

响应率法求解二阶部分极点配置问题

陈梅香

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 给出一种求解多输入二阶控制系统的最小范数部分极点配置问题的新算法. 该算法将部分极点配置问题转化为数值优化问题, 使得在只有系统响应率的前提下, 实现极点配置, 同时保证得到的反馈矩阵的范数最小. 数值实验的结果表明: 该算法是可行性的.

关键词: 极点配置; 最小范数; 响应率; 二阶控制系统

中图分类号: O 241.6

文献标志码: A

1 预备知识

二阶控制系统为

$$\dot{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \dot{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}(t). \quad (1)$$

式(1)中: 正定矩阵 $\mathbf{M} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为质量矩阵; 半正定矩阵 $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为阻尼矩阵; 半正定 $\mathbf{K} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为刚度矩阵; $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 为输入矩阵; 关于时间 t 的 n 维向量 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{u}(t)$ 分别为状态向量和控制向量. 取

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{G}^T \mathbf{x}(t). \quad (2)$$

式(2)中: $\mathbf{F} \in \mathbf{R}^{n \times m}$, $\mathbf{G} \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 称为反馈矩阵; \mathbf{F}^T 表示矩阵 \mathbf{F} 的转置. 若有

$$(\lambda_k^2 \mathbf{M} + \lambda_k \mathbf{C} + \mathbf{K}) \mathbf{v}_k = \mathbf{0}, \quad k = 1, 2, \dots, 2n, \quad (3)$$

则称 $(\lambda_k, \mathbf{v}_k)$ 为开环系统 $P(\lambda) = \lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{C} + \mathbf{K}$ 的特征对. 式(3)中: λ_k 称为特征值; \mathbf{v}_k 称为特征向量. 若有

$$(\mu_k^2 \mathbf{M} + \mu_k (\mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{F}^T) + (\mathbf{K} - \mathbf{B}\mathbf{G}^T)) \mathbf{w}_k = \mathbf{0}, \quad k = 1, 2, \dots, 2n, \quad (4)$$

则称 (μ_k, \mathbf{w}_k) 为闭环系统 $P_c(\lambda) = \lambda^2 \mathbf{M} + \lambda (\mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{F}^T) + (\mathbf{K} - \mathbf{B}\mathbf{G}^T)$ 的特征对.

部分极点配置问题就是给定 p 个数 μ_1, \dots, μ_p , 求得反馈矩阵 $\mathbf{F} \in \mathbf{R}^{n \times m}$, $\mathbf{G} \in \mathbf{R}^{n \times m}$, 使得 μ_1, \dots, μ_p 将开环系统的 p 个特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ 替换, 成为 $P_c(\lambda)$ 的特征值. 而 $P_c(\lambda)$ 剩余的 $2n - p$ 对特征对满足

$$\mu_k = \lambda_k, \quad \mathbf{w}_k = \mathbf{v}_k, \quad k = p + 1, p + 2, \dots, 2n. \quad (5)$$

式(5)中: $(\lambda_k, \mathbf{v}_k)$ 为开环系统 $P(\lambda)$ 的特征对, 即开环系统剩余的 $2n - p$ 对特征对仍为闭环系统的特征对, 也把它称为保持无溢出性.

当 $m > 1$, 系统为多输入系统时, 反馈矩阵 \mathbf{F} 和 \mathbf{G} 的解不唯一^[1-8]. 因此, 可以选取使反馈矩阵的范数 $J = \frac{1}{2} \|\mathbf{F}\|^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{G}\|^2$ 为最小的解. 其中: $\|\cdot\|$ 指矩阵的 Frobenius 范数, 将它称为最小范数的部分极点配置问题. 这种情况下得到的闭环系统可以尽量的减少能量的消耗及噪声的影响.

目前, 已有不少求解最小范数的部分极点配置问题的数值方法^[1-2], 都需要用到系统的矩阵 $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$. 但是在实际应用中, 可能已从实验中测量得到系统的响应率, 即

$$H(s) = (s^2 \mathbf{M} + s \mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1}. \quad (6)$$

而系统的矩阵 $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$ 是未知的. Ram 等^[8]提出只需利用响应率求解部分极点配置问题, 但其求出的 \mathbf{F} 和 \mathbf{G} 的解不唯一. 因此, 本文提出一种只需利用响应率求解最小范数的部分极点配置问题的数值方法.

收稿日期: 2014-10-20

通信作者: 陈梅香(1984-), 女, 讲师, 博士, 主要从事计算数学的研究. E-mail: mxchen@hqu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11271308); 华侨大学高层次人才科研启动项目(12BS225); 华侨大学青年教师科研提升计划资助项目(ZQN-PY201)

2 定理及其证明

假设 $\{\mu_1, \cdots, \mu_p\} \cap \{\lambda_1, \cdots, \lambda_{2n}\} = \emptyset, \{\lambda_1, \cdots, \lambda_p\} \cap \{\lambda_{p+1}, \cdots, \lambda_{2n}\} = \emptyset$. 控制矩阵 \boldsymbol{B} 是列满秩的, 而且 $(P(\lambda), \boldsymbol{B})$ 对于 $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ 是部分可控的, 即

$$\text{rank}(P(\lambda_i), \boldsymbol{B}) = n, \quad i = 1, \cdots, p. \tag{7}$$

对于所讨论的部分极点配置问题, 先给出定理 1.

定理 1 设 $(\lambda_k, \boldsymbol{v}_k)$ 为开环系统 $P(\lambda)$ 的特征对, $(\mu_k, \boldsymbol{w}_k)$ 为闭环系统 $P_c(\lambda)$ 的特征对, 若式(5)成立, 即 $\mu_k = \lambda_k, \boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{v}_k$. 则

$$(\lambda_k \boldsymbol{v}_k^T, \boldsymbol{v}_k^T) \begin{pmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{G} \end{pmatrix} = 0. \tag{8}$$

证明 $(\mu_k, \boldsymbol{w}_k)$ 为闭环系统 $P_c(\lambda)$ 的特征对, 且 $\mu_k = \lambda_k, \boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{v}_k$, 故有

$$(\lambda_k^2 \boldsymbol{M} + \lambda_k (\boldsymbol{C} - \boldsymbol{B} \boldsymbol{F}^T) + (\boldsymbol{K} - \boldsymbol{B} \boldsymbol{G}^T)) \boldsymbol{v}_k = 0.$$

移项得

$$(\lambda_k^2 \boldsymbol{M} + \lambda_k \boldsymbol{C} + \boldsymbol{K}) \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{B} (\lambda_k \boldsymbol{F}^T + \boldsymbol{G}^T) \boldsymbol{v}_k.$$

又 $(\lambda_k, \boldsymbol{v}_k)$ 为开环系统 $P(\lambda)$ 的特征对, 即

$$(\lambda_k^2 \boldsymbol{M} + \lambda_k \boldsymbol{C} + \boldsymbol{K}) \boldsymbol{v}_k = 0.$$

因此,

$$\boldsymbol{B} (\lambda_k \boldsymbol{F}^T + \boldsymbol{G}^T) \boldsymbol{v}_k = 0.$$

因为是 \boldsymbol{B} 列满秩的, 故有

$$(\lambda_k \boldsymbol{F}^T + \boldsymbol{G}^T) \boldsymbol{v}_k = 0.$$

即

$$(\lambda_k \boldsymbol{v}_k^T, \boldsymbol{v}_k^T) \begin{pmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{G} \end{pmatrix} = 0.$$

另外, 由文献[1]有定理 2.

定理 2 给定矩阵 $\boldsymbol{B} \in \mathbf{R}^{n \times m}$, p 个自共轭的特征值 $\{\mu_k\}_{k=1}^p$, 若 \boldsymbol{F} 和 \boldsymbol{G} 满足

$$\det((\mu_j \boldsymbol{B}^T H(\mu_j), \boldsymbol{B}^T H(\mu_j)) \begin{pmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{G} \end{pmatrix} - \boldsymbol{I}_m) = 0. \tag{9}$$

那么, $\{\mu_k\}_{k=1}^p$ 为 $P_c(\lambda)$ 的 p 个特征值, 即 $\det(P_c(\mu_j)) = 0$. 式(9)中: \boldsymbol{I}_m 指 $m \times m$ 的单位矩阵.

具体证明见文献[1]的定理 1.

综合定理 1, 2, 给定 p 个数 μ_1, \cdots, μ_p , 矩阵 $\boldsymbol{B} \in \mathbf{R}^{n \times m}$, 响应率 $H(\mu_i), i = 1, \cdots, p$ 及开环系统的 $2n - p$ 对特征对 $(\lambda_j, \boldsymbol{v}_j), j = p + 1, \cdots, 2n$. 最小范数部分极点配置问题可转化为关于变量 $\boldsymbol{F} \in \mathbf{R}^{n \times m}, \boldsymbol{G} \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 的优化问题, 即

$$\left. \begin{aligned} &\min \frac{1}{2} \|\boldsymbol{F}\|^2 + \frac{1}{2} \|\boldsymbol{G}\|^2, \\ &\text{s. t.} \quad \det((\mu_j \boldsymbol{B}^T H(\mu_j), \boldsymbol{B}^T H(\mu_j)) \begin{pmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{G} \end{pmatrix} - \boldsymbol{I}_m) = 0, \quad j = 1, \cdots, p, \\ &\quad (\lambda_j \boldsymbol{v}_j^T, \boldsymbol{v}_j^T) \begin{pmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{G} \end{pmatrix} = 0, \quad j = p + 1, \cdots, 2n. \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

令 $\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{G} \end{pmatrix}$, 则式(10)可转化为

$$\left. \begin{aligned} &\min f(\boldsymbol{Y}) := \frac{1}{2} \|\boldsymbol{Y}\|^2, \\ &\text{s. t.} \quad \begin{cases} g(\boldsymbol{Y}) = 0, \\ h(\boldsymbol{Y}) = 0. \end{cases} \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

式(11)中: $g(\boldsymbol{Y}) = (g_1(\boldsymbol{Y}), \cdots, g_p(\boldsymbol{Y}))^T; h(\boldsymbol{Y}) = (h_1(\boldsymbol{Y}), \cdots, h_{2n-p}(\boldsymbol{Y}))^T$. 且

$$\left. \begin{aligned} g_i(\mathbf{Y}) &= \det((\mu_i \mathbf{B}^T H(\mu_i)), \mathbf{B}^T H(\mu_i)) \mathbf{Y} - \mathbf{I}_m), \quad i = 1, \dots, p, \\ h_j(\mathbf{Y}) &= (\lambda_j \mathbf{v}_j^T, \mathbf{v}_j^T) \mathbf{Y} = 0, \quad j = p+1, \dots, 2n. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

在优化问题(11)中,其目标函数是一个凸函数,满足约束条件的解的集合是一个凸集. 因此,优化问题(11)的 KKT 条件为求解 $\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{2n \times m}, \boldsymbol{\xi}_i \in \mathbb{C}, i=1, \dots, p, \boldsymbol{\eta}_j \in \mathbb{C}^m, j=1, \dots, 2n-p$, 使得

$$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{Y}) + \xi_1 \nabla g_1(\mathbf{Y}) + \dots + \xi_p \nabla g_p(\mathbf{Y}) + \nabla h_1(\mathbf{Y}) \eta_1 + \dots + \nabla h_{2n-p}(\mathbf{Y}) \eta_{2n-p} \\ g(\mathbf{Y}) \\ h(\mathbf{Y}) \end{cases} = 0. \quad (13)$$

记为 $F(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})=0$. 其中,

$$\left. \begin{aligned} \nabla f(\mathbf{Y}) &= \mathbf{Y}, \\ \nabla g_i(\mathbf{Y}) &= \boldsymbol{\phi}_i^T \text{adj}(\boldsymbol{\phi}_i \mathbf{Y} - \mathbf{I}_m)^T, \quad \boldsymbol{\phi}_i = (\mu_i \mathbf{B}^T H(\mu_i), \mathbf{B}^T H(\mu_i)), \quad i = 1, \dots, p, \\ \nabla h_{j-p}(\mathbf{Y}) &= (\lambda_j \mathbf{v}_j^T, \mathbf{v}_j^T)^T, \quad j = p+1, \dots, 2n, \\ \boldsymbol{\xi} &= (\xi_1, \dots, \xi_p), \quad \boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_{2n-p}). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式(14)中: $\text{adj}(\cdot)$ 表示矩阵的伴随矩阵.

由此,最小范数部分极点配置问题最终可转化为求解非线性方程 $F(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})=0$. 而对于非线性方程 $F(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})=0$, 可以用经典的 Gauss-Newton 或 trustregion-reflective 法^[9-10]来求解.

在非线性方程 $F(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})=0$ 中,需要用剩余的 $2n-p$ 个特征向量 $\{\mathbf{v}_k\}_{k=p+1}^{2n}$. 由 $(\lambda_j^2 \mathbf{M} + \lambda_j \mathbf{C} + \mathbf{K}) \mathbf{v}_j = H(\lambda_j)^{-1} \mathbf{v}_j = 0$ 可知, $2n-p$ 个特征向量可以由响应率 $H(\lambda_j)$ 求解出来,而不需要系统矩阵 $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$. 因此,提出的算法只需利用响应率就可以求解最小范数的部分极点配置问题.

3 数值实验

为了更直接地呈现所考虑的二阶系统,直接给出系统的矩阵 $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$. 但在算法的运行过程中,用的是系统相应的响应率 $H(\lambda_j)$.

例 1 首先考虑文献[8]中的例子. 设

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

将前 $p=2$ 个绝对值最小的自共轭特征值用 $(-1 \pm i)$ 替换,其余的特征值保持不变,由提出的算法可得最小范数解为

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1.1 & 2.2 \\ -1.1 & -2.2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2.1 & 4.2 \\ -2.1 & -4.2 \end{pmatrix}.$$

闭环特征值的误差为

$$\| \det(\mu_k^2 \mathbf{M} + \mu_k (\mathbf{C} - \mathbf{B} \mathbf{F}^T) + (\mathbf{K} - \mathbf{B} \mathbf{G}^T)) \| \leq 6 \times 10^{-15}.$$

反馈矩阵 \mathbf{F} 和 \mathbf{G} 的范数 $J_1 = \frac{1}{2} \| \mathbf{F} \|^2 + \frac{1}{2} \| \mathbf{G} \|^2 = 28.1001$. 而在文献[8]的例 2 中,得到的反馈矩阵的解为

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}.$$

\mathbf{F} 和 \mathbf{G} 的范数 $J_2 = \frac{1}{2} \| \mathbf{F} \|^2 + \frac{1}{2} \| \mathbf{G} \|^2 = 162.5$. 因此,提出的算法所求得的反馈矩阵的范数比文献[8]的例 2 中的小得多.

例 2 将文中的算法与 Bai-Chen-Datta^[1]的算法进行比较. 设

$$\mathbf{M} = 4\mathbf{I}_n, \quad \mathbf{C} = 4\mathbf{I}_n, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

取 $n=10$, 并将前 $p=2$ 个绝对值最小的特征值用 $\{-0.1, -0.2\}$ 替换, 而其余的特征值保持不变. 由文中的算法得出的解的范数为 $\|\mathbf{F}\|=1.687\ 2$, $\|\mathbf{G}\|=1.078\ 6$, 闭环特征值的误差为

$$\|\det(\mu_k^2 \mathbf{M} + \mu_k (\mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{F}^T) + (\mathbf{K} - \mathbf{B}\mathbf{G}^T))\| \leq 2 \times 10^{-10}.$$

而 Bai-Chen-Datta 的算法得出的解的范数为 $\|\mathbf{F}\|=1.410\ 4$, $\|\mathbf{G}\|=1.389\ 1$, 闭环特征值的误差为

$$\|\det(\mu_k^2 \mathbf{M} + \mu_k (\mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{F}^T) + (\mathbf{K} - \mathbf{B}\mathbf{G}^T))\| \leq 2.3 \times 10^{-12}.$$

文中的算法与 Bai-Chen-Datta 的算法相比, 所得解的范数差值不大, 因此与 Bai-Chen-Datta 的算法一样, 都能达到取最小范数解的要求. 但是, Bai-Chen-Datta 的算法需要用到系统矩阵 \mathbf{M} 和 \mathbf{K} , 而文中算法只需用到响应率.

参考文献:

- [1] BAI Zheng-jian, CHEN Mei-xiang, DATTA B N. Minimum norm partial quadratic eigenvalue assignment with time delay in vibrating structures using the receptance and the system matrices[J]. Journal of Sound and Vibration, 2013, 332(4): 780-794.
- [2] BAI Zheng-jian, DATTA B N, WANG Jin-wei. Rubust and minimum norm partial quadratic eigenvalue assignment in vibrating systems; A new optimization approach[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2010, 24(3): 766-783.
- [3] BAI Zheng-jian, CHEN Mei-xiang, YANG Jin-ku. A multi-step hybrid method for multi-input partial quadratic eigenvalue assignment with time delay[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2012, 43(7): 1658-1669.
- [4] CHU E K. Pole assignment for second-order systems[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2002, 16(1): 39-59.
- [5] DATTA B N, ELHAY S, RAM Y M. Orthogonality and partial pole assignment for the symmetric definite quadratic pencil[J]. Linear Algebra and Its Application, 1997, 257: 29-48.
- [6] DATTA B N, ELHAY S, RAM Y M, et al. Partial eigenstructure assignment for the quadratic pencil[J]. Journal of Sound and Vibration, 2000, 230(1): 101-110.
- [7] DATTA B N, LIN Wen-wei, WANG J N. Robust partial pole assignment for vibrating structures with aerodynamic effect[J]. IEEE Trans Automatic Control, 2006, 51(12): 1979-1984.
- [8] RAM Y M, MOTTERSHEAD J E. Multiple-input active vibration control by partial pole placement using the method of receptances[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2013, 40(2): 727-735.
- [9] Jr DENNIS J E. Nonlinear least-squares[C]// State of the Art in Numerical Analysis. London: Academic Press, 1977: 269-312.
- [10] COLEMAN T F, LI Y. An interior trust region approach for nonlinear minimization subject to bounds[J]. SIAM Journal on Optimization, 1996, 6(2): 418-445.

Partial Quadratic Pole Assignment Using the Method of Receptances

CHEN Mei-xiang

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: A new method is proposed to solve minimum norm partial pole assignment of the multi-input second order control system. We consider the minimum norm partial pole assignment problem as a numerical optimization problem. By this new method, we only need the receptances which are available by measurements. The results of numerical experiments demonstrate the effectiveness of the propose method.

Keywords: pole assignment; minimum norm; receptances; second order control system

(责任编辑: 黄晓楠

英文审校: 黄心中)