the growth and covering theorem for this class of mappings.

**Keywords:** harmonic mapping; stable harmonic mapping; coefficient estimate; distortion theorem