

耦合的修正变系数 KdV 方程的非线性波解

温振庶

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 研究一个带变系数的耦合修正 KdV 方程的非线性波解, 利用 F -展开法获得多种非线性波解, 这些解包括孤立波解、扭波解(反扭波解)、爆破解和周期爆破解. 带变系数的耦合修正 KdV 方程具有扭波解(反扭波解), 而对于带变系数的耦合 KdV 方程, 却未得到. 这个结果与修正 KdV 方程和 KdV 方程的情形是类似的.

关键词: KdV 方程; 非线性波解; 变系数; F -展开法

中图分类号: O 175.29

文献标志码: A

1 预备知识

自从著名的 KdV 方程^[1] $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$ 被引入后, 它及其变体得到了人们的广泛关注. KdV 方程首先被推广为修正 KdV(mKdV)方程^[2-3] $u_t + au^2u_x + u_{xxx} = 0$, 进一步发展为高阶 KdV 方程^[4] $u_t + au^n u_x + u_{xxx} = 0$, 甚至成为耦合的 KdV 方程^[5].

最近, 带变系数的非线性微分方程^[6-7] 引起了人们的广泛关注. 文献[6]研究了带变系数的 KdV 方程 $u_t + \alpha(t)uu_x + \gamma(t)u_{xxx} = 0$; 文献[8]进一步把文献[6]拓展成带变系数的修正 KdV 方程 $u_t + \alpha(t)u_x - \beta(t)u^2u_x + \gamma(t)u_{xxx} = 0$; 且文献[9]通过一些新的变换进一步研究了文献[8]方程. 此外, 文献[10]引入了一个带变系数的耦合 KdV 方程, 即

$$\left. \begin{aligned} u_t + \alpha(t)uu_x + \beta(t)vv_x + \gamma(t)u_{xxx} &= 0, \\ v_t + \delta(t)uv_x + \gamma(t)v_{xxx} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式(1)中: $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ 和 $\delta(t)$ 满足一定的条件.

从把 KdV 方程拓展成 mKdV 方程的角度来看, 考虑把方程(1)拓展成带变系数的耦合修正 KdV 方程, 即

$$\left. \begin{aligned} u_t + \alpha(t)u^2u_x + \beta(t)v^2v_x + \gamma(t)u_{xxx} &= 0, \\ v_t + \delta(t)u^2v_x + \gamma(t)v_{xxx} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式(2)中: $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ 和 $\delta(t)$ 都是仅关于变量 t 的函数, 并且假定它们满足以下条件, 即

$$\beta(t) \neq 0, \quad \delta(t) \neq 0, \quad \delta(t) - \alpha(t) = \sigma^3 \beta(t), \quad \gamma(t) = \kappa \delta(t). \quad (3)$$

式(3)中: σ 和 κ 都是常数.

本文主要研究方程(2)的非线性波解.

2 方程(2)的求解

利用 F -展开法获得方程(2)的非线性波解. 对方程(2)作替换 $u = f(\xi)$, $v = g(\xi)$, $\xi = \lambda x + \mu(t)$, 得到

$$\left. \begin{aligned} \mu'(t)f' + \lambda\alpha(t)f^2f' + \lambda\beta(t)g^2g' + \lambda^3\gamma(t)f''' &= 0, \\ \mu'(t)g' + \lambda\delta(t)f^2g' + \lambda^3\gamma(t)g''' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

假定 $f(\xi)$ 和 $g(\xi)$ 可以展开成关于 $F(\xi)$ 的有限幂级数, 即

收稿日期: 2014-02-28

通信作者: 温振庶(1984-), 男, 讲师, 主要从事微分方程与动力系统的研究. E-mail: wenzhenshu@hqu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11326163); 华侨大学高层次人才科研启动项目(12BS223)

$$f(x,t)=\sum_{i=0}^ma_iF^i(\xi),\quad a_m\neq 0,\tag{5}$$

$$g(x,t)=\sum_{i=0}^nb_iF^i(\xi),\quad b_n\neq 0.\tag{6}$$

式(5),(6)中: a_1,a_2,\cdots,a_m 和 b_1,b_2,\cdots,b_n 是待确定的常数,且 $F(\xi)$ 满足一阶常微分方程,即

$$(F')^2=q_0+q_2F^2+q_4F^4.\tag{7}$$

由式(7)可得到

$$\left. \begin{aligned} F'F'' &= q_2FF'+2q_4F^3F', \\ F'' &= q_2F+2q_4F^3, \\ F''' &= q_2F'+6q_4F^2F'. \end{aligned} \right\}\tag{8}$$

将式(5),(6)代入式(4)中,并考虑到关系式(8),根据 f^2f',g^2g' 与 f''' (或者 f^2g 与 g''') 之间的齐次平衡,得到 $m=n=1$,也就是说,式(5),(6)可以分别表示为

$$f(x,t)=a_0+a_1F(\xi),\quad a_1\neq 0,\tag{9}$$

$$g(x,t)=b_0+b_1F(\xi),\quad b_1\neq 0.\tag{10}$$

把式(9),(10)代入式(4)中,并利用关系式(7),(8),得到

$$(a_1\mu'(t)+\lambda a_0^2a_1\alpha(t)+\lambda b_0^2b_1\beta(t)+\lambda^3a_1q_2\gamma(t))F'+2\lambda(a_0a_1^2\alpha(t)+b_0b_1^2\beta(t))FF'+\lambda(a_1^3\alpha(t)+b_1^3\beta(t)+6\lambda^2a_1q_4\gamma(t))F^2F'=0,\tag{11}$$

$$(b_1\mu'(t)+\lambda a_0^2b_1\delta(t)+\lambda^3b_1q_2\gamma(t))F'+2\lambda a_0a_1b_1\delta(t)FF'+\lambda(a_1^2b_1\delta(t)+6\lambda^2b_1q_4\gamma(t))F^2F'=0.\tag{12}$$

从式(11)和(12)消去 F' ,并令 $F^k(k=0,1,2)$ 的系数为零,得到

$$\left. \begin{aligned} a_1\mu'(t)+\lambda a_0^2a_1\alpha(t)+\lambda b_0^2b_1\beta(t)+\lambda^3a_1q_2\gamma(t) &= 0, \\ 2\lambda(a_0a_1^2\alpha(t)+b_0b_1^2\beta(t)) &= 0, \\ \lambda(a_1^3\alpha(t)+b_1^3\beta(t)+6\lambda^2a_1q_4\gamma(t)) &= 0, \\ b_1\mu'(t)+\lambda a_0^2b_1\delta(t)+\lambda^3b_1q_2\gamma(t) &= 0, \\ 2\lambda a_0a_1b_1\delta(t) &= 0, \\ \lambda(a_1^2b_1\delta(t)+6\lambda^2b_1q_4\gamma(t)) &= 0. \end{aligned} \right\}\tag{13}$$

方程组(13)在条件(3)下的解为

$$a_0,b_0=0,\tag{14}$$

$$a_1=\pm\sqrt{-6\kappa\lambda^2q_4},\quad b_1=\sigma a_1.\tag{15}$$

此外,有

$$\mu(t)=-\lambda^3q_2\int_0^t\gamma(\tau)\mathrm{d}\tau+c.\tag{16}$$

式(16)中: c 是任意常数.

把式(14)和(15)代入式(9)和(10),得到方程(2)的一般形式的解,即

$$u(x,t)=f(\xi)=\pm\sqrt{-6\kappa\lambda^2q_4}F(\xi),\quad v(x,t)=g(\xi)=\sigma f(\xi).\tag{17}$$

式(17)中: κ 和 q_4 满足 $\kappa\cdot q_4\leqslant 0$.

注 1 对式(5),(6)尝试更一般的表达式,即令 $f(x,t)=\sum_{i=-m_1}^{m_2}a_iF^i(\xi),a_{-m_1}\neq 0,a_{m_2}\neq 0,g(x,t)=$

$\sum_{i=-n_1}^{n_2}b_iF^i(\xi),b_{-n_1}\neq 0,b_{n_2}\neq 0$, 得到了同样的表达式(9)和(10).

3 方程(2)的非线性波解

根据 F -展开法与方程(7),如果 q_0,q_2 和 q_4 分别取一些特殊的值, $F(\xi)$ 可以通过 Jacobian 椭圆函数来表示,结果如表 1 所示.从表 1 可知:其最后两列,即当 Jacobian 椭圆函数的模量(modulus) $k\rightarrow 0$ 或者

$k \rightarrow 1$ 时, $F(\xi)$ 的极限, 获得了方程(2)的多种形式的非线性波解, 这些结果放在如下的定理中.

表 1 $F(\xi)$ 及在相应的 (q_0, q_2, q_4) 下 $F(\xi)$ 的极限

Tab. 1 Solution $F(\xi)$ and the limit of $F(\xi)$ under corresponding (q_0, q_2, q_4)

q_0	q_2	q_4	F	$\lim_{k \rightarrow 0} F$	$\lim_{k \rightarrow 1} F$
1	$-(1+k^2)$	k^2	$sn\xi, cd\xi = cn\xi/dn\xi$	$\sin \xi, \cos \xi$	$\tanh \xi, 1$
$1-k^2$	$2k^2-1$	$-k^2$	$cn\xi$	$\cos \xi$	$\sec h\xi$
k^2-1	$2-k^2$	-1	$dn\xi$	1	$\sec h\xi$
k^2	$-(1+k^2)$	1	$ns\xi = (sn\xi)^{-1}, dc\xi = dn\xi/cn\xi$	$\csc \xi, \sec \xi$	$\coth \xi, 1$
$-k^2$	$2k^2-1$	$1-k^2$	$nc\xi = (cn\xi)^{-1}$	$\sec \xi$	$\cosh \xi$
-1	$2-k^2$	k^2-1	$nd\xi = (dn\xi)^{-1}$	1	$\cosh \xi$
1	$2-k^2$	$1-k^2$	$sc\xi = sn\xi/cn\xi$	$\tan \xi$	$\sinh \xi$
1	$2k^2-1$	$-k^2(1-k^2)$	$sd\xi = sn\xi/dn\xi$	$\sin \xi$	$\sinh \xi$
$1-k^2$	$2-k^2$	1	$cs\xi = cn\xi/sn\xi$	$\cot \xi$	$\csc h\xi$
$-k^2(1-k^2)$	$2k^2-1$	1	$ds\xi = dn\xi/sn\xi$	$\csc \xi$	$\csc h\xi$

定理 1 方程(2)有各种形式的非线性波解, 且解的显式表达式如下 4 种情况.

1) 孤立波解

$$u_1(x, t) = \pm \sqrt{-6\kappa\lambda^2 q_4} \sec h(\lambda x + \mu(t)), \quad v_1(x, t) = \sigma u_1(x, t).$$

(18)

式(18)中: $\mu(t)$ 在式(16)中可给出, $q_2=1, q_4=-1$.

2) 扭波解(反扭波解)

$$u_2(x, t) = \pm \sqrt{-6\kappa\lambda^2 q_4} \tanh(\lambda x + \mu(t)), \quad v_2(x, t) = \sigma u_2(x, t).$$

(19)

式(19)中: $\mu(t)$ 在式(16)中可给出, $q_2=-2, q_4=1$.

3) 爆破解

$$u_3(x, t) = \pm \sqrt{-6\kappa\lambda^2 q_4} \coth(\lambda x + \mu(t)), \quad v_3(x, t) = \sigma u_3(x, t).$$

(20)

式(20)中: $\mu(t)$ 在式(16)中可给出, $q_2=-2, q_4=1$, 以及

$$u_4(x, t) = \pm \sqrt{-6\kappa\lambda^2 q_4} \csc h(\lambda x + \mu(t)), \quad v_4(x, t) = \sigma u_4(x, t).$$

(21)

式(21)中: $\mu(t)$ 在式(16)中可给出, $q_2=2, q_4=1$.

4) 周期爆破解

$$u_5(x, t) = \pm \sqrt{-6\kappa\lambda^2 q_4} \tan(\lambda x + \mu(t)), \quad v_5(x, t) = \sigma u_5(x, t).$$

(22)

式(22)中: $\mu(t)$ 在式(16)中可给出, $q_2=2, q_4=1$.

$$u_6(x, t) = \pm \sqrt{-6\kappa\lambda^2 q_4} \cot(\lambda x + \mu(t)), \quad v_6(x, t) = \sigma u_6(x, t).$$

(23)

式(23)中: $\mu(t)$ 在式(16)中可给出, $q_2=2, q_4=1$.

$$u_7(x, t) = \pm \sqrt{-6\kappa\lambda^2 q_4} \sec(\lambda x + \mu(t)), \quad v_7(x, t) = \sigma u_7(x, t).$$

(24)

式(24)中: $q_2=-1, q_4=1$, 以及

$$u_8(x, t) = \pm \sqrt{-6\kappa\lambda^2 q_4} \csc(\lambda x + \mu(t)), \quad v_8(x, t) = \sigma u_8(x, t).$$

(25)

式(25)中: $q_2=-1, q_4=1$.

证明 由式(17)和表 1, 容易证明定理 1.

注 2 由定理 1, 方程(2)具有扭波解(反扭波解)(19), 而方程(1)却未找到这样的解^[10], 类似的结果也在 KdV 方程和 mKdV 方程中出现.

4 结束语

利用 F -展开法获得了一个带变系数的耦合的修正 KdV 方程, 即方程(2)的多种非线性波解. 这些解包括孤立波解, 扭波解(反扭波解), 爆破解和周期爆破解. 文献[3]利用微分方程定性理论与动力系统分支方法^[11-15]研究 KdV 方程和 mKdV 方程, 并发现 mKdV 方程具有扭波解(反扭波解), 而 KdV 方程却未找到. 因此, 进一步核查方程(1), (2)的解, 发现虽然它们的大部分解是相同类型的, 但同样的, 方程

(2)具有扭波解(反扭波解),而方程(1)却未找到这样的解.

参考文献:

- [1] KORTEWEG D, de VRIES D. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves[J]. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 1895, 39(240): 422-443.
- [2] SCOTT A, CHU F, MCLAUGHLIN D. The soliton: A new concept in applied science[J]. Proceedings of the IEEE, 1973, 61(10): 1443-1483.
- [3] 刘正荣, 唐昊. KdV 方程和 mKdV 方程的新奇异解[J]. 华南理工大学学报: 自然科学版, 2012, 40(10): 96-101.
- [4] MIURA R. The korteweg-devries equation: A survey of results[J]. SIAM Review, 1976, 18(3): 412-459.
- [5] LOU Shen-yue, TONG Bin, HU Heng-chun, et al. Coupled KdV equations derived from two-layer fluids[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2006, 39(3): 513-527.
- [6] WANG Ming-liang, WANG Yue-ming. A new bäcklund transformation and multi-soliton solutions to the KdV equation with general variable coefficients[J]. Physics Letters A, 2001, 287(3/4): 211-216.
- [7] 吴楚芬, 翁佩萱. 几类具有变系数的 KdV 型方程的孤波解[J]. 华南师范大学学报: 自然科学版, 2010(4): 15-18.
- [8] PRADHAN K, PANIGRAHI P. Parametrically controlling solitary wave dynamics in the modified Korteweg-de Vries equation[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2006, 39(20): L343-L348.
- [9] YAN Zhen-ya. The modified KdV equation with variable coefficients: Exact uni/bi-variable travelling wave-like solutions[J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 203(1): 106-112.
- [10] ZHOU Yu-bin, WANG Ming-liang, WANG Yue-ming. Periodic wave solutions to a coupled KdV equations with variable coefficients[J]. Physics Letters A, 2003, 308(1): 31-36.
- [11] WEN Zhen-shu, LIU Zheng-rong. Bifurcation of peakons and periodic cusp waves for the generalization of the camassa-holm equation[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2011, 12(3): 1698-1707.
- [12] WEN Zhen-shu, LIU Zheng-rong, SONG Ming. New exact solutions for the classical drinfel'd-sokolov-wilson equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2009, 215(6): 2349-2358.
- [13] WEN Zhen-shu. Bifurcation of traveling wave solutions for a two-component generalized θ -equation[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2012, 2012: 1-17.
- [14] WEN Zhen-shu. Extension on bifurcations of traveling wave solutions for a two-component fornberg-whitham equation[J]. Abstract and Applied Analysis, 2012, 2012: 1-15.
- [15] WEN Zhen-shu. New exact explicit nonlinear wave solutions for the Broer-Kaup equation[J]. Journal of Applied Mathematics, 2014, 2014: 1-7.

Nonlinear Wave Solutions for a Coupled Modified KdV Equation with Variable Coefficients

WEN Zhen-shu

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: In this paper, we study a coupled modified KdV equation with variable coefficients by exploiting F -expansion method and obtain multifarious explicit nonlinear wave solutions, which include solitary wave solutions, kink (or antikink) wave solutions, blow-up solutions and periodic blow-up solutions. The coupled modified KdV equation with variable coefficients possesses kink (or antikink) wave solutions, however, for the coupled KdV equation with variable coefficients, kink (or antikink) wave solutions have not been obtained. This result is similar with that of MKdV equation and KdV equation.

Keywords: KdV equation; nonlinear wave solution; variable coefficients; F -expansion method