

# 具有脉冲的非线性微分方程 边值问题的多个正解

吴丽娇, 王全义

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

**摘要:** 研究一类带有脉冲的一阶非线性微分方程边值问题的多个正解的存在性问题. 利用 Avery-Henderson 不动点定理以及一些分析技巧, 得到该脉冲非线性微分方程的边值问题存在多个正解的一些充分条件的新结果.

**关键词:** 边值问题; 脉冲; 多个正解; 锥; 不动点定理

**中图分类号:** O 175.14

**文献标志码:** A

脉冲微分方程是微分方程中一个新的分支, 它在物理、化学、生物医学、工业机器人技术和经济学中都有很好的应用. 脉冲微分方程边值问题的正解的存在性问题受到许多学者的广泛关注<sup>[1-10]</sup>. 例如, 文献[5]运用锥压缩与不动点定理, 研究以下一类具有脉冲的一阶微分方程边值问题

$$\left. \begin{aligned} x'(t) + a(t)x(t) &= f(t, x(t)), & a.e. t \in [0, T] \setminus \{t_1, \dots, t_p\}, \\ \Delta x(t_k) &= x(t_k^+) - x(t_k) = I_k(x(t_k)), & k = 1, 2, \dots, p, \\ x(T) &= x(0) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A})$$

正解的存在性问题. 其中:  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p < t_{p+1} = T$ ,  $f: [0, T] \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  是一个脉冲 Caratheodory 函数,  $I_k: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  是连续的.

文献[10]运用锥压缩与不动点定理, 研究具有脉冲的一阶非线性微分方程边值问题

$$\left. \begin{aligned} x'(t) + a(t, x(t))x(t) &= f(t, x(t)), & t \in [0, \omega] \setminus \{t_1, \dots, t_p\}, \\ \Delta x(t_k) &= x(t_k^+) - x(t_k) = I_k(x(t_k)), & k = 1, 2, \dots, p, \\ x(\omega) &= x(0) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

的正解存在性问题. 其中:  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p < t_{p+1} = \omega$ ;  $a: [0, \omega] \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  连续;  $I_k: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  ( $k = 1, \dots, p$ ) 是连续的;  $f: [0, \omega] \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ ;  $\omega > 0$  是常数. 所得结果推广并改进了文献[5]的相关结果. 本文利用 Avery-Henderson 不动点定理以及一些分析技巧, 得出了该脉冲非线性微分方程的边值问题存在多个正解的一些充分条件的新结果.

## 1 预备知识及引理

设条件  $H_1$ ) 存在  $[0, \omega]$  上的连续函数  $a_1(t), a_2(t)$ , 使得对  $\forall (t, x) \in [0, \omega] \times [0, +\infty)$  都有  $a_1(t) \leq a(t, x) \leq a_2(t)$ , 且对  $a_1(t)$  有  $\int_0^\omega a_1(s) ds > 0$  成立.

**定义 1** 设  $X$  是一个 Banach 空间,  $K$  是  $X$  中的一个非空子集, 且满足: 1) 对任意的  $x, y \in K$  和实数  $\alpha, \beta \geq 0$ , 有  $\alpha x + \beta y \in K$ ; 2) 若  $x, -x \in K$ , 则  $x = 0$ . 那么称  $K$  为  $X$  中的一个锥.

**定义 2** 设  $X$  是一个 Banach 空间,  $K$  是  $X$  中的一个锥. 定义  $K$  上的偏序: 如果对任意的  $x, y \in K$ ,

收稿日期: 2013-07-01

通信作者: 王全义(1955-), 男, 教授, 主要从事常微分方程和泛函微分方程的研究. E-mail: wqy19555@163.com.

基金项目: 国家自然科学基金数学天元基金资助项目(11226145)

$x \leq y$  当且仅当  $y - x \in K$ .

**定义 3** 设  $X$  是一个 Banach 空间,  $K$  是  $X$  中的一个锥. 如果映射  $\varphi: K \rightarrow [0, +\infty)$  满足对任意的  $x, y \in K, x \leq y$ , 就有  $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ , 则称映射  $\varphi$  是锥  $K$  上的一个非负连续的增泛函.

假设  $\varphi$  是锥  $K$  上的一个非负连续的增泛函,  $K \subset X, \forall d > 0$ , 记集合  $K(\varphi, d) = \{x \in K | \varphi(x) < d\}; \partial K(\varphi, d) = \{x \in K | \varphi(x) = d\}; \overline{K(\varphi, d)} = \{x \in K | \varphi(x) \leq d\}$ .

**引理 1**<sup>[11]</sup> (Avery-Henderson) 设  $K$  是  $X$  中的一个锥. 令  $\gamma, \varphi$  是  $K$  上的非负连续增泛函,  $\theta$  是  $K$  上的非负连续泛函, 其中  $\theta(0) = 0$ . 存在常数  $c > 0$  和  $M > 0$ , 对  $\forall x \in \overline{K(\gamma, c)}$ , 使得  $\gamma(x) \leq \theta(x) \leq \varphi(x), \|x\| \leq M\gamma(x)$ . 假设存在一个全连续算子  $T: \overline{K(\gamma, c)} \rightarrow K$ , 对常数  $0 < a < b < c, 0 < \lambda < 1$  及  $x \in \partial K(\theta, b)$  满足  $\theta(\lambda x) \leq \lambda \theta(x)$ , 且

- 1)  $\gamma(Tx) > c$ , 当  $x \in \partial K(\gamma, c)$  时;
- 2)  $\theta(Tx) < b$ , 当  $x \in \partial K(\theta, b)$  时;
- 3)  $\varphi(Tx) > a$  及  $K(\varphi, a) \neq \varphi$ , 当  $x \in \partial K(\varphi, a)$  时,

则算子  $T$  在  $K$  上至少存在两个不动点  $x_1, x_2 \in \overline{K(\gamma, c)}$  使得  $a < \varphi(x_1), \theta(x_1) < b, b < \theta(x_2), \gamma(x_2) < c$ .

**引理 2**<sup>[11]</sup> (Avery-Henderson) 设  $K$  是  $X$  中的一个锥. 令  $\gamma, \varphi$  是  $K$  上的非负连续增泛函,  $\theta$  是  $K$  上的非负连续泛函, 其中  $\theta(0) = 0$ . 存在常数  $c > 0$  和  $M > 0$ , 对  $\forall x \in \overline{K(\gamma, c)}$ , 使得  $\gamma(x) \leq \theta(x) \leq \varphi(x), \|x\| \leq M\gamma(x)$ . 假设存在一个全连续算子  $T: \overline{K(\gamma, c)} \rightarrow K$ , 对常数  $0 < a < b < c, 0 < \lambda < 1$  及  $x \in \partial K(\theta, b)$  满足  $\theta(\lambda x) \leq \lambda \theta(x)$ , 且

- 1)  $\gamma(Tx) < c$ , 当  $x \in \partial K(\gamma, c)$  时;
- 2)  $\theta(Tx) > b$ , 当  $x \in \partial K(\theta, b)$  时;
- 3)  $\varphi(Tx) < a$  及  $K(\varphi, a) \neq \varphi$ , 当  $x \in \partial K(\varphi, a)$  时,

则算子  $T$  在  $K$  上至少存在两个不动点  $x_1, x_2 \in \overline{K(\gamma, c)}$  使得  $a < \varphi(x_1), \theta(x_1) < b, b < \theta(x_2), \gamma(x_2) < c$ .

下面令

$$X = PC([0, \omega], R) = \left\{ x: [0, \omega] \rightarrow R \left| \begin{array}{l} x(0) = x(\omega) \text{ 且 } x(t) \text{ 对于 } t \in [0, \omega] / \{t_1, \dots, t_p\} \\ \text{是连续的, 又当 } t = t_k \text{ 是左连续的且} \\ x(t_k^+) \text{ 存在, } k = 1, \dots, p \end{array} \right. \right\}.$$

对  $\forall x \in X$ , 取范数  $\|x\| = \sup_{t \in [0, \omega]} |x(t)|$ , 则  $X$  在此范数下是一个 Banach 空间.

**定义 4** 函数  $f: [0, \omega] \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  是一个  $L^1$ -Caratheodory 函数, 如果 1) 对于  $\forall u \in R, f(\cdot, u) \in X$ ; 2) 对于  $t \in [0, \omega], f(t, \cdot)$  是连续的; 3) 对于每个  $q > 0$ , 都存在  $h_q \in L^1[0, \omega]$ , 使得对于  $t \in [0, \omega], 0 \leq u \leq q$ , 有  $|f(t, u)| \leq h_q(t)$ .

假设条件  $H_2$ ) 函数  $f: [0, \omega] \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  是一个  $L^1$ -Caratheodory 函数成立.

**引理 3**<sup>[10]</sup> 如果条件  $H_2$ ) 成立, 则对于任意的  $u \in X$  且  $u(t) \geq 0, \theta_k \in R$ , 下列脉冲微分方程的边值问题

$$\left. \begin{array}{l} x'(t) + a(t, u(t))x(t) = f(t, u(t)), \quad t \in [0, \omega] / \{t_1, \dots, t_p\}, \\ \Delta x(t_k) = \theta_k, \quad k = 1, 2, \dots, p, \\ x(\omega) = x(0), \end{array} \right\} \tag{2}$$

有一个解, 即

$$x(t) = \int_0^\omega G(t, s, u) f(s, u(s)) ds + \sum_{k=1}^p G(t, t_k, u(t)) \theta_k.$$

其中

$$G(t, s, u) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\exp(\int_0^s a(r, u(r)) dr) + \int_0^\omega a(r, u(r)) dr}{\exp(\int_0^\omega a(r, u(r)) dr) - 1}, & 0 \leq s < t \leq \omega, \\ \frac{\exp(\int_t^s a(r, u(r)) dr)}{\exp(\int_0^\omega a(r, u(r)) dr) - 1}, & 0 \leq t \leq s \leq \omega. \end{array} \right. \tag{3}$$

假设函数  $a_1(t), a_2(t)$  满足条件  $H_1$ ), 现在定义函数

$$G_1(t, s) = \begin{cases} \frac{\exp(\int_0^s a_1(r) dr + \int_t^\omega a_1(r) dr)}{\exp(\int_0^\omega a_2(r) dr) - 1}, & 0 \leq s < t \leq \omega, \\ \frac{\exp(\int_t^s a_1(r) dr)}{\exp(\int_0^\omega a_2(r) dr) - 1}, & 0 \leq t \leq s \leq \omega. \end{cases}$$

$$G_2(t, s) = \begin{cases} \frac{\exp(\int_0^s a_2(r) dr + \int_t^\omega a_2(r) dr)}{\exp(\int_0^\omega a_1(r) dr) - 1}, & 0 \leq s < t \leq \omega, \\ \frac{\exp(\int_t^s a_2(r) dr)}{\exp(\int_0^\omega a_1(r) dr) - 1}, & 0 \leq t \leq s \leq \omega. \end{cases}$$

令

$$a_1^-(t) = \min\{0, a_1(t)\}, \quad a_2^+(t) = \max\{0, a_2(t)\}, \quad K_1 = \exp(\int_0^\omega a_1(r) dr),$$

$$K_2 = \exp(\int_0^\omega a_2(r) dr), \quad M_1 = \exp(\int_0^\omega a_1^-(r) dr), \quad M_2 = \exp(\int_0^\omega a_2^+(r) dr).$$

从而由条件  $H_1$ ) 可得  $K_1 \leq K_2, M_1 \leq 1 < M_2$ . 又令  $\delta = \frac{M_1(K_1 - 1)}{M_2(K_2 - 1)}$ , 则有  $\delta \in (0, 1)$ . 于是又由定积分的性质可得

$$\begin{cases} G_1(t, s) \geq \frac{M_1}{K_2 - 1}, & (t, s) \in [0, \omega] \times [0, \omega]; \\ G_2(t, s) \leq \frac{M_2}{K_1 - 1}, & (t, s) \in [0, \omega] \times [0, \omega]. \end{cases}$$

由  $a_1(t), a_2(t), a(t, x), G_1(t, s), G_2(t, s)$  的定义即得到如下引理 4.

**引理 4** 如果条件  $H_1), H_2)$  成立, 则对任意  $x \in X, (t, s) \in [0, \omega] \times [0, \omega]$ , 有

$$\frac{M_1}{K_2 - 1} \leq G_1(t, s) \leq G(t, s, x) \leq G_2(t, s) \leq \frac{M_2}{K_1 - 1}.$$

定义  $E = \{x \in X : x(t) \geq 0\}, K = \{x \in E : x(t) \geq \delta \|x\|, x(t) \exp(\int_0^t a_2(s) ds) \text{ 关于 } t \text{ 是递增函数}\}$ . 易见  $K$  是  $X$  中的一个锥.

定义算子  $T: K \rightarrow X$  为

$$(Tx)(t) = \int_0^\omega G(t, s, x) f(s, x(s)) ds + \sum_{k=1}^p G(t, t_k, x) I_k(x(t_k)), \quad \forall x \in K. \quad (4)$$

显然有  $T: K \rightarrow X$ .

**引理 5** 如果条件  $H_1)$  成立, 则算子  $T: K \rightarrow K$ .

由于文中的锥  $K$  是文献[10]中的锥  $K$  的一个子集, 且文中的算子  $T$  与文献[10]中的算子  $T$  的表达式相同, 故由文献[10]中的引理 6 立即得到如下的引理.

**引理 6** 如果条件  $H_1), H_2)$  成立, 则算子  $T: K \rightarrow K$  是全连续的.

## 2 主要结果及证明

首先, 取正数  $l_1, l_2$  满足  $0 < l_1 < t_1 < l_2 < t_2 < \omega$ , 再取下列正数

$$A = \frac{M_1}{K_2 - 1}, \quad \eta_1 = \exp(-\int_0^{l_1} a_2(s) ds), \quad B = \frac{M_2}{K_1 - 1}, \quad \eta_2 = \exp(-\int_0^{l_2} a_2(s) ds).$$

并定义如下一些泛函, 即

$$\gamma(x) = \min_{t \in [l_1, l_2]} x(t) \exp\left(\int_0^t a_2(s) ds\right) = x(l_1) \exp\left(\int_0^{l_1} a_2(s) ds\right), \quad (5)$$

$$\theta(x) = \max_{t \in [0, l_1]} x(t) \exp\left(\int_0^t a_2(s) ds\right) = x(l_1) \exp\left(\int_0^{l_1} a_2(s) ds\right), \quad (6)$$

$$\varphi(x) = \min_{t \in [l_2, \omega]} x(t) \exp\left(\int_0^t a_2(s) ds\right) = x(l_2) \exp\left(\int_0^{l_2} a_2(s) ds\right). \quad (7)$$

其中,  $x \in K$ . 则显然如下命题成立.

**命题 1** i)  $\gamma, \theta, \varphi$  是关于  $x \in K$  的非负连续增泛函;

ii) 对于  $\forall x \in K$  有  $\gamma(x) \leq \theta(x) \leq \varphi(x)$ , 并且  $\gamma(x) = x(l_1) \exp\left(\int_0^{l_1} a_2(s) ds\right) \geq \delta \exp\left(\int_0^{l_1} a_2(s) ds\right) \|x\|$ , 及  $\|x\| \leq M\gamma(x)$ , 其中  $M = \frac{1}{\delta} \exp\left(-\int_0^{l_1} a_2(s) ds\right)$ ;

iii) 对  $\lambda \in [0, 1]$ , 有  $\theta(\lambda x) \leq \theta\lambda(x)$ .

**定理 1** 若存在正常数  $a, b, c$  满足  $0 < a < b < c, a \exp\left(\int_0^{l_2} a_2(s) ds\right) < \delta^2 b < \delta^4 c$ , 使得

$$D_1) f(t, x) > \frac{c\eta_1}{2A\omega}, \quad I(x) > \frac{c\eta_1}{2Ap}, \quad \text{其中 } t \in [0, \omega], \delta c\eta_1 \leq x \leq \frac{c}{\delta}\eta_1;$$

$$D_2) f(t, x) < \frac{b\eta_1}{2B\omega}, \quad I(x) < \frac{b\eta_1}{2Bp}, \quad \text{其中 } t \in [0, \omega], \delta b\eta_1 \leq x \leq \frac{b}{\delta}\eta_1;$$

$$D_3) f(t, x) > \frac{a\eta_2}{2A\omega}, \quad I(x) > \frac{a\eta_2}{2Ap}, \quad \text{其中 } t \in [0, \omega], \delta a\eta_2 \leq x \leq \frac{a}{\delta}\eta_2.$$

那么脉冲边值问题(1)至少存在两个正解  $x_1, x_2 \in \overline{K(\gamma, c)}$ , 使得  $x_1(l_2) > a\eta_2, x_1(l_1) < b\eta_1, x_2(l_1) > b\eta_1, x_2(l_1) < c\eta_1$ .

**证明** 考虑由式(4)定义的算子  $T: K \rightarrow X$ . 由引理 5 和引理 6 易知  $T: \overline{K(\gamma, c)} \rightarrow K$  且  $T$  是全连续的. 再考虑由式(5)~(7)定义的  $K$  上的 3 个非负连续增泛函  $\gamma(x), \theta(x), \varphi(x)$ .

下面证明算子  $T$  满足引理 1 中的所有条件.

首先, 由于  $\forall x \in \partial K(\gamma, c), t \in [0, \omega]$  有  $\gamma(x) = \exp\left(\int_0^{l_1} a_2(s) ds\right) = c$ , 此时  $x(t) \geq \delta \|x\| \geq \delta x(l_1) = \delta c \exp\left(-\int_0^{l_1} a_2(s) ds\right) = \delta c\eta_1$ .

由命题 1 的结论 ii) 可知: 当  $x \in \partial K(\gamma, c)$  时, 可以得到  $\|x\| \leq \frac{1}{\delta} \gamma(x) \exp\left(-\int_0^{l_1} a_2(s) ds\right) = \frac{c}{\delta} \eta_1$ .

因此, 当  $x \in \partial K(\gamma, c), t \in [0, \omega]$  时,  $\delta c\eta_1 \leq x(t) \leq \frac{c}{\delta} \eta_1$ .

由条件  $D_1$ ) 可知, 当  $\delta c\eta_1 \leq x \leq \frac{c}{\delta} \eta_1, t \in [0, \omega]$  时, 有  $f(t, x) > \frac{c\eta_1}{2A\omega}, I(x) > \frac{c\eta_1}{2Ap}$ , 所以此时有

$$\begin{aligned} \gamma(Tx) &= \min_{t \in [l_1, l_2]} (Tx)(t) \exp\left(\int_0^t a_2(s) ds\right) = (Tx)x(l_1) \exp\left(\int_0^{l_1} a_2(s) ds\right) \geq \\ &\exp\left(\int_0^{l_1} a_2(s) ds\right) \left[ \frac{c\eta_1}{2A\omega} \frac{M_1}{K_2 - 1} \omega + \frac{c\eta_1}{2Ap} \frac{M_1}{K_2 - 1} p \right] = \\ &\exp\left(\int_0^{l_1} a_2(s) ds\right) c\eta_1 = c. \end{aligned}$$

其中,  $x \in \partial K(\gamma, c)$ . 即引理 1 的条件 1 被满足.

其次, 由于  $\forall x \in \partial K(\theta, b), t \in [0, \omega]$ , 有  $\theta(x) = x(l_1) \exp\left(\int_0^{l_1} a_2(s) ds\right) = b$ , 此时  $x(t) \geq \delta \|x\| \geq \delta b \exp\left(-\int_0^{l_1} a_2(s) ds\right) = \delta b\eta_1$ .

由命题 1 的结论 ii) 可知, 当  $x \in \partial K(\theta, b)$  时, 可以得到  $\|x\| \leq \frac{1}{\delta} \gamma(x) \exp\left(-\int_0^{l_1} a_2(s) ds\right) \leq \frac{1}{\delta} \theta(x) \exp\left(-\int_0^{l_1} a_2(s) ds\right) = \frac{b}{\delta} \eta_1$ . 因此, 当  $x \in \partial K(\theta, b), t \in [0, \omega]$  时,  $\delta b\eta_1 \leq x(t) \leq \frac{b}{\delta} \eta_1$ .

由条件  $D_2$ ) 可知, 当  $\delta b\eta_1 \leq x \leq \frac{b}{\delta}\eta_1, t \in [0, \omega]$  时, 有  $f(t, x) < \frac{b\eta_1}{2B\omega}, I(x) < \frac{b\eta_1}{2Bp}$ , 所以

$$\begin{aligned}\theta(Tx) &= \max_{t \in [0, l_1]} (Tx)(t) \exp\left(\int_0^t a_2(s) ds\right) = (Tx)x(l_1) \exp\left(\int_0^{l_1} a_2(s) ds\right) < \\ &\exp\left(\int_0^{l_1} a_2(s) ds\right) \left[\frac{b\eta_1}{2B\omega} \frac{M_1}{K_2-1} \omega + \frac{b\eta_1}{2Bp} \frac{M_1}{K_2-1} p\right] = \\ &\exp\left(\int_0^{l_1} a_2(s) ds\right) b\eta_1 = b.\end{aligned}$$

其中,  $x \in \partial K(\theta, b)$ . 即引理 1 的条件 2 被满足.

最后, 由于  $\forall x \in \partial K(\varphi, a), t \in [0, \omega]$ , 有  $\varphi(x) = x(l_1) \exp\left(\int_0^{l_2} a_2(s) ds\right) = a$ , 此时  $x(t) \geq \delta \|x\| \geq \delta x(l_2) = \delta a \exp\left(-\int_0^{l_1} a_2(s) ds\right) = \delta a \eta_2$ .

由命题 1 的结论 ii) 可知: 当  $\forall x \in \partial K(\varphi, a)$  时, 可以得到  $\|x\| \leq \frac{1}{\delta} \varphi(x) \exp\left(-\int_0^{l_2} a_2(s) ds\right) = \frac{a}{\delta} \eta_2$ . 因此, 当  $\forall x \in \partial K(\varphi, a), t \in [0, \omega]$  时, 有  $\delta a \eta_2 \leq x(t) \leq \frac{a}{\delta} \eta_2$ .

由条件  $D_3$ ) 可知, 当  $\delta a \eta_2 \leq x \leq \frac{a}{\delta} \eta_2, t \in [0, \omega]$  时, 有  $f(t, x) > \frac{a\eta_2}{2A\omega}, I(x) > \frac{a\eta_2}{2Ap}$ , 所以此时有

$$\begin{aligned}\varphi(Tx) &= \min_{t \in [l_2, \omega]} (Tx)(t) \exp\left(\int_0^t a_2(s) ds\right) = (Tx)x(l_2) \exp\left(\int_0^{l_2} a_2(s) ds\right) \geq \\ &\exp\left(\int_0^{l_2} a_2(s) ds\right) \left[\frac{a\eta_2}{2A\omega} \frac{M_1}{K_2-1} \omega + \frac{a\eta_2}{2Ap} \frac{M_1}{K_2-1} p\right] = \\ &\exp\left(\int_0^{l_2} a_2(s) ds\right) a\eta_2 = a.\end{aligned}$$

其中,  $\forall x \in \partial K(\varphi, a)$ . 即引理 1 的条件 3 被满足.

故由引理 1 可知算子  $T: \overline{K(\gamma, c)} \rightarrow K$  至少存在两个不动点  $x_1, x_2 \in \overline{K(\gamma, c)}$  满足

$$\begin{aligned}\gamma(x_2) &= x_2(l_1) \exp\left(\int_0^{l_1} a_2(s) ds\right) < c, & a < \varphi(x_2) &= x_1(l_2) \exp\left(\int_0^{l_2} a_2(s) ds\right), \\ \theta(x_1) &= x_1(l_1) \exp\left(\int_0^{l_1} a_2(s) ds\right) < b, & b < \theta(x_2) &= x_2(l_1) \exp\left(\int_0^{l_1} a_2(s) ds\right).\end{aligned}$$

再由引理 3 可知脉冲边值问题(1)至少存在两个正解  $x_1, x_2 \in \overline{K(\gamma, c)}$ , 使得  $x_1(l_2) > a\eta_2, x_1(l_1) < b\eta_1, x_2(l_1) > b\eta_1, x_2(l_2) < c\eta_1$ . 证毕.

为了得到另一个新结果, 取正数  $l_1, l_2$  满足  $0 < l_1 < t_1 < l_2 < t_2 < \omega$ , 并定义如下一些新泛函(为简单起见, 仍然采用前面的符号). 即有

$$\begin{aligned}\gamma(x) &= \max_{t \in [0, l_1]} x(t) \exp\left(\int_0^t a_2(s) ds\right) = x(l_2) \exp\left(\int_0^{l_1} a_2(s) ds\right), \\ \theta(x) &= \min_{t \in [l_1, l_2]} x(t) \exp\left(\int_0^t a_2(s) ds\right) = x(l_1) \exp\left(\int_0^{l_1} a_2(s) ds\right), \\ \varphi(x) &= \max_{t \in [0, l_2]} x(t) \exp\left(\int_0^t a_2(s) ds\right) = x(l_2) \exp\left(\int_0^{l_2} a_2(s) ds\right).\end{aligned}$$

其中,  $x \in K$ . 则显然如下命题成立.

**命题 2** i)  $\gamma, \theta, \varphi$  是关于  $\forall x \in K$  的非负连续增泛函;

ii) 对于  $\forall x \in K$  有  $\gamma(x) \leq \theta(x) \leq \varphi(x)$ , 并且  $\gamma(x) = x(l_1) \exp\left(\int_0^{l_1} a_2(s) ds\right) \geq \delta \exp\left(\int_0^{l_1} a_2(s) ds\right) \|x\|$ , 及  $\|x\| \leq M\gamma(x)$ , 其中  $M = 1/\delta \exp\left(-\int_0^{l_1} a_2(s) ds\right)$ ;

iii) 对  $\lambda \in [0, 1]$  有  $\theta(\lambda x) \leq \lambda \theta(x)$ .

**定理 2** 若存在正常数  $a, b, c$  满足  $0 < a < b < c, a \exp\left(\int_0^{l_2} a_2(s) ds\right) < \delta^2 b < \delta^4 c$ , 使得

$$D_1) \quad f(t,x) < \frac{c\eta_1}{2A\omega}, \quad I(x) < \frac{c\eta_1}{2Ap}, \quad \text{其中 } t \in [0,\omega], \delta c\eta_1 \leq x \leq \frac{c}{\delta}\eta_1;$$
$$D_2) \quad f(t,x) > \frac{b\eta_1}{2B\omega}, \quad I(x) > \frac{b\eta_1}{2Bp}, \quad \text{其中 } t \in [0,\omega], \delta b\eta_1 \leq x \leq \frac{b}{\delta}\eta_1;$$
$$D_3) \quad f(t,x) < \frac{a\eta_2}{2A\omega}, \quad I(x) < \frac{a\eta_2}{2Ap}, \quad \text{其中 } t \in [0,\omega], \delta a\eta_2 \leq x \leq \frac{a}{\delta}\eta_2,$$

那么脉冲边值问题(1)至少存在两个正解  $x_1, x_2 \in \overline{K(\gamma, c)}$ , 使得  $x_1(l_2) > a\eta_2, x_1(l_1) < b\eta_1, x_2(l_1) > b\eta_1, x_2(l_1) < c\eta_1$  (因篇幅限制, 证略).

参考文献:

[1] NIETO J J. Basic theory for nonresonance impulsive periodic problems of first order[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1997, 205(2): 423-433.

[2] ZHAO Ai-min, BAI Zhen-guo. Existence of solutions to first-order impulsive periodic boundary value problems[J]. Nonlinear Analysis, 2009, 71(5/6): 1970-1977.

[3] NIETO J J. Periodic boundary value problems for first order impulsive ordinary differential equations[J]. Nonlinear Analysis, 2002, 51(7): 1223-1232.

[4] LIU Yang-shen. Periodic boundary value problems for first order functional differential equations with impulsive[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 223(1): 27-39.

[5] LIU Yu-ji. Positive solutions of periodic boundary value problems for nonlinear first-order impulsive differential equations[J]. Nonlinear Analysis, 2009, 70(5): 2106-2122.

[6] LI Jian-li, SHEN Jian-hua. New comparison results for impulsive functional differential equations[J]. Applied Mathematics Letters, 2010, 23(4): 487-493.

[7] NIETO J J. Impulsive resonance periodic problems of first order[J]. Applied Mathematics Letters, 2002, 15(4): 489-493.

[8] ZHANG Feng-qin, MA Zhi-en, YAN Ju-rang. Periodic boundary value problems for first order impulsive delay differential equations with a parameter[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2004, 290(1): 213-223.

[9] LI Jian-li, NIETO J J, SHEN Jian-hua. Impulsive periodic boundary value problems of first-order differential equations[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 325(1): 226-236.

[10] 吴丽娇, 王全义. 具有脉冲的一阶非线性微分方程边值问题的正解[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2012, 33(3): 342-347.

[11] AVERY R I, HENDERSON J. Two positive fixed points of nonlinear operations on ordered Banach spaces[J]. Comm Appl Nonlinear Anal, 2001, 8(1): 27-36.

Multiple Positive Solutions of Boundary Value Problems  
for Nonlinear Impulsive Differential Equations

WU Li-jiao, WANG Quan-yi

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

**Abstract:** The problem on the existence of multiple positive solutions of a class of boundary value problems for nonlinear first order impulsive differential equations is considered. By applying Avery-Henderson cone fixed point theorem and some analysis techniques, some new results of sufficient conditions which guarantee the existence of multiple positive solutions of the boundary value problems for the impulsive differential equations are established.

**Keywords:** boundary value problems; impulse; multiple positive solutions; cone; fixed point theorem