

# 稳定单叶调和凸函数和星像函数的构造

朱孟坤, 黄心中

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

**摘要:** 研究单位圆盘  $D=\{z\parallel z|<1\}$  上的调和凸映照和调和星像映照的几何性质. 利用单叶调和映照剪切构造, 通过单叶解析  $k$ -凸函数, 构造了一类  $D$  上具有稳定的单叶调和凸像映照和星像映照, 所得结果改进并且推广了 Hernández 等的结果.

**关键词:** 剪切构造;  $k$ -凸函数; 稳定调和凸像映照; 稳定调和星像映照

**中图分类号:** O 174.51

**文献标志码:** A

## 1 预备知识

单位圆盘  $D=\{z\parallel z|<1\}$  上的复值调和映照可表示为  $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ , 其中,  $h(z)$ ,  $g(z)$  为在  $D$  上的解析函数. Lewy<sup>[1]</sup> 证明了单连通区域  $\Omega$  上的调和映照  $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$  是局部单叶的, 当且仅当它的  $J_f(z)=|h'(z)|^2-|g'(z)|^2\neq 0$ , 当  $J_f(z)>0$  时, 称  $f(z)$  是保向的; 否则, 称  $f(z)$  为反向的. 如果  $\Omega$  上的单叶调和映照  $f(z)$  满足  $|g'(z)/h'(z)|\leq t<1$ ,  $t$  为常数, 则  $f(z)$  为  $\Omega$  上的调和拟共形映照.

关于拟共形映照的性质, 可见文献[2]. 如果  $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n+\sum_{n=2}^{\infty}\overline{b_nz^n}$  为  $D$  上的单叶调和映照, Clunie 等<sup>[3]</sup> 提出了系数猜想,  $|a_n|\leq \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$ ,  $|b_n|\leq \frac{(n-1)(2n-1)}{6}$ , 极值映照可

由  $K(z)=\frac{z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3}+\frac{\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3}$  达到. 该猜想在单叶调和映照的一些子集上成立, 但在整个集合上成立与否仍未得到证明. 近年来, 许多学者对该猜想做了大量的研究<sup>[4-7]</sup>. 文献[8-9]研究了单叶调和映照成为调和拟共形映照的性质. Hernández 等<sup>[10]</sup> 研究了单叶调和映照的稳定性问题, 围绕调和映照及解析函数的稳定单叶性及稳定几何性质进行深入研究, 对以上猜想的解决做了大量工作.

定义在  $D$  上的保向单叶调和凸映照  $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ , 对任意  $\lambda\in\partial D$ , 若  $f_\lambda(z)=h(z)+\lambda\overline{g(z)}$  都是  $D$  上的单叶凸映照, 则称  $f(z)$  为  $D$  上的稳定调和凸映照(SHC); 如果  $f_\lambda(z)=h(z)+\lambda\overline{g(z)}$  都是  $D$  上的单叶星像映照, 则称  $f(z)$  为  $D$  上的稳定调和星像映照(SHS\*). Hernández 等<sup>[10]</sup> 研究  $D$  上  $k$ -凸解析函数的水平剪切函数  $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$  为稳定调和凸映照的问题, 证明了如下定理.

**定理 A** 对任意的  $\lambda$  且  $|\lambda|=1$ , 保向调和映照  $f_\lambda(z)=h(z)+\lambda\overline{g(z)}$  为  $D$  上的调和凸映照的充分必要条件, 是  $F_\lambda(z)=h(z)+\lambda\overline{g(z)}$  为  $D$  上凸解析函数.

**定理 B** 若  $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$  是  $D$  上的保向单叶稳定调和凸映照, 则对任意的  $\lambda\in\overline{D}$ , 有  $h(z)+\lambda\overline{g(z)}$  都是  $D$  上的凸函数. 特别地, 当  $\lambda=0$  时,  $h(z)$  是  $D$  上的单叶凸函数.

**定义 1**  $D$  上局部单叶解析函数  $\varphi(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$  称为  $k$ -凸解析函数, 若  $\varphi(z)$  满足

收稿日期: 2015-01-05

通信作者: 黄心中(1957-), 男, 教授, 博士, 主要从事函数论的研究. E-mail: huangxz@hqu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11471128); 福建省自然科学基金资助项目(2014J01013)

$$\operatorname{Re}\{1+z\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)}\}\geq k>0, \quad |z|<1. \tag{1}$$

特别地, 当式(1)中的非负常数  $k$  不存在时, 称  $\varphi(z)$  为 0-凸函数.

基于定理 A,B,Hernández 等<sup>[10]</sup>还证明了定理 C.

**定理 C** 设  $\varphi(z)$  为一个  $k$ -凸解析函数, 则存在  $\mu \in D$ , 当  $|\mu|$  充分小时, 由方程组

$$\left. \begin{aligned} h(z)-g(z) &= \varphi(z), & z \in D, \\ g'(z)/h'(z) &= \mu z, & z \in D \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

构造出来的调和映照  $f(z)=h(z)+\overline{g(z)} \in \text{SHC}$ .

定理 C 只是个定性的结论, 它只给出了当  $|\mu| \leq \frac{k}{k+1+\sqrt{1+2k}}$  时, 由式(2)构造的  $f(z)=h(z)+\overline{g(z)} \in \text{SHC}$ . 对于给定的  $k$ -凸解析函数  $\varphi(z)$ , 找到  $\mu$  的确切范围, 使构造的调和映照  $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$  为稳定单叶调和凸映照, 是有待解决的问题. 相应于单叶函数的 Alexander 定理, Hernández 等<sup>[10]</sup>证明了定理 D.

**定理 D** 定义在单位圆上的解析函数  $h(z), g(z), H(z)$  以及  $G(z)$  满足如下关系, 即

$$zh'(z)=H(z), \quad zg'(z)=-G(z),$$

则  $f(z)=h(z)+\overline{g(z)} \in \text{SHC}$  的充分必要条件是  $F(z)=H(z)+\overline{G(z)} \in \text{SHS}^*$ .

根据以上研究成果, 寻找在什么条件下使得  $f(z)=h(z)+\overline{g(z)} \in \text{SHC}$  或  $\text{SHS}^*$ , 是个相当有趣的问题. 文中将改进定理 C 的结果, 并相应地找到一类稳定调和星像映照.

## 2 主要结果及证明

由  $k$ -凸解析函数的定义可知:  $0 \leq k \leq 1$ . 当  $k=1$  时, 恒等映照  $\varphi(z)=z$  为  $D$  上的 1-凸解析函数. 构造一类  $k$ -凸解析函数, 使得  $0 \leq k \leq 1$ . 记函数  $\varphi(z)=z+\frac{1}{4+\alpha}z^2$ , 其中,  $\alpha$  为任意正实数. 易证  $\varphi(z)$  在  $D$  上单叶解析. 由调和映照的最小模原理可得

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{1+z\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)}\} &= \operatorname{Re}\{1+\frac{2z}{4+\alpha+2z}\} = \\ &= \frac{1}{2}(\frac{4+\alpha+4z}{4+\alpha+2z}+\frac{4+\alpha+4\bar{z}}{4+\alpha+2\bar{z}}) = \\ &= \frac{(4+\alpha)^2+6(4+\alpha)\operatorname{Re}\{z\}+8|z|^2}{(4+\alpha)^2+4(4+\alpha)\operatorname{Re}\{z\}+4|z|^2} \geq \frac{\alpha}{\alpha+2} > 0. \end{aligned}$$

故  $\varphi(z)$  为  $\frac{\alpha}{\alpha+2}$ -凸解析函数, 当  $z \rightarrow -1$  时,  $k \rightarrow \frac{\alpha}{\alpha+2}$ . 当  $\alpha=0$  时,  $\varphi(z)$  为 0-凸解析函数; 当  $\alpha \rightarrow \infty$  时,  $\varphi(z)$  为 1-凸解析函数.

**定理 1** 存在一个  $\varphi_0(z)$  为  $D$  上的单叶解析凸函数, 由方程组

$$\left. \begin{aligned} H(z)-G(z) &= \varphi_0(z), & z \in D, \\ G'(z) &= \mu zH'(z), & z \in D, \quad 0 < |\mu| < 1 \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

构造的调和映照  $F(z)=H(z)+\overline{G(z)} \notin \text{SHC}$ .

证明 取  $\varphi_0(z)=z+\frac{1}{4}z^2$ , 显然  $\varphi_0(z)$  为  $D$  上的 0-凸函数. 那么满足式(3)的解  $F(z)=H(z)+\overline{G(z)}$ , 有

$$H(z)=\frac{2\mu+1}{2\mu^2}\log\frac{1}{1-\mu z}-\frac{z}{2\mu}, \quad G(z)=H(z)-z-\frac{z^2}{4}.$$

记  $\tilde{F}_\lambda(z)=H(z)+\lambda G(z)$ ,  $\lambda \in \partial D$ , 易知  $\tilde{F}_\lambda(z)$  在  $D$  上单叶解析. 又因为  $|\lambda|=1, 0 < |\mu| < 1$  且  $z \in D$ , 可知  $\tilde{F}'_\lambda(z)=H'(z)(1+\lambda\mu z)=\frac{(2+z)(1+\lambda\mu z)}{2(1-\mu z)} \neq 0$ . 根据调和映照最小模原理可得

$$\min_{z \in D} \operatorname{Re}\{1+z\frac{\tilde{F}''_\lambda(z)}{\tilde{F}'_\lambda(z)}\} = \min_{z \in D} \operatorname{Re}\{1+z\frac{H''(z)+\lambda G''(z)}{H'(z)+\lambda G'(z)}\} \leq$$

$$\operatorname{Re}\left\{1-\frac{H''(-1)+\lambda G''(-1)}{H'(-1)+\lambda G'(-1)}\right\}=$$
$$\operatorname{Re}\left\{1-\frac{1+2\mu-\lambda\mu^2}{(1+\mu)(1-\lambda\mu)}\right\}=\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{1+\mu}-\frac{1}{1-\lambda\mu}\right\}.$$

(4)

记  $\mu=\rho\exp(i\theta)$ ,  $|\rho|<1$ , 令  $\lambda=\exp(-i\theta)$ , 则式(4)恒小于等于零. 故当  $0<|\mu|<1$  时,  $\tilde{F}_\lambda(z)$  为非凸单叶解析函数, 根据定理 A,  $F(z)=H(z)+\overline{G(z)}\notin\text{SHC}$ , 证毕.

由定理 1 可知: 对于定理 C, 只有当  $\varphi(z)$  为  $k$ -凸函数时, 由式(3)构造的调和映照  $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$  才有可能为稳定凸的. 为此, 将  $\mu$  的取值范围精确化, 方便构造出更多的 SHC 类函数.

**定理 2** 设  $\varphi(z)$  是  $D$  上的  $k$ -凸解析函数( $k>0$ ), 则对于  $\mu\in D$  且满足  $|\mu|\leqslant\frac{k}{1+\sqrt{1+k^2}}$ , 由方程组

$$\left.\begin{aligned}h(z)-g(z)&=\varphi(z), & z\in D, \\g'(z)/h'(z)&=\mu z, & z\in D\end{aligned}\right\}$$

(5)

构造出来的单叶保向调和映照  $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}\in\text{SHC}$ .

**证明** 定义  $\varphi_\theta(z)=h(z)-\exp(2i\theta)g(z)$ ,  $\omega(z)=\mu z$ . 根据定理 A, 只需验证函数  $\varphi_\theta(z)$  在  $D$  内对于任意的  $\theta\in(0,\pi)$  为凸解析函数. 利用  $\varphi(z)$  为  $k$ -凸解析函数这个假设以及凸解析函数的特点, 可得到

$$\operatorname{Re}\left\{1+z\frac{\varphi''_\theta(z)}{\varphi'_\theta(z)}\right\}=\operatorname{Re}\left\{1+z\frac{\varphi''(z)+(1-\exp(2i\theta))g''(z)}{\varphi'(z)+(1-\exp(2i\theta))g'(z)}\right\}=$$
$$\operatorname{Re}\left\{1+z\frac{\varphi''(z)+(1-\exp(2i\theta))g''(z)}{\varphi'(z)+(1-\exp(2i\theta))g'(z)}-\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)}+\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)}\right\}=$$
$$\operatorname{Re}\left\{1+z\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)}\right\}+\operatorname{Re}\left\{\frac{z(1-\exp(2i\theta))(g''(z)\varphi'(z)-g'(z)\varphi''(z))}{\varphi'^2(z)+(1-\exp(2i\theta))g'(z)\varphi'(z)}\right\}=$$
$$\operatorname{Re}\left\{1+z\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)}\right\}+\operatorname{Re}\left\{\frac{z(1-\exp(2i\theta))(g''(z)h'(z)-g'(z)h''(z))}{h'^2(z)(1-\exp(2i\theta)\omega(z))(1-\omega(z))}\right\}\geqslant$$
$$k+\operatorname{Re}\left\{\frac{z(1-\exp(2i\theta))\omega'(z)}{(1-\exp(2i\theta)\omega(z))(1-\omega(z))}\right\}=$$
$$k+\operatorname{Re}\left\{\frac{(1-\exp(2i\theta))\mu z}{(1-\exp(2i\theta)\mu z)(1-\mu z)}\right\}=$$
$$k+\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{1-\mu z}\right\}-\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{1-\exp(2i\theta)\mu z}\right\}\geqslant$$
$$k+\frac{1}{1+|\mu z|}-\frac{1}{1-|\exp(2i\theta)\mu z|}\geqslant$$
$$k+\frac{1}{1+|\mu|}-\frac{1}{1-|\mu|}=k-\frac{2|\mu|}{1-|\mu|^2}.$$

(6)

当  $|\mu|\leqslant\frac{k}{1+\sqrt{1+k^2}}$  时, 式(6)恒大于零, 从而由式(5)构造出来的调和映照  $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}\in\text{SHC}$ . 下面通过具体的例子构造 SHC 函数.

**例 1** 令  $\varphi(z)=z$ , 则  $\varphi(z)$  为 1-凸函数, 由定理 2 可知: 仅当  $|\mu|\leqslant\sqrt{2}-1$  时, 满足式(5)的解  $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}\in\text{SHC}$ . 分别取  $\mu=\frac{3}{10}, \mu=\sqrt{2}-1, \mu=1/2$ , 可得  $f_{\frac{3}{10}}(z)=\frac{20}{3}\operatorname{Re}\{\log\frac{10}{10-3z}\}-\bar{z}$ ,  $f_{\sqrt{2}-1}(z)=2(\sqrt{2}+1)\operatorname{Re}\{\log\frac{1}{1-(\sqrt{2}-1)z}\}-\bar{z}$ ,  $f_{\frac{1}{2}}(z)=4\operatorname{Re}\{\log\frac{2}{2-z}\}-\bar{z}$ . 通过 Mathematica 软件, 它们将  $D$  分别映成的区域, 如图 1 所示. 图 1 中: Re 表示实部; Im 表示虚部.

通过探究定理 2 发现,  $\omega(z)=\mu z$  的形式并不是固定的, 对此还可作如下推广.

**推论 1** 设  $\varphi(z)$  为  $D$  上的  $k$ -凸解析函数( $k>0$ ). 则对于  $\mu\in D$  且满足  $|\mu|\leqslant\frac{k}{n+\sqrt{k^2+n^2}}$ , 由方程组

$$\left.\begin{aligned}h(z)-g(z)&=\varphi(z), & z\in D, \\g'(z)/h'(z)&=\mu z^n, & z\in D\end{aligned}\right\}$$

(7)

构造出来的单叶保向调和映照  $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}\in\text{SHC}$ .

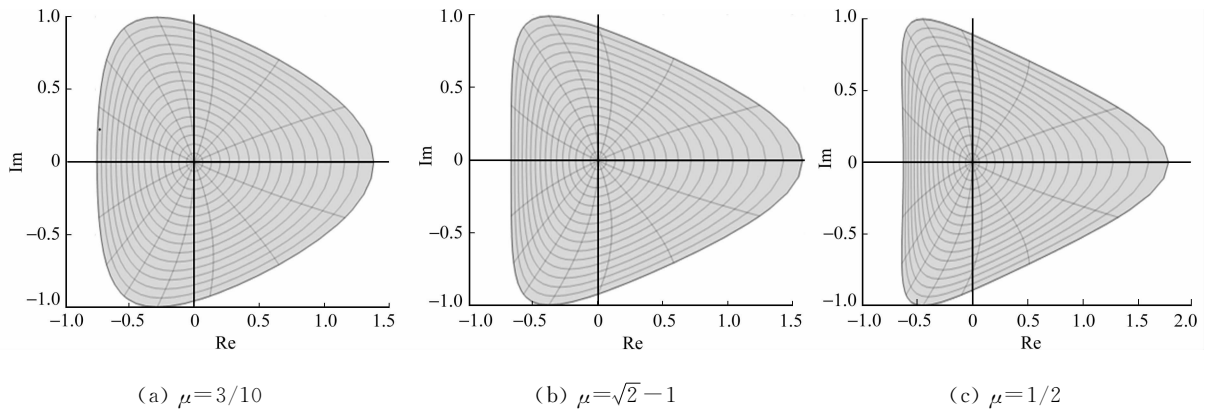


图 1 单位圆盘  $D$  经过  $f_\mu(z)$  映照后的图像

Fig. 1 Function  $f_\mu(z)$  maps  $D$  onto the domains respectively

**例 2** 令  $\varphi(z) = z + \frac{1}{6}z^2$ , 则  $k = \frac{1}{2}$  且  $|\mu| \leq \sqrt{17} - 4$ , 取  $\mu = \frac{3}{25}$ , 得到方程组

$$\begin{cases} h(z) - g(z) = z + \frac{1}{6}z^2, & z \in D, \\ \frac{g'(z)}{h'(z)} = \frac{3}{25}z^2, & z \in D \end{cases}$$

的解, 即  $f(z) = \operatorname{Re}\left\{\frac{5\sqrt{3}}{3}\log\frac{30\sqrt{3}+18z}{30\sqrt{3}-18z} - \frac{25}{9}\log\left(1 - \frac{3}{25}z^2\right)\right\} - \overline{z} - \frac{1}{6}\overline{z}^2$ . 通过 Mathematica 软件  $f(z)$  将  $D$  映成的区域, 如图 2 所示.

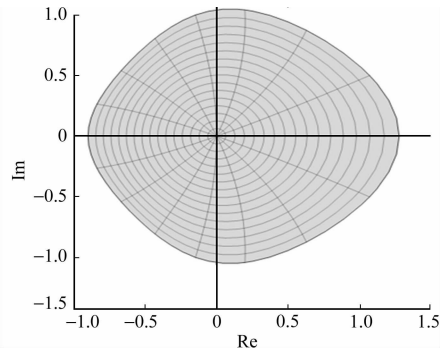


图 2 单位圆盘  $D$  经  $f(z)$  映照后的图像

Fig. 2 Function  $f(z)$  maps  $D$  onto the domain

**定理 3** 设  $\varphi(z)$  是定义在  $D$  上的  $k$ -凸解析函数. 则对于  $\mu \in D$  且满足  $|\mu| \leq \frac{k}{1 + \sqrt{k^2 + 1}}$ , 使调和映照  $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$  为  $D$  上关于原点的稳定调和星像映照, 其

中,  $h(z), g(z)$  分别满足  $h(z) = \frac{z}{1 - \mu z} \varphi'(z), g(z) = -\frac{\mu z^2}{1 - \mu z} \varphi'(z)$ .

证明 记

$$\begin{cases} H(z) = \int_0^z \frac{h(\zeta)}{\zeta} d\zeta = \int_0^z \frac{1}{1 - \mu\zeta} \varphi'(\zeta) d\zeta, \\ G(z) = \int_0^z \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta = \int_0^z \frac{\mu\zeta}{1 - \mu\zeta} \varphi'(\zeta) d\zeta \end{cases}$$

由简单计算可得,  $H(z) - G(z) = \varphi(z), G'(z)/H'(z) = \mu z$ . 由定理 2 可知  $F(z) = H(z) + \overline{G(z)}$  为  $D$  上的稳定调和凸映照, 又因为  $zH'(z) = h(z), zG'(z) = -g(z)$  且  $h(0) = g(0) = 0$ , 由定理 D 可知  $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$  为  $D$  上的关于原点的稳定调和星像映照.

**例 3** 对于  $D$  上的 1-凸解析函数  $\varphi(z) = z$ . 取  $\mu = \frac{1}{4}$ . 根据定理 3 可得  $h(z) = \frac{4z}{4 - z}, g(z) = -\frac{z^2}{4 - z}$ , 故  $f(z) = \frac{4z}{4 - z} - \frac{\overline{z^2}}{4 - \overline{z}}$ .

通过 Mathematica 软件,  $f(z)$  将  $D$  映成的区域, 如图 3 所示. 类比推论 1, 很容易得到如下推论.

**推论 2** 设  $\varphi(z)$  为  $D$  上的  $k$ -凸解析函数, 则对于  $\mu \in D$  且满足  $|\mu| \leq \frac{k}{n + \sqrt{k^2 + n^2}}$ , 使调和映照  $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$  为  $D$  上关

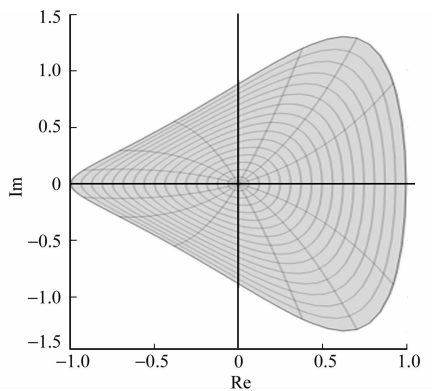


图 3 单位圆盘  $D$  经  $f(z)$  映照后的图像

Fig. 3 Function  $f(z)$  maps  $D$  onto the domain

于原点的稳定调和星像映照. 其中,  $h(z), g(z)$  分别满足  $h(z) = \frac{z}{1-\mu z^n} \varphi'(z), g(z) = \frac{\mu z^{n+1}}{1-\mu z^n} \varphi'(z)$ .

推论 2 可根据推论 1、定理 3 及定理 D 直接得出.

文献[10]中证明了:若  $f(z) = h(z) + \overline{g(z)} \in \text{SHC}$ , 则对于所有非负整数  $n$ , 都有  $||a_n| - |b_n|| \leq \max\{|a_n|, |b_n|\} \leq |a_n| + |b_n| \leq 1$ . 极值映照可由  $f(z) = \frac{z}{1-z}$  达到. 相应于定理 2 可以得到, 若  $f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n + \overline{\sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n}$  由式(5)构造, 通过系数比较得到  $|a_n| \leq 1, |b_n| \leq \frac{n-1}{n} \frac{k}{1+\sqrt{1+k^2}}, n \geq 2$ .

参考文献:

[1] LEWY H. On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings [J]. Uspekhi Mat Nauk, 1948, 3(2): 216-219.

[2] AHLFORS L V. Lectures on quasiconformal mappings[M]. New Jersey: Van Nostrand Princeton, 1966: 15-22.

[3] CLUNIE J. SHEIL-SMALL T. Harmonic univalent functions[J]. Ann Acad Sci Fenn Ser (A), 1984, 9(1): 3-25.

[4] 石擎天, 黄心中. 调和映照与其剪切函数的单叶性[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2013, 34(3): 334-338.

[5] 王其文, 黄心中. 在微分算子作用下调和函数的单叶半径估计[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2014, 35(2): 227-231.

[6] 潘旭玲, 黄心中. 一类单位圆盘上单叶调和映照的延拓定理[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2013, 34(6): 701-705.

[7] BSHOUTY D, LYZZAIK A. Problems and conjectures in planar harmonic mappings[J]. J Analysis, 2010, 18: 69-81.

[8] 黄心中. 单位圆到水平条形无界区域的调和拟共形映照[J]. 数学学报: 中文版, 2014, 57(7): 875-880.

[9] HUANG Xin-zhong. Harmonic quasiconformal mappings on the upper half-plane[J]. Complex Variables and Elliptic Equations, 2013, 58(7): 1005-1011.

[10] HERNÁNDEZ R, MARTÍN M J. Stable geometric properties of analytic and harmonic functions[J]. Math Proc Camb Phil Soc, 2013, 155(2): 343-359.

[11] DUREN P. Univalent functions[M]. New York: Springer-Verlag, 1983: 40-45.

[12] DUREN P. Harmonic mappings in the plane[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004: 29-56.

Construction of Stale Univalent Convex Harmonic  
Mappings and Starlike Mappings

ZHU Meng-kun, HUANG Xin-zhong

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

**Abstract:** Studying the geometric properties of stable univalent convex harmonic mappings and starlike harmonic mappings in  $D = \{z \mid |z| < 1\}$ , we construct one class of stable univalent convex and starlike harmonic mappings in  $D$  by the way of shear constructure with  $k$ -convex analytic functions. Our results improve and generalize the results obtained by Hernández, etc.

**Keywords:** shear constructure;  $k$ -convex mapping; stable convex harmonic mapping; stable starlike harmonic mapping

(责任编辑: 黄晓楠      英文审校: 黄心中)