

具有多个转向点的奇摄动二阶拟线性边值问题

许国安¹, 余赞平²

(1. 华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021;
2. 福建师范大学 数学与计算机科学学院, 福建 福州 350007)

摘要: 在缺乏弱稳定的条件下, 考虑具有两个转向点的二阶拟线性边值问题, 证明解的存在性并给出了解的一致有效估计. 研究结论可推广至含有 $m(m \geq 2)$ 个转向点情形.

关键词: 转向点; 边值问题; 奇摄动; 拟线性

中图分类号: O 175.1

文献标志码: A

转向点问题是奇摄动理论的重要内容, 在量子力学、流体力学、光的传播, 以及化学反应等物理和化学现象中广泛出现^[1-2], 许多学者对此问题做了大量工作^[3-7]. 然而, 其中大部分工作都是在假设弱稳定条件下完成的. 文献[8]在缺乏弱稳定的条件下考虑了具有单个转向点的二阶拟线性边值问题, 证明了解的存在性并给出了解的一致有效估计. 本文研究具有多个转向点的奇摄动二阶拟线性边值问题, 在缺乏弱稳定的条件下, 证明解的存在性并给出解的一致有效估计.

1 基本假设

考虑如下边值问题(BVP), 即

$$\left. \begin{aligned} \epsilon y''(t) &= f(t, y)y' + g(t, y), & a < t < b, \\ y(a, \epsilon) &= A, & y(b, \epsilon) &= B. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

对于边值问题(1), 作如下 3 点假设.

H₁) 退化问题 $\begin{cases} f(t, u)u' + g(t, u) = 0, \\ u(a) = A, \end{cases}$ $f(t, u)u' + g(t, u) = 0$, 以及 $\begin{cases} f(t, u)u' + g(t, u) = 0, \\ u(b) = B, \end{cases}$ 分别存

在解 $u = u_L(t) \in C^2[a, t_1]$, $u = u_0(t) \in C^2[t_1, t_2]$ 与 $u = u_R(t) \in C^2[t_2, b]$, $t_1, t_2 \in (a, b)$.

设退化轨道 $u(t) = \begin{cases} u_L(t), & t \in [a, t_1], \\ u_0(t), & t \in [t_1, t_2], \\ u_R(t), & t \in [t_2, b], \end{cases}$ 再预设区域 $\begin{cases} D_1 = \{(t, y) \mid a \leq t \leq t_1, |y - u_L(t)| \leq d_L(t)\}, \\ D_2 = \{(t, y) \mid t_1 \leq t \leq t_2, |y - u_0(t)| \leq d_0(t)\}, \\ D_3 = \{(t, y) \mid t_2 \leq t \leq b, |y - u_R(t)| \leq d_R(t)\}. \end{cases}$

其中, $d_L(t), d_0(t), d_R(t)$ 为正的连续函数, $\delta \leq d_L(t), d_0(t), d_R(t) \leq \max\{|u_0(t_1) - u_L(t_1)|, |u_0(t_2) - u_R(t_2)|\} + \delta$, 并且有

$$\begin{cases} d_L(t) = \begin{cases} \delta, & t \in [a, t_1 - \delta], \\ |u_0(t_1) - u_L(t_1)| + \delta, & t \in [t_1 - \delta/2, t_2], \end{cases} \\ d_0(t) = \delta, & t \in [t_1 + \delta, t_2 - \delta], \\ d_R(t) = \begin{cases} |u_0(t_2) - u_R(t_2)| + \delta, & t \in [t_2, t_2 + \delta/2], \\ \delta, & t \in [t_2 + \delta, b]. \end{cases} \end{cases}$$

这里 δ 为适当小的正数.

H₂) 设 $f(t, y), g(t, y)$ 在 $D_1 \cup D_2 \cup D_3$ 上充分光滑.

收稿日期: 2013-04-09

通信作者: 许国安(1981-), 男, 讲师, 主要从事常微分奇异摄动理论的研究. E-mail: xga99163@163.com.

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目, 华侨大学科研基金资助项目(10HZR25)

H₃) 设 $t=t_1, t=t_2$ 分别为边值问题(1)的 m_1, m_2 阶转向点. 这里转向点的定义如下:

设 $t=t_0$ 为边值问题(1)的 m 阶转向点, $f(t_0, y)=0, \frac{\partial f(t_0, y)}{\partial t}=\frac{\partial^2 f(t_0, y)}{\partial t^2}=\cdots=\frac{\partial^{m-1} f(t_0, y)}{\partial t^{m-1}}=0$

$$\frac{\partial^m f(t_0, y)}{\partial t^m} \neq 0, (t_0, y) \in D_1 \cup D_2 \cup D_3, m \in N.$$

可以对转向点的阶数作如下拓广, 即 $|f(t, y)|=O(|t-t_0|^m), t \rightarrow t_0$. 在拓广意义下研究转向点问题, 为了描述的方便, 作如下定义.

定义 1 函数 $u(t)$ 在 $[a, b]$ 中是 (I_q) 稳定的, 如果存在正常数 k , 使得 $\partial_y^j h(t, u(t)) \equiv 0, a \leq t \leq b, 0 \leq j \leq 2q$, 且在 $D_1 \cup D_2 \cup D_3$ 上 $\partial_y^{2q+1} h \geq k > 0$, 其中 $h(t, y) = f(t, y) \cdot u'(t) + g(t, y)$.

定义 2 函数 $u(t)$ 在 $[a, b]$ 中是 (II_n) 稳定的, 若 $u(a) \leq A, u(b) \leq B$ 且存在一个正数 k , 使得 $\partial_y^j h(t, u(t)) \geq 0, a \leq t \leq b, 1 \leq j \leq n-1$, 且在 $D_1 \cup D_2 \cup D_3$ 中, $\partial_y^n h(t, y) \geq k > 0$.

定义 3 函数 $u(t)$ 在 $[a, b]$ 中是 (III_n) 稳定的, 如果 $u(a) \geq A, u(b) \geq B$, 且存在一个正数 k , 使得 $\partial_y^{j_0(j_e)} h(t, u(t)) \geq 0, a \leq t \leq b, 1 \leq j_0, j_e \leq n-1$, 其中 $j_0(j_e)$ 表示一个奇(偶)整数, 并且在 $D_1 \cup D_2 \cup D_3$ 中, $\partial_y^n h(t, y) \leq -k < 0 (\geq k > 0)$, 若 n 是偶(奇)整数.

2 主要结果及证明

引理 1 如果假设 $H_1), H_2)$ 成立, 且退化轨道 $u(t)$ 在 $[a, b]$ 中是 (I_q) 或 $(II_n), (III_n)$ 稳定的, 则 $u_L(t_1) = u_0(t_1), u_R(t_2) = u_0(t_2)$.

证明 不妨设退化轨道是 (II_n) 稳定的(另两种稳定情形的证明类似).

先证明 $u_L(t_1) = u_0(t_1)$. 令 $h(t, y) = f(t, y)u'(t) + g(t, y)$, 假设 $u_L(t_1) \neq u_0(t_1)$, 不妨假设 $u_L(t_1) < u_0(t_1)$, 则

$$\begin{aligned} & f(t_1, u_L(t_1))u'_L(t_1) + g(t_1, u_L(t_1)) - f(t_1, u_0(t_1))u'_0(t_1) - g(t_1, u_0(t_1)) = \\ & h(t_1, u_L(t_1)) - [\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} \partial_y^i h(t_1, u_L(t_1))(u_0(t_1) - u_L(t_1))^i + \\ & \frac{1}{n!} \partial_y^n h(t_1, y)(u_0(t_1) - u_L(t_1))^n] + f(t_1, u_0(t_1))[u'_L(t_1) - u'_0(t_1)]. \end{aligned}$$

由于 t_1 为 m_1 阶转向点, 故 $f(t_1, u_0(t_1))=0$, 且已知 $h(t_1, u_L(t_1))=0$. 此外, 又由于 $u(t)$ 是 (II_n) 稳定的, 故 $\partial_y^i h(t_1, u_L(t_1)) \geq 0 (i=1, \cdots, n-1), \partial_y^n h(t_1, y) \geq k > 0 (y \text{ 介于 } u_L(t_1) \text{ 与 } u_0(t_1) \text{ 之间})$, 从而有

$$\begin{aligned} & f(t_1, u_L(t_1))u'_L(t_1) + g(t_1, u_L(t_1)) - f(t_1, u_0(t_1))u'_0(t_1) - g(t_1, u_0(t_1)) = \\ & - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} \partial_y^i h(t_1, u_L(t_1))(u_0(t_1) - u_L(t_1))^i + \frac{1}{n!} \partial_y^n h(t_1, y)(u_0(t_1) - u_L(t_1))^n] < 0. \end{aligned}$$

这与 $f(t_1, u_L(t_1))u'_L(t_1) + g(t_1, u_L(t_1)) - f(t_1, u_0(t_1))u'_0(t_1) - g(t_1, u_0(t_1))=0$ 矛盾. 同理可证, 当 $u_L(t_1) > u_0(t_1)$ 时, 也存在矛盾, 故假设不成立, 即 $u_L(t_1) = u_0(t_1)$. 类似可证 $u_0(t_2) = u_R(t_2)$.

由引理 1 结论可知, 在假设稳定的条件下, 退化解在转向点处一定是相连的, 即退化轨道是连续的.

定理 1 若假设 $H_1) \sim H_3)$ 成立, 且设退化轨道 $u(t)$ 是 (I_0) 稳定的, 则存在 $\epsilon_0 > 0$, 使得对于 $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ 时, 边值问题(1)存在解 $y=y(t, \epsilon)$, 满足 $|y(t, \epsilon) - u(t)| \leq v_1(t, \epsilon) + v_2(t, \epsilon) + c\epsilon^p$. 其中: $v_1(t, \epsilon) = \frac{1}{2}(\frac{\epsilon}{k})^{1/2} |u'_0(t_1) - u'_L(t_1)| \cdot \exp[-(\frac{k}{\epsilon})^{1/2} |t - t_1|]; v_2(t, \epsilon) = \frac{1}{2}(\frac{\epsilon}{k})^{1/2} \cdot |u'_R(t_2) - u'_0(t_2)| \cdot \exp[-(\frac{k}{\epsilon})^{1/2} |t - t_2|]; p = \min\{\frac{m}{2}, 1\}; m = \min\{m_1, m_2\}; c$ 为充分大的正数.

证明 定义 $\alpha(t, \epsilon) = u(t) - v_1(t, \epsilon) - v_2(t, \epsilon) - \frac{\epsilon r}{k} - \frac{c_1 \epsilon^{m/2}}{k}, \beta(t, \epsilon) = u(t) - v_1(t, \epsilon) - v_2(t, \epsilon) - \frac{\epsilon r}{k} + \frac{c_1 \epsilon^{m/2}}{k}$. 其中, c_1 为某一充分大的正数, $r \geq |u''|$.

先考虑界定函数 $\alpha(t, \epsilon)$, 注意到 v_1 是 $\epsilon v'' = kv$ 在 $[a, t_1) \cup (t_1, b]$ 中的解, v_2 是 $\epsilon v'' = kv$ 在 $[a, t_2) \cup (t_2, b]$ 中的解, 且满足

$$v'_1(t_1^-, \epsilon) = -v'_1(t_1^+, \epsilon) = \frac{1}{2} |u'_0(t_1) - u'_L(t_1)|,$$

$$v_1(t_1^-, \epsilon) = v_1(t_1^+, \epsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon}{k}\right)^{1/2} |u'_0(t_1) - u'_L(t_1)|,$$

$$v'_2(t_2^-, \epsilon) = -v'_2(t_2^+, \epsilon) = \frac{1}{2} |u'_0(t_2) - u'_R(t_2)|,$$

$$v_2(t_2^-, \epsilon) = v_2(t_2^+, \epsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon}{k}\right)^{1/2} |u'_0(t_2) - u'_R(t_2)|.$$

故 $\alpha'(t_i^-, \epsilon) \leq \alpha'(t_i^+, \epsilon), i=1, 2$, 且有

$$\begin{aligned} \epsilon \alpha'' - f(t, \alpha) \alpha' - g(t, \alpha) = \\ \epsilon u'' - \epsilon v''_1 - \epsilon v''_2 + \partial_y h(t, \xi)(u - \alpha) + f(t, \alpha)(v'_1 + v'_2) \geq \\ \epsilon r - \epsilon |u''| + c_1 \epsilon^{m/2} - |f(t, \alpha) v'_1| - |f(t, \alpha) v'_2|. \end{aligned}$$

由文献[8]的定理1证明, 可得 $|f(t, \alpha) v'_1| \leq c_1/2\epsilon^{m_1/2} \leq c_1/2\epsilon^{m/2}, |f(t, \alpha) v'_2| \leq c_1/2\epsilon^{m_1/2} \leq c_1/2\epsilon^{m/2}$. 当 $0 < \epsilon < 1$ 时, $\epsilon \alpha'' - f(t, \alpha) \alpha' - g(t, \alpha) \geq 0$.

同理可证, $\beta'(t_i^-, \epsilon) \geq \beta'(t_i^+, \epsilon), i=1, 2$, 且 $\epsilon \beta' - f(t, \beta) \beta' - g(t, \beta) \leq 0, r \geq |u''(t)|$ 时. α, β 分别是边值问题(1)的下解与上解, 故由引理1知边值问题(1)存在解 $y = y(t, \epsilon)$, 满足 $|y(t, \epsilon) - u(t)| \leq v_1(t, \epsilon) + v_2(t, \epsilon) + c\epsilon^p, m = \min\{m_1, m_2\}$; 当 $0 < m < 2$ 时, $p = m/2$, 当 $m \geq 2$ 时, $p = 1, c > c_1$ 为充分大的正数.

定理2 若设 $H_1) \sim H_3)$ 成立, 且退化轨道 $u(t)$ 是 $(I_q)(q \geq 1)$ 稳定的, 则当转向点的阶数 $m_1, m_2 > 1 + 1/q$ 时, 存在 ϵ_0 , 使得当 $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ 时, 边值问题(1)存在解 $y = y(t, \epsilon)$, 满足

$$|y(t, \epsilon) - u(t)| \leq v_3(t, \epsilon) + v_4(t, \epsilon) + \bar{c} \epsilon^{1/2q(2q+1)}.$$

式中: $v_3(t, \epsilon) = \epsilon^{1/2q} \sigma_1 (\epsilon^{1/2(q+1)} + \sigma_2 |t - t_1|)^{-1/q}; v_4(t, \epsilon) = \epsilon^{1/2q} \sigma_3 (\epsilon^{1/2(q+1)} + \sigma_4 |t - t_2|)^{-1/q}$. 其中: $\sigma_1 = \frac{1}{2} |u'_0(t_1) - u'_L(t_1)|^{1/q+1} [\frac{(2q+2)!}{2k}]^{1/2(q+1)}; \sigma_2 = q [\frac{(2q+2)!}{2k}]^{-1/2(q+1)} |u'_0(t_1) - u'_L(t_1)|^{q/q+1}; \sigma_3 = \frac{1}{2} \times |u'_0(t_2) - u'_R(t_2)|^{1/q+1} [\frac{(2q+2)!}{2k}]^{1/2(q+1)}; \sigma_4 = q [\frac{(2q+2)!}{2k}]^{-1/2(q+1)} |u'_0(t_2) - u'_R(t_2)|^{q/q+1}; \bar{c}$ 为某一充分大的正数.

证明 定义 $\alpha(t, \epsilon) = u(t) - v_3(t, \epsilon) - v_4(t, \epsilon) - \frac{\epsilon r^{1/2q+1}}{k} - \bar{c} \frac{(2q+1)!}{k} \epsilon^{1/2q(2q+1)}, \beta(t, \epsilon) = u(t) + v_3(t, \epsilon) + v_4(t, \epsilon) + \frac{\epsilon r^{1/2q+1}}{k} + \bar{c} \frac{(2q+1)!}{k} \epsilon^{1/2q(2q+1)}, \bar{c}$ 为某一充分大的正数, $r \geq |u''(t)|(2q+1)!$.

先考虑界定函数 $\alpha(t, \epsilon)$, 注意到 v_3 是 $\epsilon v'' = \frac{k}{(2q+1)!} v^{2q+1}$ 在 $[a, t_1) \cup (t_1, b]$ 中的解, v_4 是 $\epsilon v'' = \frac{k}{(2q+1)!} v^{2q+1}$ 在 $[a, t_2) \cup (t_2, b]$ 中的解, 且满足

$$v'_3(t_1^-, \epsilon) = -v'_3(t_1^+, \epsilon) = \frac{1}{2} |u'_0(t_1) - u'_L(t_1)|,$$

$$v_3(t_1^-, \epsilon) = v_3(t_1^+, \epsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon}{k}\right)^{1/2} |u'_0(t_1) - u'_L(t_1)|,$$

$$v'_4(t_2^-, \epsilon) = -v'_4(t_2^+, \epsilon) = \frac{1}{2} |u'_0(t_2) - u'_R(t_2)|,$$

$$v_4(t_2^-, \epsilon) = v_4(t_2^+, \epsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon}{k}\right)^{1/2} |u'_0(t_2) - u'_R(t_2)|.$$

故 $\alpha'(t_i^-, \epsilon) \leq \alpha'(t_i^+, \epsilon), i=1, 2$, 且有

$$\begin{aligned} \epsilon \alpha'' - f(t, \alpha) \alpha' - g(t, \alpha) = \\ \epsilon u'' - \epsilon v''_3 - \epsilon v''_4 - \frac{1}{(2q+1)!} \partial_y^{2q+1} h(t, \xi)(\alpha - u) + f(t, \alpha)(v'_3 + v'_4) \geq \\ \frac{\epsilon r}{(2q+1)!} - \epsilon |u''| + \bar{c} \epsilon^{1/2q} - |f(t, \alpha) v'_3| - |f(t, \alpha) v'_4|. \end{aligned}$$

由文献[8]的定理 2 证明, 可得 $|f(t, \alpha)v'_3| \leq \bar{c}/2\epsilon^{1/2q}$, $|f(t, \alpha)v'_3| \leq \bar{c}/2\epsilon^{1/2q}$. 当 $0 < \epsilon \ll 1$ 时, $\epsilon\alpha'' - f(t, \alpha)u'(t) - g(t, \alpha) \geq 0$.

同理可证, $\beta'(t_i^-, \epsilon) \geq \beta'(t_i^+, \epsilon)$, $i=1, 2$, 且 $\epsilon\beta' - f(t, \beta)\beta'(t) - g(t, \beta) \leq 0$, 当 $r \geq |u''|(2q+1)!$ 时.

α, β 分别是边值问题(1)的下解与上解, 由引理 1 知边值问题(1)存在解 $y=y(t, \epsilon)$, 满足 $|y(t, \epsilon) - u(t)| \leq v_3(t, \epsilon) + v_4(t, \epsilon) + \bar{c}\epsilon^{1/2q(2q+1)}$. 若退化轨道 $u(t)$ 是 (II_n) 或 (III_n) 稳定时, 也能得到如下结论.

定理 3 若假设 $H_1) \sim H_3)$ 成立, 且退化轨道 $u(t)$ 是 (II_n) 稳定的, 有 $u''_{\text{L}} \geq 0, u''_0 \geq 0, u''_{\text{R}} \geq 0$, 以及 $u'_{\text{L}}(t_1) < u'_0(t_1), u'_0(t_2) < u'_{\text{R}}(t_2)$, 则当转向点阶数 $m_1, m_2 > \frac{n+1}{2}$ 时, 存在 $\epsilon_0 > 0$, 使得对于 $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ 时, 边值问题(1)存在解 $y=y(t, \epsilon)$, 满足 $0 \leq y(t, \epsilon) - u(t) \leq v_5(t, \epsilon) + v_6(t, \epsilon) + c\epsilon^{1/2qn}$. 其中: $v_5(t, \epsilon) = \frac{1}{2}\sigma_5[1 + \frac{n-1}{2}(\frac{\epsilon(n+1)!}{2k})^{-1/2}\sigma_5^{n+1}] = \frac{\epsilon(n+1)!}{2k}|u'_0(t_1) - u'_{\text{L}}(t_1)|^2$; $v_6(t, \epsilon) = \frac{1}{2}\sigma_6[1 + \frac{n-1}{2}(\frac{\epsilon(n+1)!}{2k})^{-1/2}\sigma_6^{\frac{n-1}{2}}|t-t_2|]^{\frac{2}{1-n}}, \sigma_6^{n+1} = \frac{\epsilon(n+1)!}{2k}|u'_0(t_2) - u'_{\text{R}}(t_2)|^2$; c 为充分大的正数.

定理 4 若假设 $H_1) \sim H_3)$ 成立, 且退化轨道 $u(t)$ 是 (III_n) 稳定的, 有 $u''_{\text{L}} \leq 0, u''_0 \leq 0, u''_{\text{R}} \leq 0$, 以及 $u'_{\text{L}}(t_1) > u'_0(t_1), u'_0(t_2) > u'_{\text{R}}(t_2)$, 则当转向点阶数 $m_1, m_2 > \frac{n+1}{2}$ 时, 存在 $\epsilon_0 > 0$, 使得对于 $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ 时, 边值问题(1)存在解 $y=y(t, \epsilon)$, 满足 $-v_5(t, \epsilon) - v_6(t, \epsilon) - c\epsilon^{1/2qn} \leq y(t, \epsilon) - u(t) \leq 0$. 其中: $v_5(t, \epsilon), v_6(t, \epsilon)$ 与定理 3 一致.

以上讨论可推广至含有 $m(m > 2)$ 个转向点情形, 并可得到类似的结论.

参考文献:

- [1] NAYFEH A H. Perturbation methods[M]. New York: Wiley, 1973: 120-200.
- [2] OMALLEY R E. Introduction to singular perturbations[M]. New York: Academic Press, 1974: 1-45.
- [3] 余赞平. 一类具有高阶转向点的二次问题的奇摄动[J]. 数学研究, 2005, 38(2): 180-183.
- [4] 蔡建平, 林宗池. 具有转向点的三阶半线性奇摄动边值问题解的存在性[J]. 应用数学和力学, 1993, 14(12): 1035-1039.
- [5] 吴钦宽, 张祥. 具有转向点的奇摄动非线性边值问题解的一致有效估计[J]. 应用数学, 1995, 8(2): 231-238.
- [6] 余赞平, 肖蓬. 一类具有转向点的边值问题的奇摄动[J]. 福建师范大学学报: 自然科学版, 2004, 20(4): 6-8.
- [7] 章国华, 侯斯 F A. 非线性奇异摄动现象: 理论和应用[M]. 福州: 福建科学技术出版社, 1989: 6-15, 28-31.
- [8] 许国安, 余赞平. 具有转向点的奇摄动二阶拟线性边值问题[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2010, 31(3): 346-350.

Singular Perturbation Second Order Quasilinear Boundary Value Problem with Multi-Turning Point

XU Guo-an¹, YU Zan-ping²

(1. School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China;

2. School of Mathematics and Computer Science, Fujian Normal University, Fuzhou 350007, China)

Abstract: The singularly perturbation second order quasilinear boundary value problem with two turning points is studied. Under the weakness condition, the existence of solutions is proved, and the uniformly valid asymptotic estimation of solutions is obtained. The results could be extended to boundary value problem (BVP) with m ($m > 2$) turning points.

Keywords: turning point; boundary value problem; singular perturbation; quasilinear

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 黄心中)