

Sawada-Kotera-Ramani 方程的 两类尖孤立波解

李向正¹, 郭向阳²

(1. 河南科技大学 数学与统计学院, 河南 洛阳 471023;

2. 洛阳理工学院 数理部, 河南 洛阳 471023)

摘要: 用 (G'/G) 展开法构造出 Sawada-Kotera-Ramani (SKR) 方程的两类尖孤波解. 这两类孤波解都有尖峰或倒尖峰, 且满足 Rankine-Hugoniot 条件和熵条件, 是方程的弱解.

关键词: Sawada-Kotera-Ramani 方程; 尖孤波解; Rankine-Hugoniot 条件; (G'/G) 展开法; 弱解

中图分类号: O 175.2

文献标志码: A

研究数学物理方程的中心内容是求各类问题的解并研究解的性质, 使研究者对其所描述的自然现象或过程能有更深入的认识. 间断性(或奇异性)在自然现象中广泛存在, 如流体动力学中的溃坝, 空气动力学中的激波, 广义相对论中的黑洞等^[1]. 非线性发展方程是近年来数学物理工作者研究的热点, 其弱解一般具有间断性(或奇异性), 对于特定的自然现象, 用弱解来描述或刻画更符合实际. 弱解的存在性可用算子分解方法证明, 也可用位势井理论和紧致性方法证明^[2-3]. 根据压缩映像原理, 用伽罗金逼近法可证明弱解的存在性和唯一性^[4]. 文献[2-4]较多地集中于弱解的存在性或唯一性的证明, 但弱解的解法或构造方法很少见文献报道.

Sawada-Kotera-Ramani (SKR) 方程^[5]

$$u_t + 15(u^3 + uu_{xx})_x + u_{5x} = 0, \quad (1)$$

可用于描述重力作用下浅水中长波的运动及一维非线性晶格中长波的运动^[6]. Yu 等^[5]用 Hirota 双线性方法研究了 SKR 方程的超对称化, 获得了它的 Bäcklund 变换, 并得到了超孤子解. 然而, 文献[5-6]均未考虑 SKR 方程的尖孤立波解及其构造方法. 基于此, 本文主要研究 SKR 方程的两类尖孤立波解.

1 SKR 方程的尖孤立波解

方程(1)可写成守恒律形式, 即

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

式(2)中: $f(u) = 15(u^3 + uu_{xx}) + u_{4x}$.

方程(1)的尖孤立波解满足的边界条件为

$$u \rightarrow 0, \quad u_x \rightarrow 0, \quad u_{xx} \rightarrow 0, \quad u_{4x} \rightarrow 0, \quad \text{当 } |x| \rightarrow \infty \text{ 时}. \quad (3)$$

记 $u^\pm = u(\sigma(t) \pm 0, t)$, $f^\pm = f(u^\pm)$, u^\pm 表示 $u(x, t)$ 在间断线两侧的左右极限.

定理 1 除间断线外, 满足守恒律方程(2)的行波解 $u(x, t) = u(|\xi|)$, $\xi = x - ct - x_0$ (c, x_0 为常数). 当 $u^+ = u^-$ 时, 在方程(2)的间断曲线 $\xi = x - \sigma(t) = 0$ (即 $\sigma(t) = ct + x_0$) 上满足 Rankine-Hugoniot

收稿日期: 2014-04-10

通信作者: 郭向阳(1971-), 男, 讲师, 主要从事负热膨胀材料的研究. E-mail: gxyson@126.com.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10871129); 河南科技大学博士启动基金资助项目(09001562)

条件,即 $\sigma'(t)=\frac{f^- - f^+}{u^- - u^+}$.

证明 利用洛比达法则及方程(2)可得

$$\frac{f^- - f^+}{u^- - u^+} = \frac{f_x^- - f_x^+}{u_x^- - u_x^+} = \frac{-u_t^- + u_t^+}{u_x^- - u_x^+} = \frac{-2cu'(0)}{-2u'(0)} = c = \sigma'(t).$$

用 (G'/G) 展开法^[7-8] 求解方程(1). 设方程(1)的行波解为

$$u(x,t) = u(\xi), \quad \xi = x - ct - x_0. \tag{4}$$

式(4)中:常数 c 表示波速; x_0 为常数. 将式(4)代入方程(1),然后关于 ξ 积分一次,根据边界条件(3),可设积分常数为 0,得

$$-cu + 15(u^3 + uu'') + u^{(4)} = 0. \tag{5}$$

此处,要求方程(1)的弱解 $u(x,t)=u(\xi)$ 满足对称性条件,即

$$u(-\xi) = u(\xi), \quad \xi \in (-\infty, +\infty). \tag{6}$$

考虑方程(5)中 u^3, uu'' 和 $u^{(4)}$ 的齐次平衡^[7-10], $3m=2m+2=m+4$,得平衡数 $m=2$. 于是,设方程(5)的解可表示为

$$u = a_0 + a_2(G'/G)^2, \quad a_2 \neq 0. \tag{7}$$

式(7)中: a_0, a_2 是待定常数, $G=G(\xi)$ 满足二阶线性常微分方程,即

$$G''(\xi) + \beta G(\xi) = 0. \tag{8}$$

式(8)中: β 为待定常数.

特别地,当 $\beta<0$ 时,

$$G'/G = \sqrt{-\beta} \tanh(\sqrt{-\beta}\xi + \xi_0), \tag{9}$$

或者

$$G'/G = \sqrt{-\beta} \coth(\sqrt{-\beta}\xi + \xi_1). \tag{10}$$

式(9),(10)中: ξ_0, ξ_1 为常数.

将式(7)代入方程(5)的左端并利用方程(8),则方程(5)的左端化为 G'/G 的多项式. 置多项式的系数为 0,得到关于 a_0, a_2, β 和 c 的代数方程组,利用 Mathematica 符号软件,解得该方程组的三组解,分别是

- i) $\beta<0, a_0 = -2\beta, a_2 = -1, c = 16\beta^2$;
- ii) $\beta<0, a_0 = \frac{-15 - \sqrt{105}}{15}\beta, a_2 = -2, c = -2(\sqrt{105} - 11)\beta^2$;
- iii) $\beta<0, a_0 = \frac{-15 + \sqrt{105}}{15}\beta, a_2 = -2, c = 2(\sqrt{105} + 11)\beta^2$.

将解 i)~iii) 及式(9)分别代入式(7),得方程(1)的精确孤立波解,即

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= -2\beta \operatorname{sech}^2(\sqrt{-\beta}\xi + \xi_0), & \xi &= x - 16\beta^2 t - x_0; \\ u_2(x,t) &= \frac{-15 - \sqrt{105}}{15}\beta + 2\beta \tanh^2(\sqrt{-\beta}\xi + \xi_0), & \xi &= x + 2(\sqrt{105} - 11)\beta^2 t - x_0; \\ u_3(x,t) &= \frac{-15 + \sqrt{105}}{15}\beta + 2\beta \tanh^2(\sqrt{-\beta}\xi + \xi_0), & \xi &= x - 2(\sqrt{105} + 11)\beta^2 t - x_0. \end{aligned}$$

将解 i)~iii) 及式(10)分别代入式(7)得方程(1)的精确孤立波解,即

$$\begin{aligned} u_4(x,t) &= -2\beta \operatorname{csch}^2(\sqrt{-\beta}\xi + \xi_1), & \xi &= x - 16\beta^2 t - x_0; \\ u_5(x,t) &= \frac{-15 - \sqrt{105}}{15}\beta + 2\beta \coth^2(\sqrt{-\beta}\xi + \xi_1), & \xi &= x + 2(\sqrt{105} - 11)\beta^2 t - x_0; \\ u_6(x,t) &= \frac{-15 + \sqrt{105}}{15}\beta + 2\beta \coth^2(\sqrt{-\beta}\xi + \xi_1), & \xi &= x - 2(\sqrt{105} + 11)\beta^2 t - x_0. \end{aligned}$$

为满足对称性条件(6),引入函数 $u_7(x,t) = -2\beta \operatorname{sech}^2(\sqrt{-\beta}|\xi| + \xi_0), \xi = x - 16\beta^2 t - x_0, \xi_0 \geq 0$. 易知,当 $\xi<0$ 时, u_7 也满足方程(1),而 $x=\sigma(t)=16\beta^2 t+x_0$ 为函数 u_7 的导数的间断曲线. 根据定理 1,解

u_7 在间断曲线 $x=\sigma(t)=16\beta^2t+x_0$ 上满足 Rankine-Hugoniot 条件, 因此 u_7 是方程(1)的弱解. 又因为 $(u_7)^+=(u_7)^-=-2\beta\text{sech}^2\xi_0$, 故熵条件显然满足, 弱解 u_7 是方程(1)的物理解^[11].

当 $\xi_0=0$ 时, 尖波 u_7 与光滑解重合; 当 $\xi_0>0$ 时, 尖波的振幅是 $-2\beta\text{sech}^2\xi_0$; 波速 $c=16\beta^2$ 与振幅有关, 且 c, x_0 与 ξ_0 都是独立参数; 尖波与光滑孤波等宽.

类似地, 可引入函数

$$\begin{aligned} u_8(x,t) &= \frac{-15-\sqrt{105}}{15}\beta + 2\beta\tanh^2(\sqrt{-\beta}|\xi|+\xi_0), \\ \xi &= x + 2(\sqrt{105}-11)\beta^2t - x_0, \quad \xi_0 \geq 0; \\ u_9(x,t) &= \frac{-15+\sqrt{105}}{15}\beta + 2\beta\tanh^2(\sqrt{-\beta}|\xi|+\xi_0), \\ \xi &= x - 2(\sqrt{105}+11)\beta^2t - x_0, \quad \xi_0 \geq 0. \end{aligned}$$

当 $\xi_0>0$ 时, 第 1 类孤立波解 $u_7\sim u_9$ 均有尖峰; 当 $\xi_0=0$ 时, 对应于经典的光滑孤波解, 经典的钟状孤立波解有光滑的波峰.

$$\begin{aligned} u_{10}(x,t) &= 2\beta\text{csch}^2(\sqrt{-\beta}|\xi|+\xi_1), \quad \xi = x - 16\beta^2t - x_0, \quad \xi_1 > 0; \\ u_{11}(x,t) &= \frac{-15-\sqrt{105}}{15}\beta + 2\beta\coth^2(\sqrt{-\beta}|\xi|+\xi_1), \\ \xi &= x + 2(\sqrt{105}-11)\beta^2t - x_0, \quad \xi_0 > 0; \\ u_{12}(x,t) &= \frac{-15+\sqrt{105}}{15}\beta + 2\beta\coth^2(\sqrt{-\beta}|\xi|+\xi_1), \\ \xi &= x + 2(\sqrt{105}+11)\beta^2t - x_0, \quad \xi_0 > 0. \end{aligned}$$

当 $\xi_1>0$ 时, 第 2 类孤立波解 $u_{10}\sim u_{12}$ 均有倒尖峰. 根据定理 1, 解 $u_{10}\sim u_{12}$ 也满足 Rankine-Hugoniot 条件, 因而是方程(1)的弱解. 由于熵条件成立, 所以解 $u_{10}\sim u_{12}$ 为方程(1)的物理解. 当 $\xi_0>0(\xi_1>0)$ 时, 解 $u_7\sim u_{12}$ 在间断曲线上有尖峰(倒尖峰). 这些解在以往文献中尚未报道. 相同相速 $c=16$ 下, 孤立解 u_7 的图形, 如图 1 所示. 图 1 中, 曲线从上到下分别为 $\xi_0=0, \xi_0=1/2, \xi_0=1, \xi_0=3/2$. 相同相速 $c=16$ 下, 孤立波解 u_{10} 的图形, 如图 2 所示. 图 2 中, 曲线从下到上分别为 $\xi_1=6/5, \xi_1=7/5, \xi_1=8/5, \xi_1=9/5$.

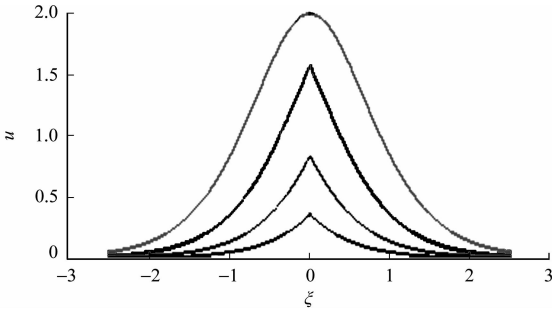


图 1 孤立波 u_7

Fig. 1 Solitary wave u_7

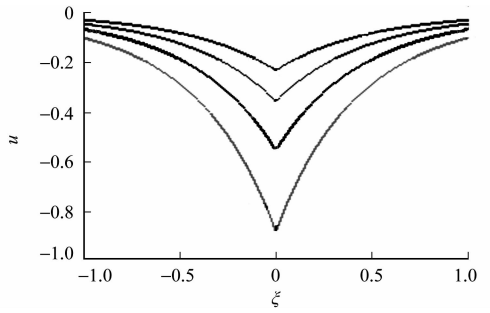


图 2 孤立波 u_{10}

Fig. 2 Solitary wave u_{10}

2 结论

SKR 方程的尖孤立波尚未见有文献报道. 首先, 给出了满足守恒律的非线性发展方程的行波解满足 Rankine-Hugoniot 条件的定理; 然后, 利用 (G'/G) 展开法求出了 SKR 方程的具有对称性的行波解, 首次构造出了 SKR 方程的两类尖孤立波解. 这两类尖孤立波解的振幅均有限, 满足 Rankine-Hugoniot 条件和熵条件, 因而为 SKR 方程的物理解.

当 $\xi_0=0$ 时, 第 1 类尖孤立波解 $u_7\sim u_9$ 对应于经典的光滑孤波解, 因此, 比经典的孤波解更具有一般性. 文中的工作拓展了 (G'/G) 展开法的应用范围^[7-8].

另外 Liao 等^[1]认为尖孤立波可能是浅水波模型的一个一般性质, 文中则从数学角度严格证明了具

有尖孤立波解的方程必须满足的条件,即满足定理 1 的条件,边界条件(3)及对称性条件(6),依据这些条件即可扩展具有尖孤立波解的方程的类型.

参考文献:

[1] LIAO Shi-jun. Two kinds of peaked solitary waves of the KdV, BBM and Boussinesq equations[J]. Science China, 2012,55(12):2469-2475.

[2] 谢永钦,马加磊,肖霞,等. 一类非线性发展方程解的长时间行为[J]. 湘潭大学学报:自然科学版,2012,34(1):1-4.

[3] 廖秋明,赵红星. 一类具耗散项的非线性四阶波动方程的整体弱解及其渐近性质[J]. 工程数学学报,2013,30(1):59-66.

[4] 夏子伦,曹文慧,杨文斌. 一类非线性双曲型方程的弱解[J]. 云南民族大学学报:自然科学版,2013,22(1):48-53.

[5] YU Ya-xuan. Suppermtric Sawada-Kotera-Ramani equation: Bilinear approach[J]. Commun Theor Phys,2008,49(3):685-688.

[6] WAZWAZ A M. Abundant solitons for several forms of the fifth-order KdV equation by using the tanh method[J]. Applied Mathematics and Computation,2006,182(1):283-300.

[7] WANG Ming-liang,LI Xiang-zheng,ZHANG Jin-liang. The (G'/G) -expansion method and traveling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics[J]. Physics Letters A,2008,372(4):417-423.

[8] 李向正,张卫国,原三领. (G'/G) 展开法的简化及 Nagumo 方程的有界行波解[J]. 河南科技大学:自然科学版,2010,31(6):18-81.

[9] WANG Ming-liang. Solitary wave solutions for variant Boussinesq equations[J]. Phys Lett A,1995,199(3):169-172.

[10] LI Xiang-zheng,WANG Ming-liang. A sub-ODE method for finding exact solutions of a generalized KdV-mKdV equation with high-order nonlinear terms[J]. Phys Lett A,2007,361(1):115-118.

[11] 胡国定. 简明数学词典[M]. 北京:科学出版社,2007:481.

Two Kinds of Peaked Solitary Wave Solutions of
Sawaka-Kotera-Ramani Equation

LI Xiang-zheng¹, GUO Xiang-yang²

(1. College of Science and Statistics, Henan University of Science and Technology, Luoyang 471023, China;
2. Department of Mathematics and Physics, Luoyang Institute of Science and Technology, Luoyang 471023, China)

Abstract: Two kinds of peaked solitary wave solutions of Sawaka-Kotera-Ramani (SKR) equation are given by means of (G'/G) -expansion method. The solutions have either a peakon or an anti-peakon, and satisfy the Rankine-Hugoniot condition and entropy condition, then they are weak solutions of the equation.

Keywords: Sawada-Kotera-Ramani equation; peaked solitary wave solution; Rankine-Hugoniot condition; (G'/G) -expansion method; weak solution

(责任编辑: 黄晓楠 英文审校: 黄心中)