

# 一类极小系统的动力性状

颜棋, 尹建东

(南昌大学 理学院, 江西 南昌 330031)

**摘要:** 引进了真弱几乎周期点极小系统这一新概念, 即一个含有真的弱几乎周期点而不存在真子系统具有此性质的系统, 并证明了该系统是拓扑传递, 具有满测度中心. 结果表明: 该系统是 Takens-Ruelle 混沌的, 强遍历和完全遍历敏感的.

**关键词:** 弱几乎周期点; 极小系统; 强遍历; 遍历敏感

**中图分类号:** O 189.1

**文献标志码:** A

$(X, f)$  为一个紧致系统,  $X$  为紧致度量空间,  $f$  为  $X$  上的连续自映射. 要研究  $(X, f)$  的动力性状, 一种常见的用法是研究该系统的全部子系统, 即系统的全部不变子集, 并弄清楚各子系统的性质及原系统之间的关系. 从而那些不可再分解的更小的系统成为研究的主要对象. 拓扑动力系统的核心问题是研究点的轨道渐近性或拓扑结构. 为了能够更深刻地刻画拓扑动力系统中点的轨道结构与遍历内涵, 相继引进了弱几乎周期点和拟弱几乎周期点这两个概念<sup>[1-2]</sup>, 并指出存在真的弱几乎周期点. 1993 年, Coven 等<sup>[3]</sup>定义了熵极小系统概念, 如果有非空不变闭子集  $Y \subseteq X$ , 使得  $\text{ent}(f|_Y) = \text{ent}(f)$ , 则  $Y = X$ , 即熵极小系统没有真子系统和原系统的熵一致, 熵极小系统是拓扑传递的, 以及线段上拓扑传递分段单调的连续映射是熵极小的. 王肖义等<sup>[4]</sup>定义了混沌极小系统概念, 如果它本身在 Li-Yorke 意义下是混沌的, 并且所有真子系统都不是 Li-Yorke 混沌的, 讨论其部分动力性状. 本文给出了真弱几乎周期点极小系统这一新概念, 即  $f$  是有真的弱几乎周期点, 若  $Y$  是  $X$  的关于  $f$  不变的非空闭子集, 且  $f|_Y$  具有真的弱几乎周期点, 则  $Y = X$ .

## 1 基本概念和记号

设  $(X, f)$  是一个紧致系统,  $\mathbf{Z}_+$  为正整数集. 假设  $U, V \subseteq X$  是两个非空开集,  $x \in X$ . 记  $N(U, V) = \{n \in \mathbf{Z}_+ \mid U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset\}$  和  $N(x, U) = \{n \in \mathbf{Z}_+ \mid f^n(x) \in U\}$ .

设  $S \subseteq \mathbf{Z}_+$ , 令  $\eta(S) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\# \{S \cap (1, 2, 3, \dots, n)\}}{n}$ , 这里  $\#(\cdot)$  表示集合的基数. 若  $\eta(S) > 0$ , 则称  $S$  有正上密度(PUD).

设  $x \in X$ ,  $x$  在  $f$  的作用下生成的轨道  $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots\}$  记作  $\text{orb}(x)$ , 易见  $\overline{\text{orb}(x)}$  是对  $f$  不变的闭子集.

$A \subseteq \mathbf{Z}_+$  称为相对稠密的, 若存在  $N \in \mathbf{Z}_+$  使得对于任意  $n \in \mathbf{Z}_+$ ,  $[n, n+N] \cap A \neq \emptyset$ .

如果对任意的两个非空开集  $U, V$ , 有  $N(U, V) \neq \emptyset$ , 则称  $f$  是拓扑传递的; 如果对任意的两个非空开集  $U, V$ ,  $N(U, V)$  具有正上密度, 则称  $f$  是拓扑遍历的; 如果对任意的两个非空开集  $U, V$ ,  $N(U, V)$  是相对稠密的, 则称  $f$  是拓扑强遍历的.

$M$  称为极小的, 如果  $M$  是  $X$  的非空不变闭子集, 且不存在  $M$  的真子集满足上述性质. 假如  $M \subseteq X$

收稿日期: 2014-08-30

通信作者: 尹建东(1975-), 男, 副教授, 博士, 主要从事拓扑动力系统的研究. E-mail: yjdaxf@163.com.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11261039); 江西省自然科学基金资助项目(20132BAB201009)

是极小的,  $x \in M$ , 则称  $x$  是  $f$  的一个极小点,  $f$  所有的极小点的集合记为  $A(f)$ .

点  $x \in X$  称为  $f$  的一个弱几乎周期点, 对任意的  $\epsilon > 0$ , 存在整数  $N_\epsilon > 0$ , 使得基数

$$\#(\{r \mid f^r(x) \in V(x, \epsilon), 0 < r < nN_\epsilon\}) \geq n, \quad \forall n > 0.$$

上式中:  $V(x, \epsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\}$  是  $x$  的半径为  $\epsilon$  的球形邻域;  $f$  的所有弱几乎周期点的集合记为  $W(f)$ .

给定一个紧致系统  $(X, f)$ , 如果  $W(f) - A(f) \neq \emptyset$ , 则称该系统含有真的弱几乎周期点<sup>[1]</sup>.

用  $M(X)$  表示可测空间  $(X, \beta(X))$  上的全体概率测度的集合, 这里  $\beta(X)$  表示由  $X$  上的开集所生成的 Borel- $\sigma$  代数, 它是一个可度量紧致有仿射结构的凸空间, 其上拓扑称为  $\omega^*$  拓扑.  $m \in M(X)$  称作  $f$  的不变测度, 如果  $m(f^{-1}(A)) = m(A)$  对于任意的  $A \in \beta(X)$  成立.  $f$  的全体不变测度的集合记为  $M(X, f)$ . 设  $m \in M(X, f)$ , 用  $\text{supp}(m)$  表示  $m$  的全体支撑点的集合, 即

$$\text{supp}(m) = \{x \in X \mid \forall \epsilon > 0, m(V(x, \epsilon)) > 0\}.$$

$(X, f)$  称为  $E$ -系统, 若  $f$  是拓扑传递的, 且存在  $m \in M(X, f)$ , 使得  $\text{supp}(m) = X$ . 如果存在  $X$  中的非空不变闭子集  $E$ , 使得  $m(E) = 1$  对于任意的  $m \in M(X)$  成立, 且  $E$  无真子集满足上述条件, 则称  $E$  是  $f$  相对  $X$  的测度中心, 将  $f$  的测度中心记为  $M(f)$ <sup>[5-6]</sup>.

设  $V \subseteq X, \delta > 0$ , 记  $S_f(V, \delta) = \{n \in \mathbf{Z}_+ \mid d(f^n(x), f^n(y)) > \delta, x, y \in V\}$ .  $f$  是初值敏感依赖的, 如果存在  $\delta > 0$ , 对于  $X$  中的任意非空开集  $V$ , 集合  $S_f(V, \delta)$  是非空的. 此时,  $\delta$  称为  $f$  或  $(X, f)$  的敏感依赖系数.  $f$  是遍历敏感的, 如果存在  $\delta > 0$ , 对于  $X$  中的任意非空开集  $V$ , 集合  $S_f(V, \delta)$  有正上密度.  $f$  称为完全遍历敏感的, 如果对任意的  $n > 0, f^n$  是遍历敏感的<sup>[7]</sup>.

$f$  是 Takens-Ruelle 混沌的, 如果  $f$  是拓扑传递的和初值敏感的. 设  $(X, f)$  和  $(Y, g)$  都是紧致系统, 如果存在同胚映射  $h: X \rightarrow Y$  使得  $hf = gh$ , 则称  $f$  和  $g$  拓扑共轭, 记作  $f \sim g$ .

**定义 1**  $(X, f)$  称为真弱几乎周期点极小的, 是指  $f$  具有真的弱几乎周期点, 如果  $Y$  是  $f$  的非空不变闭子集,  $f|_Y$  具有真的弱几乎周期点, 则  $Y = X$ . 显然, 每一个真弱几乎周期点极小系统都不是极小的.

**注 1** 熵极小系统和混沌极小系统均可以不是真弱几乎周期点极小系统.

## 2 主要结论和证明

**引理 1** 设  $(X, f)$  是一个紧致系统,  $X$  中没有孤立点,  $\Lambda \subset X$  是对  $f$  不变的闭子集, 则有

1)  $W(f) \cap \Lambda = W(f|_\Lambda)$ ;

2)  $A(f) \cap \Lambda = A(f|_\Lambda)$ .

**证明** 对于任意的  $x \in W(f) \cap \Lambda$ , 由弱几乎周期点定义知: 对任意的  $\epsilon > 0$ , 存在  $N_\epsilon > 0$  使得基数

$$\#(\{r \mid f^r(x) \in V(x, \epsilon), 0 < r < nN_\epsilon\}) \geq n, \quad \forall n > 0.$$

由于  $x \in \Lambda$ , 且  $\Lambda$  关于  $f$  不变, 所以对于任意的  $n \in \mathbf{Z}_+$ , 有  $f^n(x) \in \Lambda$ . 如果  $f^r(x) \in V(x, \epsilon)$ , 显然有  $f^r(x) \in V(x, \epsilon) \cap \Lambda$ , 从而有

$$\#(\{r \mid f^r(x) \in V(x, \epsilon) \cap \Lambda, 0 < r < nN_\epsilon\}) \geq n, \quad \forall n > 0.$$

由弱几乎周期点的定义知:  $x \in W(f|_\Lambda)$ , 故  $W(f) \cap \Lambda \subset W(f|_\Lambda)$ .

对于任意的  $x \in W(f|_\Lambda)$ , 显然  $x \in \Lambda$ , 又由弱几乎周期点定义知: 对任意  $\epsilon > 0$ , 存在  $N_\epsilon > 0$ , 有

$$\#(\{r \mid (f|_\Lambda)^r(x) \in V(x, \epsilon), 0 < r < nN_\epsilon\}) \geq n, \quad \forall n > 0.$$

$$\#(\{r \mid f^r(x) \in V(x, \epsilon) \cap \Lambda \subset V(x, \epsilon), 0 < r < nN_\epsilon\}) \geq n, \quad \forall n > 0.$$

$x \in W(f)$ , 则  $x \in W(f) \cap \Lambda$ , 故  $W(f|_\Lambda) \subset W(f) \cap \Lambda$ . 综上所述:  $W(f) \cap \Lambda = W(f|_\Lambda)$ .

对于任意的  $x \in A(f) \cap \Lambda$ , 由几乎周期点定义知: 对任意  $\epsilon > 0$ , 存在整数  $N > 0$ , 对任意整数  $q > 0$ , 存在整数  $r, q < r \leq q + N$ , 有  $f^r(x) \in V(x, \epsilon)$ . 又  $\Lambda \subset X$  是对  $f$  不变的闭子集, 且  $x \in \Lambda$ , 有  $f^r(x) \in \Lambda$ , 则  $f^r(x) \in V(x, \epsilon) \cap \Lambda$ , 即  $(f|_\Lambda)^r(x) \in V(x, \epsilon)$ , 则  $x \in A(f|_\Lambda)$ .

故  $A(f) \cap \Lambda \subset A(f|_\Lambda)$ .

对于任意的  $x \in A(f|_\Lambda)$ , 显然  $x \in \Lambda$ , 且必存在一个非空的不变子集  $M \subset \Lambda$ , 使得  $f|_M$  对于  $\Lambda$  是极小的, 显然  $f|_M$  对于  $X$  是极小的, 并且有  $x \in A(f)$ , 则  $x \in A(f) \cap \Lambda$ . 故  $A(f) \cap \Lambda \supset A(f|_\Lambda)$ . 综上所述:

$$A(f) \cap \Lambda = A(f|_{\Lambda}).$$

**定理 1** 设  $(X, f)$  是一个真弱几乎周期点极小系统, 则  $f$  是拓扑传递的.

**证明** 由于  $f$  具有真的弱几乎周期点, 则存在  $x \in X$  使得  $x \in W(f) - A(f)$ . 由轨道定义知:  $(\overline{\text{orb}(x)}, f|_{\overline{\text{orb}(x)}})$  是  $(X, f)$  的一个子系统, 且  $x \in W(f)$ ,  $x \in \overline{\text{orb}(x)}$ . 由引理 1 中 1) 知:  $x \in W(f|_{\overline{\text{orb}(x)}})$ , 由引理 1 中 2) 知:  $A(f|_{\overline{\text{orb}(x)}}) \subseteq A(f)$ . 从而  $x \in W(f|_{\overline{\text{orb}(x)}}) - A(f|_{\overline{\text{orb}(x)}})$ , 即  $x$  也是子系统  $f|_{\overline{\text{orb}(x)}}$  的一个真的弱几乎周期点.

由于  $(X, f)$  是真弱几乎周期点极小系统, 根据定义知:  $\overline{\text{orb}(x)} = X$ . 由于  $X$  中无孤立点, 所以  $f$  是拓扑传递的.

**注 2** 若  $f$  是拓扑传递的, 则  $(X, f)$  不一定是真弱几乎周期点极小系统.

**定理 2** 设  $(X, f)$  是一个真弱几乎周期点极小系统, 则  $f$  具有满测度中心, 即  $M(f) = X$ .

**证明** 由定理条件知:  $W(f) - A(f) \neq \emptyset$ , 又  $(M(f), f|_{M(f)})$  是  $(X, f)$  的一个子系统. 设  $x \in W(f) - A(f)$ , 即  $x \in W(f)$  但  $x \notin A(f)$ . 由于  $\overline{W(f)} = M(f)$ , 则  $x \in M(f)$ . 由引理 1 中 (1) 知:  $x \in W(f|_{M(f)})$ , 又由引理 1 中 (2) 知:  $x \notin A(f|_{M(f)})$ . 则  $x \in W(f|_{M(f)}) - A(f|_{M(f)})$ , 即  $x$  是子系统  $(M(f), f|_{M(f)})$  的一个真的弱几乎周期点. 又  $(X, f)$  是真弱几乎周期点极小系统, 根据定义知:  $M(f) = X$ .

**引理 2**<sup>[8]</sup> 设  $(X, f)$  是紧致系统, 若  $f$  是拓扑传递的, 且  $M(f) = X$ , 则  $(X, f)$  是一个  $E$ -系统, 且  $f$  是强遍历的.

**定理 3** 设  $(X, f)$  是一个真弱几乎周期点极小系统, 则  $f$  是强遍历的.

**证明** 由定理 1, 2 知:  $f$  是拓扑传递的, 且  $M(f) = X$ . 则由引理 2 知:  $f$  是强遍历的.

**引理 3**<sup>[6]</sup> 非极小的  $E$ -系统是初值敏感的.

**引理 4** 设  $(X, f)$  是一个真弱几乎周期点极小系统, 则  $f$  是初值敏感的.

**证明** 由定义 1 知:  $f$  不是极小的. 定理 1, 2 知:  $f$  是拓扑传递的, 且  $M(f) = X$ , 则由引理 2 知:  $(X, f)$  是一个  $E$ -系统. 由引理 3 知:  $f$  是初值敏感的.

**定理 4** 设  $(X, f)$  是一个真弱几乎周期点极小系统, 则  $f$  是 Takens-Ruelle 混沌的.

**证明** 由定理 1 知:  $f$  是拓扑传递的, 由引理 4 知:  $f$  是初值敏感的. 根据 Takens-Ruelle 混沌的定义可得,  $f$  是 Takens-Ruelle 混沌的.

**引理 5**<sup>[7]</sup> 设  $(X, f)$  是一个紧致系统, 若  $f$  是初值敏感的, 且  $f \times f$  的弱几乎周期点在  $X \times X$  中稠密, 则对于任意  $n > 0$ ,  $f^n$  是遍历敏感的, 即  $f$  是完全遍历敏感的.

**引理 6** 设  $(X, f), (Y, g)$  是 2 个紧致系统, 则  $M(f) \times M(g) = M(f \times g)$ . 特别地,  $M(f) \times M(f) = M(f \times f)$ .

**证明** 设  $(x, y) \in M(f) \times M(g)$ , 对于  $(x, y)$  任意邻域  $U$ , 存在  $x$  的一个邻域  $U_1 \subseteq X$  和  $y$  的一个邻域  $U_2 \subseteq Y$ , 使得  $U_1 \times U_2 \subseteq U$ . 由于  $x \in M(f), y \in M(g)$ , 则  $x, y$  分别是  $f$  和  $g$  的支撑点, 于是存在  $\mu_1 \in M(X), \mu_2 \in M(Y)$ , 使得  $\mu_1(U_1) > 0, \mu_2(U_2) > 0$ .

令  $m(U_1 \times U_2) = \mu_1(U_1) \times \mu_2(U_2)$ , 则  $m$  可以延拓到  $M(X)$  上而成为一个不变测度, 记延拓后的测度为  $m$ , 则  $m \in M(X \times Y)$ , 且  $m(U) \geq m(U_1 \times U_2) > 0$ , 所以  $(x, y)$  是  $f \times g$  的一个支撑点, 于是  $(x, y) \in M(f \times g)$ .

反之, 由于  $\overline{W(f)} = M(f), \overline{W(g)} = M(g)$ , 且  $\overline{W(f \times g)} = M(f \times g)$ , 只需证明  $M(f \times g) \subseteq W(f) \times W(g)$ . 设  $(x, y) \in M(f \times g)$ , 对任意的  $\epsilon_1 > 0$  和  $\epsilon_2 > 0$ , 取  $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ , 则  $V((x, y), \epsilon)$  是  $(x, y)$  的一个邻域, 且

$$V((x, y), \epsilon) \subseteq V(x, \epsilon_1) \times V(y, \epsilon_2).$$

令  $V_1 = V(x, \epsilon_1), V_2 = V(y, \epsilon_2)$ , 由于  $(x, y) \in M(f \times g)$ , 根据弱几乎周期点的定义知: 存在  $N > 0$ , 使得对于任意  $n \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} n &\leq \#(i \mid (f \times g)^i(x, y) \in V((x, y), \epsilon), 0 \leq i < nN) \leq \\ &\quad \#(i \mid (f \times g)^i(x, y) \in V_1 \times V_2, 0 \leq i < nN) = \\ &\quad \#(i \mid (f)^i(x) \in V_1, (g)^i(y) \in V_2, 0 \leq i < nN) \end{aligned}$$

则  $\#(i \mid (f)^i(x) \in V_1, 0 \leq i < nN) \geq n$ , 且  $\#(i \mid (g)^i(y) \in V_2, 0 \leq i < nN) \geq n$ .

故  $x \in M(f), y \in W(g)$ . 则证明得  $W(f \times g) \subseteq W(f) \times W(g)$ . 从而

$$M(f \times g) = \overline{W(f \times g)} \subseteq \overline{W(f) \times W(g)} = \overline{W(f)} \times \overline{W(g)} = M(f) \times M(g).$$

**定理 5** 设  $(X, f)$  是一个真弱几乎周期点极小系统, 则  $f$  是完全遍历敏感.

**证明** 由引理 4 知:  $f$  是初值敏感的. 由定理 2 知:  $f$  具有满测度中心,  $W(f) = X$ . 根据引理 6 知:  $\overline{W(f \times f)} = M(f \times f)$ , 即  $f \times f$  的弱几乎周期点在  $X \times X$  中稠密. 由引理 5 可得:  $f$  是完全遍历敏感的.

**引理 7**<sup>[2]</sup> 假设  $(X, f), (Y, g)$  是两个紧致系统,  $f \sim g$ , 且  $h: X \rightarrow Y$  是从  $f$  到  $g$  的拓扑共轭, 那么  $h(W(f)) = W(g)$ .

**定理 6** 设  $f \sim g$ , 且  $h: X \rightarrow Y$  是从  $f$  到  $g$  的拓扑共轭, 若  $(X, f)$  是真弱几乎周期点极小系统, 则  $(Y, g)$  也是真弱几乎周期点极小系统.

**证明** 假设  $(Y, g)$  不是真弱几乎周期点极小系统, 即存在  $(Y, g)$  的真子系统  $(U, g|_U)$  中含有真弱几乎周期点, 即  $W(g|_U) - A(g|_U) \neq \emptyset$ , 显然  $(h^{-1}(U), f|_{h^{-1}(U)})$  是  $(X, f)$  的真子系统, 且  $f|_{h^{-1}(U)}$  与  $g|_U$  共轭. 由引理 7 知:  $h(W(f|_{h^{-1}(U)}) - A(f|_{h^{-1}(U)})) \neq \emptyset$ , 则  $W(f|_{h^{-1}(U)}) - A(f|_{h^{-1}(U)}) \neq \emptyset$ , 则  $(X, f)$  的真子系统  $(h^{-1}(U), f|_{h^{-1}(U)})$  含弱几乎周期点, 与已知矛盾, 假设不成立.

故  $(Y, g)$  是真弱几乎周期点极小系统.

**注 3** 此定理说明两个紧致系统拓扑共轭, 若其中一个为真弱几乎周期点极小系统, 另一个系统也为真弱几乎周期点极小系统. 若  $h$  只是从  $X$  到  $Y$  的拓扑半共轭, 上述结论可能不成立.

参考文献:

[1] 周作领. 弱几乎周期点和测度中心[J]. 中国科学: A 辑, 1992, 22(6): 572-581.  
[2] 周作领, 何伟弘. 轨道结构的层次与拓扑半共轭[J]. 中国科学: A 辑, 1995, 25(5): 457-464.  
[3] COVEN E, SMITAL J. Entropy-minimality[J]. Acta Math Univ Comenianae, 1993, 62(1): 117-121.  
[4] 王肖义, 黄煜. 不含混沌真子系统的 Li-Yorke 混沌[J]. 数学学报, 2012, 55(4): 749-756.  
[5] 周作领, 尹建东, 许绍元. 拓扑动力系统: 从拓扑方法到遍历理论方法[M]. 北京: 科学出版社, 2011: 117-120.  
[6] 叶向东, 黄文, 邵松. 拓扑动力系统概论[M]. 北京: 科学出版社, 2008: 29-60.  
[7] LI Ri-song. A note on stronger forms of sensitivity for dynamical systems[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2012, 45: 753-758.  
[8] YIN Jian-dong, ZHOU Zuo-ling. A characterization of topologically transitive attributes for a class of dynamical system[J]. Chinese Annals of Mathematics, 2012, 33(3): 419-428.

Dynamical Propertise for a Class of  
Minimal Dynamical Systems

YAN Qi, YIN Jian-dong

(School of Science, Nanchang University, Nanchang 330031, China)

**Abstract:** A new concept of proper weakly almost periodic point minimal system is introduced, that is, a system contains proper weakly almost periodic points containing no proper subsystem with these properties. We prove that such a system is topologically transitive and has a full measure center. It can be proved further that such a system is Taken-Ruelle chaos, strongly ergodic and totally ergodically sensitive.

**Keywords:** weakly almost periodic point; minimal system; strongly ergodic; ergodically sensitive

(责任编辑: 陈志贤      英文审校: 黄心中)