第 35 卷 第 3 期　　华 侨 大 学 学 报 (自 然 科 学 版)　　Vol. 35 No. 3
2014 年 5 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　May 2014

文章编号:1000-5013(2014)03-0354-04　　doi:10.11830/ISSN.1000-5013.2014.03.0354

调和 *K*-拟共形映照下 Heinz 不等式的精确估计

朱剑峰

(华侨大学 数学科学学院,福建 泉州 362021)

摘要: 设 $w=P[F](z)$ 为单位圆到自身上的调和拟共形映照,满足 $w(0)=0$,其中 $F(\exp(\mathrm{i}t))=\exp(\mathrm{i}\gamma(t))$ 为边界函数. 利用调和测度的拟不变性得到边界函数的一个偏差估计,进而利用改进的 Hübner 不等式得到调和拟共形映照下 Heinz 不等式的一个精确估计.

关键词: 调和拟共形映照;Heinz 不等式;Hübner 不等式;调和测度;测度拟不变性

中图分类号: O 174.2　　**文献标志码:** A

1 预备知识

设 u 为定义在区域 $D\subseteq\mathbf{C}$ 上的实函数,如果 u 具有二阶连续偏导数且满足 Laplace 方程:$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=0$,则称 u 为 D 上的调和函数. 设 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 为定义在区域 D 的复变函数,如果 u 和 v 皆为 D 上的调和函数则 $f(z)$ 为 D 上的调和映照. 令 $U=\{|z|<1\}$ 为单位圆盘,$f(z)$ 为定义在 U 上调和函数. 则由文献[1]知 $f(z)$ 可表示为

$$f(z)=h(z)+\overline{g(z)}.\tag{1}$$

式(1)中:$h(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$,$g(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}b_nz^n$ 为 U 上的解析函数.

设 $f(z)$ 为 U 上的单叶保向调和映照,则由 Lewy[2] 定理可知 $f(z)$ 的 Jacobian 恒正,即 $J_f=|h'|^2-|g'|^2>0$. 若进一步地存在常数 $K>1$,使得

$$K(f):=\sup_{z\in U}\frac{|h'(z)|+|g'(z)|}{|h'(z)|-|g'(z)|}\leqslant K,$$

则称 $f(z)$ 为 U 上的调和 K-拟共形映照.

调和拟共形映照是共形映照的推广,近年来国内外许多同行研究了调和映照成为拟共形映照的充要条件,以及调和拟共形映照下的极值理论、偏差估计等取得了许多有趣的结论[3-10].

1952 年,Heinz 证明了如下的定理.

定理 A (Heinz 引理[11])设 $w(z)$ 为单位圆盘 U 到自身上的单叶调和映照满足 $w(0)=0$,则有

$$|w(0)|^2+|w_{\bar z}(0)|^2\geqslant c.\tag{2}$$

式(2)中:$c>0$ 为常数.

1982 年,Hall[12] 证明了 Heinz 不等式的精确下界为 $c=\dfrac{27}{4\pi^2}$. 2005 年,Partyka 等[4] 在进一步假设 $w(z)$ 为 K-拟共形映照的条件下,得到 Heinz 不等式的一个渐进精确估计式.

定理 B 设 $w(z)$ 为单位圆盘 U 到自身上的调和 K-拟共形映照,满足 $w(0)=0$,则对于任意的 $z\in U$,有

$$|w_z(z)|^2+|w_{\bar z}(z)|^2\geqslant\frac{1}{4}(1+\frac{1}{K})^2\max\{\frac{4}{\pi^2},L_K\}.\tag{3}$$

收稿日期: 2013-07-15
通信作者: 朱剑峰(1980-),男,讲师,主要从事函数论的研究. E-mail:flandy@hqu.edu.cn.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11101165)

式(3)中：$|w_z(z)|\geqslant\dfrac{K+1}{2K}\max\{\dfrac{2}{\pi},L_K\}$；$L_k:=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\dfrac{\mathrm{d}(\Phi_{\frac{1}{K}}(s)^2)}{s\sqrt{1-s^2}}$ 为 K 的严格单调增加函数．$\Phi_L(s):=\mu^{-1}(\mu(s)/L)$ 定义为 Hersch-Pfluger 偏差函数，$L>0$，$0<s<1$，且 $\Phi_L(0)=1-\Phi_L(1)=0$，而 $\mu(s)$ 为 Grötzsch 极值区域 $U\backslash[0,s]$ 的模函数．

关于 $\Phi_K(s)$ 的估计，有 Hübner 不等式为

$$\begin{cases} s^{\frac{1}{K}}\leqslant\Phi_K(s)\leqslant 4^{1-\frac{1}{K}}s^{\frac{1}{K}}, \\ 4^{1-K}s^K\leqslant\Phi_{\frac{1}{K}}(s)\leqslant s^K. \end{cases}$$

2010 年，Qiu 等[6]改进了上述不等式，得到

$$\left.\begin{aligned} s^{\frac{1}{K}}\leqslant\Phi_K(s)\leqslant 4^{(1-s^2)^{\frac{3}{4}}(1-\frac{1}{K})}s^{\frac{1}{K}}, \\ 4^{1-K}s^K\leqslant\Phi_{\frac{1}{K}}(s)\leqslant 4^{(1-K)(1-s)}s^K. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

设 F 为单位圆周 T 上的保向同胚，则其泊松积分为

$$\left.\begin{aligned} &w(z)=P[F](z)=\int_0^{2\pi}P(r,\theta-t)F(\exp(\mathrm{i}t))\mathrm{d}t, \\ &z=r\exp(\mathrm{i}\theta)\in U. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

在 U 上的单叶保向调和映照，且 $w(z)$ 可连续延拓到边界，满足 $w(\exp(\mathrm{i}t))=F(\exp(\mathrm{i}t))$．在式(5)中：$P(r,t)=\dfrac{1-r^2}{2\pi(1-2r\cos t+r^2)}$ 为泊松积分核(Radó-Kneser-Choquet 定理，参见文献[1])．

文中利用调和测度的拟不变性得到边界函数 F 的一个偏差估计，进而利用不等式(4)得到调和拟共形映照下 Heinz 不等式的一个精确下界估计．

2 主要结论及证明

引理 1 设 $f(t)=|\cos\dfrac{t}{2}|^{3/2}+|\sin\dfrac{t}{2}|^{3/2}$，$t\in[0,2\pi]$，则 $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 2\pi}f(t)=f(\pi/2)=\sqrt[4]{2}$．

定理 2 设 $w(z)=P[F](z)$ 为单位圆盘 U 到自身上的调和拟共形映照，$F(\exp(\mathrm{i}t))=\exp(\mathrm{i}\gamma(t))$ 为其边界函数．对于 $z_1=\exp(\mathrm{i}(s-t))$，$z_2=\exp(\mathrm{i}(s-t))\in T$，令 $\theta=\gamma(s+t)-\gamma(s-t)$，则有 $F(z_1)=\exp(\mathrm{i}\theta)F(z_2)$，且对于 $0\leqslant s,t\leqslant 2\pi$，有

$$2^{10(1-K)}\sin^{2K}t\leqslant\sin^2\frac{\theta}{2}\leqslant 2^{2(1-\frac{1}{K})(1+2^{\frac{5}{4}})}\sin^{\frac{2}{K}}t.$$

证明　由定理 2 的条件及调和测度的拟不变性(参见文献[4]的式(1.9))可知，对于 $0\leqslant s,t\leqslant 2\pi$，有不等式

$$\Phi_{\frac{1}{K}}(\cos\frac{t}{2})\leqslant\cos\frac{\theta}{4}\leqslant\Phi_K(\sin\frac{t}{2}) \tag{6}$$

成立，其中 $\theta=\gamma(s+t)-\gamma(s-t)$．利用等式 $\Phi_K^2(s)+\Phi_{\frac{1}{K}}^2(\sqrt{1-s^2})=1$，$0\leqslant s\leqslant 1$，可得

$$\Phi_{\frac{1}{K}}(\sin\frac{t}{2})\leqslant\sin\frac{\theta}{4}\leqslant\Phi_K(\cos\frac{t}{2}). \tag{7}$$

综合式(4)，(6)和(7)可得

$$\sin^2\frac{\theta}{2}\geqslant 4\Phi_{\frac{1}{K}}^2(\sin\frac{t}{2})\Phi_{\frac{1}{K}}^2(\cos\frac{t}{2})\geqslant 2^{10(1-K)}\sin^{2K}t,$$

以及

$$\sin^2\frac{\theta}{2}\leqslant 4\Phi_K^2(\sin\frac{t}{2})\Phi_K^2(\cos\frac{t}{2})\leqslant 2^{2(1-\frac{1}{K})[2(|\cos\frac{t}{2}|^{3/2}+|\sin\frac{t}{2}|^{3/2})+1]}\sin^{\frac{2}{K}}t\ .$$

由引理 1 可知

$$|\cos\frac{t}{2}|^{3/2}+|\sin\frac{t}{2}|^{3/2}\leqslant\sqrt[4]{2},$$

因此有

$$\sin^2\frac{\theta}{2}\leqslant 2^{2(1-\frac{1}{K})(1+2^{\frac{5}{4}})}\sin^{\frac{2}{K}}t.$$

定理2证毕.

定理3 假设$w(z)=P[F](z)$为单位圆到自身上的调和K-拟共形映照，且满足$w(0)=0$，其中$F(\exp(it))=\exp(i\gamma(t))$为边界函数,则有

$$|w_z(0)|^2+|w_{\bar{z}}(0)|^2\geqslant\max\{B(K),\frac{27}{4\pi^2}\}.\tag{8}$$

其中:$B(K)=2-2^{2(1-\frac{1}{K})(2+2^{\frac{5}{4}})}\dfrac{2K^2\Gamma(\frac{2}{K})}{(K+1)\Gamma^2(\frac{1}{K})}$为$K$的连续函数,满足$B(1)=1$,且当$1\leqslant K\leqslant 1.051\ 74$时,$B(K)\geqslant\dfrac{27}{4\pi^2}$.

证明 由定理3条件知$w(0)=0$,故$w(z)$的表达式为

$$w(z)=P[F](z)=h(z)+\overline{g(z)}.$$

其中:$h(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_nz^n$;$g(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}b_nz^n$

利用边界函数$F(\exp(it))=\exp(i\gamma(t))$及Parseval等式(参见文献[1])可知,对于任意的$t\in\mathbf{R}$,有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp(i[\gamma(s+t)-\gamma(s-t)])ds=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\exp(2int)+\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2\exp(-2int).$$

取上述等式的实部,可得

$$1-2J(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2+|b_n|^2)\cos(2nt).\tag{9}$$

其中:$J(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2(\dfrac{\gamma(s+t)-\gamma(s-t)}{2})ds$.

由假设$w(z)$为调和K-拟共形映照,利用定理2可知

$$2^{10(1-K)}\sin^{2K}t\leqslant J(t)\leqslant 2^{2(1-\frac{1}{K})(1+2^{\frac{5}{4}})}\sin^{\frac{2}{K}}t.$$

对式(9)的两边乘以$1+\cos(2t)$并沿着t从0到π积分,可得

$$\int_0^{\pi}[1-2J(t)][1+\cos(2t)]dt=\frac{\pi}{2}(|a_1|^2+|b_1|^2).$$

利用Gamma函数积分得

$$\int_0^{\pi}\sin^{\frac{2}{K}}t\,dt=\frac{4^{-\frac{1}{K}}\pi\Gamma(1+\frac{2}{K})}{\Gamma^2(1+\frac{1}{K})}$$

以及

$$\int_0^{\pi}\sin^{\frac{2}{K}}t\cos(2t)dt=\frac{4^{-\frac{1}{K}}\pi\Gamma(1+\frac{2}{K})}{\Gamma(\frac{1}{K})\Gamma(2+\frac{1}{K})}.$$

于是有

$$\begin{aligned}|a_1|^2+|b_1|^2=&\frac{2}{\pi}\left\{\pi-2\int_0^{\pi}J(t)[1+\cos(2t)]dt\right\}\geqslant\\&\frac{2}{\pi}\left\{\pi-2\cdot 2^{2(1-\frac{1}{K})(1+2^{\frac{5}{4}})}\int_0^{\pi}\sin^{\frac{2}{K}}t\,dt-2\cdot 2^{2(1-\frac{1}{K})(1+2^{\frac{5}{4}})}\int_0^{\pi}\sin^{\frac{2}{K}}t\cos(2t)dt\right\}=\\&2-2^{2(1-\frac{1}{K})(1+2^{\frac{5}{4}})}\frac{\Gamma(1+\frac{2}{K})}{\Gamma^2(1+\frac{1}{K})}+2^{2(1-\frac{1}{K})(1+2^{\frac{5}{4}})}\frac{\Gamma(1+\frac{2}{K})}{\Gamma(\frac{1}{K})\Gamma(2+\frac{1}{K})}.\end{aligned}$$

由Gamma函数的性质知,对于任意的实数$x\in\mathbf{R}$,有$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$. 化简上式可得

$$|a_1|^2+|b_1|^2\geqslant 2-2^{2(1-\frac{1}{K})(2+2^{\frac{5}{4}})}\frac{2K\Gamma(\frac{2}{K})}{\Gamma^2(\frac{1}{K})}+$$

$$2^{2(1-\frac{1}{K})(2+2^{\frac{5}{4}})}\ \frac{2K\Gamma(\frac{2}{K})}{\Gamma^2(\frac{1}{K})(K+1)} =$$

$$2-2^{2(1-\frac{1}{K})(2+2^{\frac{5}{4}})}\ \frac{2K^2\Gamma(\frac{2}{K})}{(K+1)\Gamma^2(\frac{1}{K})} := B(K).$$

利用 Mathematic 软件做出 $B(K)$的图像，如图 1 所示. 从图 1 可知：函数 $B(K)$为 K 的连续单调递减函数，且 $B(1)=1$，$B(1.051\ 74)\approx\frac{27}{4\pi^2}$及 $B(1.141\ 12)=0$.

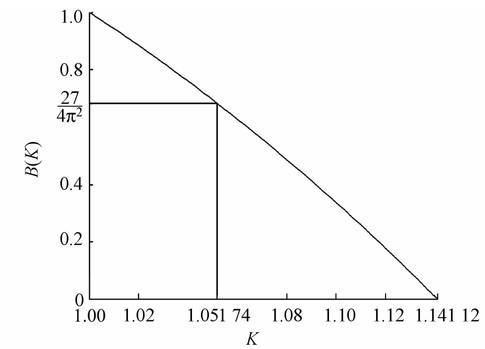

图 1　函数 $B(K)$的图像

Fig. 1　Graphics of the function $B(K)$

定理 3 证毕.

注 1　定理 3 中若假设 $K=1$，则 $w(z)=\exp(\mathrm{i}x)z$ 为单位圆到自身上的共形映照，此时$|w_z(z)|^2+|w_{\bar z}(z)|^2=1$. 这说明定理 3 的下界 $B(K)$达到 1 是精确的.

参考文献：

[1]　DUREN P. Harmonic mappings in the plane[M]. New York：Cambridge University Press，2004：6-7.

[2]　LEWY L. On the non-vanishing of the Jocobian in certain one-to-one mappings[J]. Bull Am Math Soc，1932，42(10)：689-692.

[3]　KALAJ D. Quasiconformal and harmonic mappings between Jordan domains[J]. Mayh Z，2008，260(2)：237-252.

[4]　PARTYKA D，SAKAN K. On an asymptotically sharp variant of Heinz′s inequality[J]. Ann Acad Sci Fenn Math，2005，30：167-182.

[5]　MIROSLAV P. Boundary correspondence under harmonic quasiconformal homeomorphisma of the unit disk[J]. Ann Acad Sci Fenn Math，2002，27(2)：365-372.

[6]　QIU Song-liang，REN Liang-yu. Sharp estimate for Hübner′s upper bound function with applications[J]. Appl Math J Chinese Univ，2010，25(2)：227-235.

[7]　朱剑峰. 单位圆盘上调和拟共形映照的复特征估计[J]. 华侨大学学报：自然科学版，2010，31(4)：476-479.

[8]　朱剑峰，黄心中. 两类调和函数的拟共形性质[J]. 华侨大学学报：自然科学版，2011，32(6)：705-709.

[9]　ZHU Jian-feng，ZENG Xiao-ming. Estimate for Heinz inequality in the small dilatation of harmonic quasiconformal mappings[J]. Journal of Computational Analysis and Applications，2011，13(6)：1081-1087.

[10]　朱剑峰. 单位圆到凸区域上的调和拟共形映照[J]. 数学进展，2012，41(1)：50-54.

[11]　HEINZ E. Über die lösungen der minimalflächengleichung[J]. Nachr Akad Wiss Math-Phys KI，1952，2：51-56.

[12]　HALL R R. On an inequality of Heina[J]. J Analyse Math，1982，42(1)：185-198.

A Sharp Estimate for Heinz′s Inequality of Harmonic *K*-Quasiconformal Mappings

ZHU Jian-feng

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract:　Assume that $w=P[F](z)$ is a harmonic quasiconformal self-mapping of the unit disk satisfying $w(0)=0$, where $F(\exp(\mathrm{i}t))=\exp(\mathrm{i}\gamma(t))$ is the boundary function. By using the quasi-invariance of harmonic measure, we obtain an estimate for the boundary function. Furthermore, applying the improved Hübner inequality we obtain a sharp estimate of Heinz′s inequality for harmonic quasiconformal mappings.

Keywords:　harmonic quasiconformal mapping; Heinz inequality; Hubner inequality; harmonic measure; quasi-invariance measure

（**责任编辑**：黄仲一　　**英文审校**：黄心中）