第 35 卷 第 3 期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 35 No. 3
2014 年 5 月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) May 2014

文章编号:1000-5013(2014)03-0358-03 **doi:**10.11830/ISSN.1000-5013.2014.03.0358

二阶线性系非振动的充要条件

陈敏, 王晶海

(1. 福建工程学院 数理系, 福建 福州 350118;
2. 福州大学 数学与计算机科学学院, 福建 福州 350116)

摘要: 研究周期系数二阶线性微分方程系非振动理论,给出周期系数二阶线性微分方程系非振动的充要条件,以及判别方程系非振动的充分条件.实例证明具有较好的实用性.

关键词: 周期系数; 二阶线性系; 非振动; 充要条件; 微分方程

中图分类号: O 175.1 **文献标志码:** A

1 预备知识

关于系统振动与非振动的研究很多[1-5],其中绝大部分是研究振动的,结论一般是振动的充分条件.本文给出非振动的充要条件及一个充分条件.考虑如下二阶周期系数线性系

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0. \tag{1}$$

式中:$a, b \in c'$, $a(t+\pi) = a(t)$, $b(t+\pi) = b(t)$. 对式(1)作变换, $x = y \cdot \exp(\frac{1}{2}\int_0^t a(t)\mathrm{d}t)$, 则式(1)变为

$$x'' + Q(t) \cdot x = 0. \tag{2}$$

式(2)中:$Q(t) = -\frac{1}{2}a'(t) - \frac{1}{4}a^2(t) + b(t)$, 显然 $Q(t+\pi) = Q(t)$.

定理 A 或者式(2)的所有非零解都只有有限个零点,或者式(2)的所有解都有无穷多个零点[6].

由于变换式因子 $\exp(\frac{1}{2}\int_0^t a(t)\mathrm{d}t)$ 没有零点,因此定理 A 的结论对式(1)也是对的.

定义 1 若式(1)的所有非零解都只有有限个零点,那么称式(1)是非振动的.若式(1)的所有解都有无穷多个零点,那么称式(1)是振动的.

由于式(1)的非振动行可归结为式(2)的非振动性,所以文中只讨论式(2)的非振动性.

2 结论及其证明

定理 B[6] 式(2)非振动的充分且必要条件是对一切连续可微的 π 周期函数 $W(t)$ 恒有

$$\int_0^\pi Q(t) \cdot W^2(t) \leqslant \int_0^\pi (W'(t))^2 \mathrm{d}t. \tag{3}$$

定理 B 实际上是一个判定式(2)振动的定理.若能找到一个连续可微的 π 周期函数 $W_0(t)$,使 $\int_0^\pi Q(t) \cdot W_0^2(t)\mathrm{d}t > \int_0^\pi (W'_0(t))^2 \mathrm{d}t$,则式(2)是振动的.如果要判别式(2)非振动,定理 B 实际上是很难应用的.为此,得到以下结论.

定理 1 式(2)非振动的充分且必要条件是存在一个连续可微的 π 周期函数 $\varphi(t)$,使

$$Q(t) \leqslant \varphi'(t) - \varphi^2(t).$$

证明 充分性.设 $Q(t) \leqslant \varphi'(t) - \varphi^2(t)$,于是对任意连续可微的 π 周期函数 $W(t)$ 有

收稿日期: 2014-02-14

通信作者: 陈敏(1977-),男,讲师,主要从事应用数学的研究. E-mail:fjlssh@126.com.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11201075)

$$\int_0^\pi Q(t)\cdot W^2(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^\pi(\varphi'(t)-\varphi^2(t))W^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^\pi[(\varphi W^2)'-(\varphi W+W')^2(W')^2]\mathrm{d}t.$$

由于 $\int_0^\pi(\varphi W^2)'\mathrm{d}t = \varphi(t)\cdot W^2(t)\Big|_0^\pi = \varphi(\pi)\cdot W^2(\pi)-\varphi(0)\cdot W^2(0) = 0$. 所以 $\int_0^\pi Q(t)\cdot W^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^\pi[-(\varphi W+W')^2+(W')^2]\mathrm{d}t \leqslant \int_0^\pi(W'(t))^2\mathrm{d}t$. 由定理 B 可推出式(2)非振动.

必要性．设式(2)非振动. 由文献[6]可知式(2)存在一个非零解实解 $X(t)$及一个正数 ρ,使

$$X(t+\pi) = \rho\cdot X(t). \tag{4}$$

式(4)中:ρ 实为式(2)的特征乘数．

可以肯定,对任意 $t\in\mathbf{R}$,$X(t)\neq 0$,若不然,可设 $X(t_0)=0$,那么,对任意自然数 n 有，$X(t_0+n\pi)=\rho^n\cdot X(t)=0$,这与式(2)非振动矛盾. 所以 $X(t)$没有零点.

设 $\varphi(t)=-X'(t)/X(t)$,于是有 $\varphi(t+\pi)=-X'(t+\pi)/X(t+\pi)=-\rho X'(t)/\rho X(t)$. 所以 $\varphi(t)$是 π 周期函数. 另一方面,由于 $\varphi'(t)=\dfrac{-X(t)\cdot X''(t)+(X'(t))^2}{X^2(T)}=-\dfrac{X''(t)}{X(t)}+\varphi^2(t)=Q(t)+\varphi^2(t)$. 所以 $Q(t)=\varphi'(t)-\varphi^2(t)$. 这就证明了定理 1.

注 1　若取 $\psi(t)=\varphi(t)+c$,$c>0$ 常数且使 $2\varphi(t)-c<0$,则易证 $Q(t)<\psi'(t)-\psi^2(t)$.

3　实例验证

设 $\dfrac{1}{\pi}\int_0^\pi Q(t)\mathrm{d}t$ 又记 $Q(t)-\lambda=f(t)$. 显然 $Q(t)=\lambda+f(t)$,$\int_0^\pi f(t)\mathrm{d}t=0$. 于是式(2)可改写为

$$x''+(\lambda+f(t))\cdot x=0.$$

引理 1　若式(3)非振动,且 $f(t)$不恒等于 0,则必有 $\lambda<0$.

证明　由引理 1 可知,存在连续可微 π 周期函数 $\varphi(t)$,使

$$\lambda+f(t)\leqslant\varphi'(t)-\varphi^2(t).$$

由于有 $\int_0^\pi f(t)\mathrm{d}t=0$,$\int_0^\pi\varphi'(t)\mathrm{d}t=0$, 所以 $\lambda\leqslant\dfrac{1}{\pi}\int_0^\pi\varphi^2(t)\mathrm{d}t<0$.

下证 $\lambda\neq0$. 若不然,设 $\lambda=0$,则 $\varphi(t)\equiv0$. 从而有,$f(t)\leqslant0$,由于 $\int_0^\pi f(t)\mathrm{d}t=0$,所以 $f(t)\equiv0$,这与引理的条件矛盾. 因此,$\lambda<0$. 引理 1 证毕.

设 $F(x)$是 $f(t)$的原函数,且平均值为零. 即

$$F'(t)=f(t),\qquad \int_0^\pi F(t)\mathrm{d}t=0. \tag{5}$$

定理 2　若 $\lambda+F^2(t)\leqslant0$,则式(4)非振动.

证明　$\lambda+f(t)=\lambda+F^2(t)+F'(t)-F^2(t)\leqslant F'(t)-F^2(t)$,所以,由定理 1 立得结论,$f(t)$是 π 周期函数且 $\int_0^\pi f(t)\mathrm{d}t=0$. $f(t)$的 Fourier 级数是

$$f(t)=\sum_{n=1}^\infty a_n\cos 2nt+b_n\sin 2nt.$$

例 1　考虑二阶线性系

$$x''+(-0.26+\cos 2t)\cdot x=0. \tag{6}$$

这里,$f(t)=\cos 2t$,$F(t)=\dfrac{1}{2}\sin 2nt$,$-0.26+F^2(t)<0$,所以,由定理 2 推断式(6)是非振动的.

例 2　考虑二阶线性系

$$x''+\left(-0.126-\cos 2t+\frac{1}{8}\cos 4t\right)\cdot x=0 \tag{7}$$

及其邻近系

$$x''+(-0.121-\cos 2t)\cdot x=0. \tag{8}$$

记 $Q(t)=-0.126-\cos 2t+\frac{1}{8}\cos 4t$. 取 $\varphi(t)=-\frac{1}{2}\sin 2nt$,则有

$$\varphi'(t)-\varphi^2(t)=-\cos 2t-\frac{1}{4}\sin^2 2t=-\cos 2t+\frac{1}{8}(1-\cos 4t)=-0.125-\cos 2t+\frac{1}{8}\cos 4t.$$

显然,$Q(t)<\varphi'(t)-\varphi^2(t)$. 由定理 1 推断式(7)是非振动的.

Mathieu 方程 $x''+(\lambda-\cos 2t)\cdot x=0$ 的最小特征值是 $\lambda_0\approx-0.122$[7],由文献[6]可推断式(8)是振动的. 由此可见定理 1 与定理 2 并非是粗糙结论.

例 3 考虑二阶线性系

$$y''+2\sin 2t\cdot y'+2\cos 2t\cdot y=0. \tag{9}$$

经变换 $x=y\cdot\exp(-\frac{1}{2}\cos 2t\exp(\frac{1}{2})$,则式(9)变为

$$x''+(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4t)\cdot x=0.$$

按定理 2 的记号,$f(t)=\frac{1}{2}\cos 4t$,$F(t)=\frac{1}{8}\sin 4t$,显然,$-\frac{1}{2}+F^2(t)<0$,所以式(9)是非振动的.

参考文献:

[1] PHILOS C G. Oscillation theorems for linear differential equations of second order[J]. Arch Math,1989,53(1):482-492.

[2] JAROD J. An oscillation test for a class of a linear neutral differential equations[J]. Math Anal,1991,159(1):406-417.

[3] YU Jian-she,WANG Zhi-cheng. Some further results on oscillation of neutral differential equations[J]. Bull Austral Math Soc,1992,46(1):49-157.

[4] GUORI I. On the oscillatory behavior of solutions of certain nonlinear and linear delay differential equations[J]. Nonlinear Analysis,1984,8(1):429-439.

[5] QIAN C,LADAS G. Oscillation in differential equations with positive and negative coefficients[J]. Canad Math Bull,1990,33(1):442-450.

[6] MAGNUS W,WINKLER S. Hill's equation[M]. New York:Interscience Publishers,1966:23-28.

[7] National Bureau of Standards. Table relating to mathieu function[J]. New York:Columbia University Press,1951:86-97.

[8] 史金麟. 周期系数二阶线性微分方程的稳定性[J]. 数学物理学报,2000,20(1):130-139.

[9] 张俊祖,葛键. 关于二阶线性齐次微分方程解的非振动性研究[J]. 西安联合大学学报,2001,4(2):40-43.

[10] 孔淑霞. 二阶线性微分方程解的振动性[J]. 衡水学院学报,2010,12(1):1-4.

Necessary and Sufficient Condition of Non-Oscillation for Second-Order Linear System

CHEN Min[1], WANG Jing-hai[2]

(1. Department of Mathematics and Physics, Fujian University of Technology, Fuzhou 350118, China;
2. College of Mathematics and Computer Science, Fuzhou University, Fuzhou 350116, China)

Abstract: The theories of non-oscillation for second-order linear system with periodic coefficient are investigated. One necessary and sufficient condition and a sufficient criterion condition of non-oscillation for second-order linear system with periodic coefficient are given. Examples show that the obtained result has better practicability.

Keywords: periodic coefficient; second-order linear system; non-oscillation; necessary and sufficient condition; ordinary differential equation

(责任编辑:黄仲一 英文审校:黄心中)