文章编号:1000-5013(2015)04-0478-06 doi:10.11830/ISSN.1000-5013.2015.04.0478

某些近于凸调和函数的解析性质和系数估计

黄赟,黄心中

(华侨大学 数学科学学院,福建 泉州 362021)

摘要: 研究单位圆盘 D 上某些具有稳定近于凸的调和函数 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 解析部分 $h(z)$ 满足 $\mathrm{Re}\{1+z\dfrac{h''(z)}{h'(z)}\}>c,-\dfrac{1}{2}<c\leqslant 0$ 时的解析表示和系数估计表达式. 对其复伸张 $w(z)$ 为一次多项式时,给出了 $f(z)$ 的稳定近于凸的判别条件,并且推广了 Bshouty 和 Nagpal 等的结果. 特别地,当 $\mathrm{Re}\{1+z\dfrac{h''}{h'}\}>c,-\dfrac{1}{2}<c\leqslant 0,w(z)=z^2$ 时,估计了 $f=h+\overline{g}$ 在单位圆盘上的稳定近于凸半径.

关键词: 调和函数;稳定近于凸;系数估计;单叶半径

中图分类号: O 174.51 **文献标志码:** A

1 预备知识

对定义在平面区域 $\Omega\subset C$ 上的二阶连续可导复值函数 $f(z)=u(z)+\mathrm{i}v(z)$,$z=x+\mathrm{i}y\in\Omega$,若 $\Delta f=4f_{z\bar{z}}=0$,则称 f 为调和的. 这里 $f_z=\dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial f}{\partial x}-\mathrm{i}\dfrac{\partial f}{\partial y})$,$f_{\bar{z}}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial f}{\partial x}-\mathrm{i}\dfrac{\partial f}{\partial y})$. 令 $H=\{f\,|\,f$ 为 $D=\{z:|z|<1\}$ 上的调和函数,满足 $f(0)=f_z(0)-1=0\}$. 对于 $f(z)\in H$,都有 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}=z+\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_nz^n+\overline{\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_nz^n}$. 其中,$h(z)$,$g(z)$ 在 D 内是解析的. 记 $f(z)$ 的 Jacobian 为 $J_f=|f_z|^2-|f_{\bar{z}}|^2$,$z\in D$. $f(z)$ 是保向且局部单叶的,当且仅当 $J_f(z)>0$,即 $|f_{\bar{z}}|<|f_z|$,$z\in D$,则有 $|w(z)|=|\dfrac{g'(z)}{h'(z)}|<1$,这里 $w(z)=\dfrac{g'(z)}{h'(z)}$ 称为 $f(z)$ 的复伸张. 令 $S_H=\{f\,|\,f$ 是 H 中单叶保向的函数$\}$. $S_H^0=\{f\in S_H: f_{\bar{z}}(0)=0\}$,则 $S_H^0\subseteq S_H$. 令 $C_H=\{f\,|\,f$ 是 S_H 中的近于凸函数$\}$,那么 $C_H\subseteq S_H$,关于调和近于凸函数的性质,参见文献[1]. 记 $C_H^0=\{f\in C_H: f_{\bar{z}}(0)=0\}$.

Mocanu[2] 定义了一个函数类:$M=\{f(z)=h(z)+\overline{g(z)}: g'(z)=zh'(z)$,对所有 $z\in D$ 满足不等式 $\mathrm{Re}\{1+z\dfrac{h''(z)}{h'(z)}\}>-\dfrac{1}{2}\}$. 同时,提出如下猜想:$M$ 中的函数是单叶的. Bshouty 等[1] 利用解析函数近于凸的两个引理证明了以上猜想,并在文章中给出更强的结果:对于 M 中的调和函数 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$,不仅是单叶的,而且是近于凸的.

Nagpal 等[3] 引入具有正实部的函数,并用对比系数对 M 中的调和函数 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}=z+\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_nz^n+\overline{\sum\limits_{n=2}^{\infty}b_nz^n}$ 做出精确的系数估计:$|a_n|\leqslant\dfrac{n+1}{2}$,$|b_n|\leqslant\dfrac{n-1}{2}$,等号在 $F(z)=z+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n+1}{2}z^n+\overline{\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n-1}{2}z^n}$ 时达到.

收稿日期: 2015-01-05

通信作者: 黄心中(1957-),男,教授,博士,主要从事函数论的研究. E-mail:huangxz@hqu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11471128);福建省自然科学基金资助项目(2014J01013)

Bshouty 等[4]对近于凸单叶调和函数的范围进行推广，利用圆盘的辐角改变量得到更为一般化的定理,并对满足条件的函数类的伸张偏差范围做出估计.他们证明了以下两个定理.

定理 A　若 h 是单位开圆盘 D 上的解析凸函数，则调和函数 $f=h+\overline{g}$ 是近于凸的，其中,$g'(z)=w(z)h'(z)$,$|w(z)|<1$.

定理 B　令 $f=h+\overline{g}$ 是 D 上的调和函数,$h'(0)\neq 0$,$\mathrm{Re}\{1+z\frac{h''(z)}{h'(z)}\}>c$.其中,$-\frac{1}{2}<c\leqslant 0$,$z\in D$.若在 D 上$|w(z)|<\cos(\pi|c|)$,则 f 是近于凸函数.

Bshouty 等[5]提出了如下问题:令 $f=h+\overline{g}$ 是 D 上的调和函数,$h'(0)\neq 0$,如果 $g'(z)=z^2h'(z)$,满足 $\mathrm{Re}\{1+z\frac{h''(z)}{h'(z)}\}>-\frac{1}{2}$,调和函数 f 的单叶性如何.

对于具有稳定近于凸调和函数的研究,今年来有不少进展[6-8].本文利用解析函数近于凸的两个引理,将调和函数的单叶性证明推广到更为一般的函数形式,并对这类函数的系数做出估计,得到一些精确的结果.

2　主要结果及证明

令 $Q(D)=\{h(z),h(z)$为 D 上的解析函数,且满足 $h(0)=0,h'(0)=1,\mathrm{Re}\{1+z\frac{h''(z)}{h'(z)}\}>c,-\frac{1}{2}<c\leqslant 0\}$.证明 $h(z)$具有以下的表示定理.

定理 1　$h(z)\in Q(D)$的充分必要条件是存在正实部函数 $p(z)=1+c_1z+c_2z^2+\cdots$,使得

$$h(z)=\int_0^z\exp(\int_0^w\frac{(p(\zeta)-1)k}{\zeta}\mathrm{d}\zeta)\mathrm{d}w.$$

其中:$1\leqslant k<3/2$.

证明　设函数 $h(z)$,满足 $h(0)=0,h'(0)=1$,且

$$\mathrm{Re}\{1+z\frac{h''(z)}{h'(z)}\}>c,\qquad -\frac{1}{2}<c\leqslant 0.$$

令 $p(z)=1+\frac{1}{1-c}\frac{zh''(z)}{h'(z)}$,则 $p(z)$是正实部函数,且 $p(0)=1$,有

$$\frac{(p(z)-1)(1-c)}{z}=\frac{h''(z)}{h'(z)}.$$

两边同时积分得

$$h'(z)=\exp(\int_0^z\frac{[p(\zeta)-1](1-c)}{\zeta}\mathrm{d}\zeta).$$

令 $k=1-c$,$1\leqslant k<3/2$,两边同时积分得

$$h(z)=\int_0^z h'(w)\mathrm{d}w=\int_0^z\exp(\int_0^w\frac{k[p(\zeta)-1]}{\zeta}\mathrm{d}\zeta)\mathrm{d}w.$$

反之,设存在正实部函数 $p(z)$,使得 $h(z)$写成如下形式,即

$$h(z)=\int_0^z\exp(\int_0^w\frac{[p(\zeta)-1]k}{\zeta}\mathrm{d}\zeta)\mathrm{d}w.$$

其中:$1\leqslant k<3/2$.则有

$$h'(z)=\exp(\int_0^z\frac{[p(\zeta)-1]k}{\zeta}\mathrm{d}\zeta),\qquad h''(z)=k\frac{p(z)-1}{z}\exp(\int_0^z\frac{[p(\zeta)-1]k}{\zeta}\mathrm{d}\zeta).$$

故

$$\mathrm{Re}\{1+z\frac{h''(z)}{h'(z)}\}=\mathrm{Re}\{1+k[p(z)-1]\}=(1-k)+k\mathrm{Re}\{p(z)\}>1-k.$$

即 $\mathrm{Re}\{1+z\frac{h''(z)}{h'(z)}\}>1-k$,且 $1-k\in(-\frac{1}{2},0]$.

Bshouty 等[1]已经证得:条件为 $w(z)=z$,$\mathrm{Re}\{1+z\frac{h''(z)}{h'(z)}\}>-\frac{1}{2}$时,$f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$的单叶性.

当 $w(z)=\alpha$,α 是常数,且 $|\alpha|<1$ 时,结论是正确的.文中的定理2将对此进行推广,证明当 $w(z)=\alpha+\beta z$,α 和 β 是常数,$|\alpha|+|\beta|<1$,且 $\mathrm{Re}\{1+z\dfrac{h''(z)}{h'(z)}\}>c$,$-\dfrac{1}{2}<c\leqslant 0$ 时,单叶性也同样成立.

为此,引入下面引理1,2.

引理1[9] 解析函数 h 定义在 D 上,h 是近于凸的充分必要条件为 $h'(z)\neq 0$,且满足

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{Re}\{1+r\exp(\mathrm{i}\theta)\frac{h''(z)(r\exp(\mathrm{i}\theta))}{h'(z)(r\exp(\mathrm{i}\theta))}\}\mathrm{d}\theta>-\pi.$$

其中:$\theta_1<\theta_2<\theta_1+2\pi$;$0<r<1$.

引理2[10] 若调和函数 $f=h+\bar{g}$ 满足 $|g'(0)|<|h'(0)|$,对于所有 $|\lambda|=1$,解析函数 $h+\lambda g$ 都是近于凸的,则 f 也是近于凸的.

定理2 设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 是单位圆盘 D 上的调和函数,满足 $h'(0)\neq 0$,有

$$\mathrm{Re}\{1+z\frac{h''(z)}{h'(z)}\}>c.$$

其中:$-1/2<c\leqslant 0$;$z\in D$.若 $w(z)=\alpha+\beta z$,$|\alpha|+|\beta|<1$,则 $f(z)$ 是单叶近于凸函数.

证明 考虑解析函数 $F(z)=h(z)-\lambda g(z)$,其中,$|\lambda|=1$,则

$$F'(z)=[1-\lambda(\alpha+\beta z)]h'(z),\qquad F''(z)=[1-\lambda(\alpha+\beta z)]h''(z)+(-\lambda\beta)h'(z).$$

显然,在单位圆盘 D 上 $F'(z)\neq 0$,则

$$\mathrm{Re}\{1+z\frac{F''(z)}{F'(z)}\}=\mathrm{Re}\{1+z\frac{h''(z)}{h'(z)}\}+\mathrm{Re}\{\frac{\lambda\beta z}{\lambda(\alpha+\beta z)-1}\}.$$

其中

$$\mathrm{Re}\{\frac{\lambda\beta z}{\lambda(\alpha+\beta z)-1}\}=\frac{1}{2}\{\frac{\lambda\beta z}{\lambda(\alpha+\beta z)-1}+\overline{\frac{\lambda\beta z}{\lambda(\alpha+\beta z)-1}}\}=$$

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{|1-\lambda\alpha|^2-|\lambda\beta z|^2}{|(1-\lambda\alpha)-\lambda\beta z|^2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1-\left|\dfrac{\beta z}{\bar{\lambda}-\alpha}\right|^2}{\left|1-\dfrac{\beta z}{\bar{\lambda}-\alpha}\right|^2}.$$

令 $z=r\exp(\mathrm{i}\theta)\zeta=\dfrac{\bar{\beta}}{\lambda-\bar{\alpha}}r$,且满足 $0\leqslant|\zeta|=\dfrac{|\bar{\beta}|}{|\lambda-\bar{\alpha}|}|r|\leqslant\dfrac{|\bar{\beta}|}{|\lambda|-|\bar{\alpha}|}|r|=\dfrac{|\beta|}{1-|\alpha|}|r|<|r|<1$.故

$$\mathrm{Re}\{\frac{\lambda\beta z}{\lambda(\alpha+\beta z)-1}\}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1-\left|\dfrac{\beta r\exp(\mathrm{i}\theta)}{\bar{\lambda}-\alpha}\right|^2}{\left|1-\dfrac{\beta r\exp(\mathrm{i}\theta)}{\bar{\lambda}-\alpha}\right|^2}=$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1-|\zeta|^2}{\left|\exp(\mathrm{i}\theta)-\dfrac{\beta r}{\bar{\lambda}-\alpha}\right|^2|\exp(\mathrm{i}\theta)|}=$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1-|\zeta|^2}{|\exp(\mathrm{i}\theta)-\zeta|^2}.$$

其中:记 $P_\zeta(\theta)=\dfrac{1-|\zeta|^2}{|\exp(\mathrm{i}\theta)-\zeta|^2}$ 为 Poisson 核.则有

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{Re}\{1+z\frac{F''(z)}{F'(z)}\}\mathrm{d}\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{Re}\{1+z\frac{h''(z)}{h'(z)}\}\mathrm{d}\theta+\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1-|\zeta|^2}{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\zeta|^2}\right)\mathrm{d}\theta>$$

$$c(\theta_2-\theta_1)+\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}P_\zeta(\theta)\mathrm{d}\theta>$$

$$-\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)+\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)-\pi=-\pi.$$

因此,$F(z)=h(z)-\lambda g(z)$ 是近于凸的.由于 $g'(0)=\alpha h'(0)$,根据引理2,$f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 是稳定近于凸调和函数.

对于这一类函数,可以通过下面的定理对其系数进行估计.

定理3 设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 是定义在单位圆盘 D 上的调和函数,f,g 可以表示为 $h(z)=z+$

$a_2z^2+a_3z^3+\cdots$，$g(z)=b_1z+b_2z^2+b_3z^3+\cdots$，$w(z)=\alpha+\beta z$，满足

$$\mathrm{Re}\{1+z\frac{h''(z)}{h'(z)}\}>c,\qquad -\frac{1}{2}\leqslant c\leqslant 0.$$

其中：$z\in D$，则有系数估计

$$\begin{cases}a_1=1,\\ |a_n|\leqslant\prod_{i=1}^{n-1}(1-\frac{2c}{i+1}), & n\geqslant 2.\end{cases}$$

也可表示为

$$\begin{cases}a_1=1,\\ |a_2|\leqslant 1-c,\\ |a_n|\leqslant\frac{2(1-c)}{(n-1)n}[\prod_{i=1}^{n-2}(1+\frac{2(1-c)}{i})], & n\geqslant 3.\end{cases}$$

b_n 的系数估计为

$$|b_n|\leqslant(|\alpha|+\frac{n-1}{n-2c}|\beta|)[\prod_{i=1}^{n-1}(1-\frac{2c}{i+1})],\qquad n\geqslant 2.$$

证明　定义单位圆盘 D 上的一个函数 $p(z)=1+\frac{1}{1-c}\frac{zh''(z)}{h'(z)}$.

由于 $h(z)$在单位圆盘上局部单叶，函数 $p(z)=1+c_1z+c_2z^2+\cdots$是 D 上具有正实部的解析函数.因此，$|c_n|\leqslant 2$ 对于 $n=1,2,\cdots$都成立.根据$[p(z)-1](1-c)h'(z)=zh''(z)$，对比 z^n 的系数得到 $(n+1)na_{n+1}=(1-c)\sum_{k=1}^{n}ka_kc_{n+1-k}$，$n=1,2,\cdots$.则有

$$(n+1)|a_{n+1}|=\frac{1-c}{n}|\sum_{k=1}^{n}ka_kc_{n+1-k}|\leqslant\frac{2(1-c)}{n}\sum_{k=1}^{n}k|a_k|.$$

其中：$a_1=1$；$|a_2|\leqslant 1-c$；$|a_3|\leqslant\frac{1-c}{3}(3-2c)$.

假设当 $k=n$ 时，有 $n|a_n|\leqslant\frac{2(1-c)}{n-1}\prod_{i=1}^{n-2}(1+\frac{2(1-c)}{i})$ 成立. 当 $k=n+1$ 时，有

$$\begin{aligned}&(n+1)|a_{n+1}|\leqslant\frac{2(1-c)}{n}\sum_{k=1}^{n}k|a_k|\leqslant\\ &\frac{2(1-c)}{n}\{1+2(1-c)+\sum_{k=3}^{n}\frac{2(1-c)}{k-1}[\prod_{i=1}^{k-2}(1+\frac{2(1-c)}{i})]\}=\\ &\frac{2(1-c)}{n}[1+2(1-c)]\{1+\frac{2(1-c)}{2}+\sum_{k=4}^{n}\frac{2(1-c)}{k-1}[\prod_{i=2}^{k-2}(1+\frac{2(1-c)}{i})]\}=\cdots=\\ &\frac{2(1-c)}{n}[\prod_{i=1}^{n-3}(1+\frac{2(1-c)}{i})]\{1+\frac{2(1-c)}{n-2}+\sum_{k=n}^{n}\frac{2(1-c)}{k-1}[\prod_{i=n-2}^{k-2}(1+\frac{2(1-c)}{i})]\}=\\ &\frac{2(1-c)}{n}[\prod_{i=1}^{n-3}(1+\frac{2(1-c)}{i})][1+\frac{2(1-c)}{n-2}+\frac{2(1-c)}{n-1}(1+\frac{2(1-c)}{n-2})]=\\ &\frac{2(1-c)}{n}[\prod_{i=1}^{n-2}(1+\frac{2(1-c)}{i})](1+\frac{2(1-c)}{n-1})=\frac{2(1-c)}{n}[\prod_{i=1}^{n-1}(1+\frac{2(1-c)}{i})].\end{aligned}$$

即当 $k=n+1$ 时，有 $|a_{n+1}|=\frac{2(1-c)}{n(n+1)}[\prod_{i=1}^{n-1}(1+\frac{2(1-c)}{i})]$ 成立.

故可证得 $|a_n|\leqslant\frac{2(1-c)}{(n-1)n}[\prod_{i=1}^{n-2}(1+\frac{2(1-c)}{i})]$，$n\geqslant 3$.

下面证明上述系数估计有另外的表达形式. 当 $n\geqslant 3$ 时，有

$$|a_n|\leqslant\frac{2(1-c)}{(n-1)n}[\prod_{i=1}^{n-2}(1+\frac{2(1-c)}{i})]=$$

$$\frac{2(1-c)}{(n-1)n}[1+2(1-c)]\cdot[\prod_{i=1}^{n-3}(1+\frac{2(1-c)}{i+1})]=$$

$$\frac{2(1-c)(3-2c)}{(n-1)n}[\prod_{i=1}^{n-3}(\frac{i+3-2c}{i+1})]=$$

$$\frac{(2-2c)(3-2c)}{(n-1)n}[\prod_{i=1}^{n-3}(\frac{i+3}{i+1})(1-\frac{2c}{i+3})]=$$

$$\frac{(2-2c)(3-2c)}{(n-1)n}\cdot\frac{(n-1)n}{6}[\prod_{i=1}^{n-3}(1-\frac{2c}{i+3})]=$$

$$(\frac{2-2c}{2})(\frac{3-2c}{3})[\prod_{i=3}^{n-1}(1-\frac{2c}{i+1})]=\prod_{i=1}^{n-1}(1-\frac{2c}{i+1}).$$

当 $n=2$ 时,$|a_2|\leqslant 1-c$ 也满足上式,即可得到系数估计的另一种形式

$$\begin{cases} a_1=1, \\ |a_n|\leqslant\prod_{i=1}^{n-1}(1-\frac{2c}{i+1}), \qquad n\geqslant 2. \end{cases}$$

接下来考虑$|b_n|$的范围,根据 $g'(z)=(\alpha+\beta z)h'(z)$,对比 z^n 的系数关系,有$(n+1)b_{n+1}=\alpha(n+1)a_{n+1}+\beta na_n$.则有

$$|b_{n+1}|=|\alpha a_{n+1}+\frac{n}{n+1}\beta a_n|\leqslant|\alpha||a_{n+1}|+\frac{n}{n+1}|\beta||a_n|\leqslant$$

$$|\alpha|[\prod_{i=1}^{n}(1-\frac{2c}{i+1})]+\frac{n}{n+1}|\beta|[\prod_{i=1}^{n-1}(1-\frac{2c}{i+1})]=$$

$$[\prod_{i=1}^{n-1}(1-\frac{2c}{i+1})]\left(|\alpha|+\frac{\frac{n}{n+1}}{1-\frac{2c}{n+1}}|\beta|\right)=$$

$$(|\alpha|+\frac{n}{n+1-2c}|\beta|)[\prod_{i=1}^{n}(1-\frac{2c}{i+1})].$$

即当 $n\geqslant 2$ 时,$|b_n|\leqslant(|\alpha|+\frac{n-1}{n-2c}|\beta|)[\prod_{i=1}^{n-1}(1-\frac{2c}{i+1})]$.

定理3证毕.

当$|\alpha|=0$,$|\beta|=1$,且 $c=-\frac{1}{2}$时,文献[3]中的系数估计是定理3的一种特殊结论,故在该条件下,以上估计是精确的.

Bshouty 等[5]提出一系列的问题和猜想.其中,问题3.14提出当满足条件 $\mathrm{Re}\{1+z\frac{h''(z)}{h'(z)}\}>-\frac{1}{2}$,$w(z)=z^2$ 的情况下,$f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$的最大叶数为多少.定理4估计了当 $w(z)=z^2$ 时,f 的稳定近于凸半径,部分回答了这一问题.

定理4 设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$是定义在单位圆盘 D 上的调和函数,$h'(0)\neq 0$,满足

$$\mathrm{Re}\{1+z\frac{h''(z)}{h'(z)}\}>c, \quad -\frac{1}{2}<c\leqslant 0, \quad z\in D.$$

当 $w(z)=z^2$ 时,调和函数 $f(z)$的稳定近于凸半径 $r\geqslant\sqrt{(1+2c)/(5+2c)}$.

证明 考虑解析函数 $F(z)=h(z)-\lambda g(z)$,其中,$|\lambda|=1$,那么

$$F'(z)=(1-\lambda z^2)h'(z), \qquad F''(z)=(1-\lambda z^2)h''(z)+(-2\lambda z)h'(z).$$

显然,在 D 上 $F'(z)\neq 0$,故

$$\mathrm{Re}\{1+z\frac{F''(z)}{F'(z)}\}=\mathrm{Re}\{1+z\frac{h''(z)}{h'(z)}\}+2\mathrm{Re}\{\frac{\lambda z^2}{\lambda z^2-1}\}.$$

其中:$2\mathrm{Re}\{\frac{\lambda z^2}{\lambda z^2-1}\}=\frac{\lambda z^2}{\lambda z^2-1}+\frac{\overline{\lambda z^2}}{\overline{\lambda z^2}-1}=1-\frac{1-|\lambda z^2|^2}{(1-\lambda z^2)(1-\overline{\lambda z^2})}$.

令 $z=r\exp(\mathrm{i}\theta)$，可得

$$2\mathrm{Re}\{\frac{\lambda z^2}{\lambda z^2-1}\}=1-\frac{1-r^4}{1+r^4-2\mathrm{Re}\{\lambda z^2\}}\geqslant 1-\frac{1-r^4}{1+r^4-2\mid\lambda z^2\mid}=1-\frac{1-r^4}{1+r^4-2r^2}=-\frac{2r^2}{1-r^2}.$$

当 $|z|<\sqrt{(1+2c)/(5+2c)}$ 时，有

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{Re}\{1+z\frac{F''(z)}{F'(z)}\}\mathrm{d}\theta>\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left(c-\frac{2r^2}{1-r^2}\right)\mathrm{d}\theta=\left(c-\frac{2r^2}{1-r^2}\right)(\theta_2-\theta_1)\geqslant$$

$$\left(c-\frac{2\frac{1+2c}{5+2c}}{1-\frac{1+2c}{5+2c}}\right)(\theta_2-\theta_1)=-\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)\geqslant-\pi.$$

其中：$\theta_1<\theta_2<\theta_1+2\pi$.

从而，$f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 至少在 $|z|<\sqrt{(1+2c)/(5+2c)}$ 内为稳定近于凸的.

参考文献：

[1] BSHOUTY D, LYZZAIK A. Close-to-convexity criteria for planar harmonic mappings[J]. Complex Analysis and Operator Theory, 2011, 5(3): 767-774.

[2] MOCANU P T. Injectivity conditions in the complex plane[J]. Complex Anal Oper Theory, 2011, 5(3): 759-766.

[3] NAGPAL S, RAVICHANDRAN V. On a subclass of close-to-convex harmonic mappings[J]. Complex Variables and Elliptic Equations, 2014, 59(2): 204-216.

[4] BSHOUTY D, JOSHI S S, JOSHI S B. On close-to-convex harmonic mappings[EB/OL]. [2012-1-11]. http://dx.doi.org/10.1080/17476933.2011.647002.

[5] BSHOUTY D, LYZZAIK A. Problems and conjectures in planar harmonic mappings[J]. J Analysis, 2010, 18: 69-81.

[6] HERNÁNDEZ R, MARTÍN M T. Stable geometric properties of analytic and harmonic functions[J]. Math Proc Camb Phil Soc, 2013, 155(2): 343-359.

[7] 石擎天，黄心中. 调和映照与其剪切函数的单叶性[J]. 华侨大学学报：自然科学版，2013，34(3)：334-338.

[8] 王其文，黄心中. 在微分算子作用下调和函数的单叶半径估计[J]. 华侨大学学报：自然科学版，2014，35(2)：227-231.

[9] KAPLAN W. Close-to-convex schlicht functions[J]. Mich Math J, 1952, 1(2): 169-185.

[10] CLUNIE J, SHEIL-SMALL T. Harmonic univalent functions[J]. Ann Acad Sci Fenn Ser A I Math, 1984, 9: 3-25.

On the Analytic Properties and Coefficient Estimate for Close-to-Convex Harmonic Mappings

HUANG Yun, HUANG Xin-zhong

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Research analytic representing formula and coefficient estimates for $h(z)$ with $\mathrm{Re}\{1+z\frac{h''(z)}{h'(z)}\}>c$, $-\frac{1}{2}<c\leqslant 0$, where h is the analytic part of harmonic mappings $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ that are stable close-to-convex property on unit disk D. If the dilatation function $w(z)$ is a linear function, the stable close-to-convex criterion is proved. The results improve the one made by Shouty and Nagpal. Moreover, we also obtain the stable close-to-convex radius estimate for $f=h+\bar{g}$ with $\mathrm{Re}\{1+z\frac{h''(z)}{h'(z)}\}>c$, $-\frac{1}{2}<c\leqslant 0$ and $w(z)=z^2$ on the unit disk D.

Keywords: harmonic mapping; stable close-to-convex; coefficient estimate; univalent radius

（**责任编辑：**钱筠　　**英文审校：**黄心中）