第35卷 第3期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 35 No. 3
2014年5月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) May 2014

文章编号:1000-5013(2014)03-0349-05 doi:10.11830/ISSN.1000-5013.2014.03.0349

Hilbert 边值逆问题关于边界曲线的稳定性

陈红梅, 林峰

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 当边界曲线发生微小的光滑扰动时,给出指标大于等于零时 Hilbert 边值逆问题解的状况. 借助共形变换理论给出其中解的表达式,并讨论 Hilbert 边值逆问题解的稳定性,以及给出相应的误差估计.

关键词: Hilbert 边值逆问题; 扰动; 稳定性; 共形变换

中图分类号: O 175.8 **文献标志码:** A

近年来,解析函数边值问题关于边界曲线的稳定性有较多的研究,如文献[1]讨论了 Riemann 边值问题在边界曲线发生光滑摄动时的稳定性;文献[2]讨论了 Hilbert 边值问题在边界曲线发生光滑摄动后的解及其稳定性,并给出了相应的误差估计;文献[3]则研究了开口弧上 Riemann 边值问题的稳定性问题等[4]. 然而,作为边值问题的逆问题,其研究才刚起步. 文献[5-6]从力学背景出发对特殊情形的 Riemann 边值逆问题作了初步的探讨;文献[7]讨论了由路见可教授提出的一类解析函数的 Riemann 边值逆问题;文献[8]则提出并研究了 Hilbert 边值逆问题. 本文将讨论边界曲线发生光滑摄动后,Hilbert 边值逆问题解和稳定性问题,并利用范数给出了进一步的误差估计.

1 预备知识

设 E 为复平面上的有界连通区域,$L\subset E$ 是 z 平面上的单位圆,记 $C^2(L)$ 为在 L 上具有二阶连续导数的函数类,在其上定义范数

$$\|\omega\|_2=\|\omega\|_L+\|\omega'\|_L+\|\omega''\|_L,\qquad \omega\in C^2(L).$$

后为 Banach 空间,这里记 $\|\omega\|_L=\max\limits_{t\in L}|\omega(t)|$.

设 $\rho_0>0$ 充分小, 记 $B(\rho_0)=\{\omega\in C^2(L)) : \|\omega\|_2<\rho_0\}$, L 经过扰动 $\omega\in B(\rho_0)$ 得到曲线 $L_\omega=\{\xi : \xi=t+\omega(t), t\in L\}\subset E$,则曲线 L_ω 为简单光滑近似于单位圆周的封闭曲线. 记 D^+ 为 L 所围的内部区域,D^+_ω 为 L_ω 所围的内部区域,$\Omega=D^+_\omega\cap D^+$.

设 $f\in H^\mu(E)$,记 $A(f)=\sup\{\dfrac{|f(z_1)-f(z_2)|}{|z_1-z_2|^\mu} : z_1,z_2\in E, z_1\neq z_2\}$.

文献[8]讨论了如下的单位圆上 Hilbert 边值逆问题(Ⅰ).

求函数对$(\Phi^+(z),\Psi(t))$,其中 $\Phi^+(z)$为区域 D^+ 内的全纯函数,连续到 D^++L 上,$\Psi(t)$为 L 上 H 类实函数,满足边值条件

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{Re}[\overline{\lambda_1(t)}\Phi^+(t)]&=r_1(t)\Psi(t)+c_1(t),\qquad t\in L,\\ \operatorname{Re}[\overline{\lambda_2(t)}\Phi^+(t)]&=r_2(t)\Psi(t)+c_2(t),\qquad t\in L.\end{aligned}\right\}\tag{Ⅰ}$$

上式中: $\lambda_j(t)=a_j(t)+ib_j(t)$, $a_j(t)$, $b_j(t)$, $c_j(t)$, $r_j(t)\in H(L)$, $j=1,2$ 都是已知实函数, 且 $\lambda(t)\neq0$, $r(t)\neq0$. 其中: $\lambda(t)=\begin{vmatrix}\lambda_1(t) & r_1(t)\\ \lambda_2(t) & r_2(t)\end{vmatrix}$; $r(t)=\begin{vmatrix}1 & r_1(t)\\ 1 & r_2(t)\end{vmatrix}$; $c(t)=\begin{vmatrix}c_1(t) & r_1(t)\\ c_2(t) & r_2(t)\end{vmatrix}$.

记 $G(t)=-\dfrac{\lambda(t)}{\overline{\lambda(t)}}$, $g(t)=\dfrac{2c(t)}{\overline{\lambda(t)}}$. 当 $\omega\in B(\rho_0)$时,设 $a_j(z)$, $b_j(z)$, $c_j(z)$, $r_j(z)\in H^\mu(E)$, $j=1,2$ 都是

收稿日期: 2013-03-19

通信作者: 林峰(1962-),男,副教授,主要从事函数论的研究. E-mail:lfeng@hqu.edu.cn.

实函数,则有如下 Hilbert 边值逆问题(Ⅱ).

求函数对($\Phi_{\omega}^{+}(z)$,$\Psi_{\omega}(\xi)$)这里 $\Phi_{\omega}^{+}(z)$ 为区域 D_{ω}^{+} 内的全纯函数,连续到 $D_{\omega}^{+}+L_{\omega}$ 上,$\Psi_{\omega}(\xi)$ 为 L_{ω} 上 H 类实函数,满足边值条件

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{Re}[\overline{\lambda_1(\xi)}\Phi_{\omega}^{+}(\xi)]=r_1(\xi)\Psi_{\omega}(\xi)+c_1(\xi), \qquad \xi=t+\omega(t)\in L_{\omega},\\&\mathrm{Re}[\overline{\lambda_2(\xi)}\Phi_{\omega}^{+}(\xi)]=r_2(\xi)\Psi_{\omega}(\xi)+c_2(\xi), \qquad \xi=t+\omega(t)\in L_{\omega}.\end{aligned}\right\} \tag{Ⅱ}$$

上式中:$\xi=t+\omega(t)\in L_{\omega}$,$\lambda_j(\xi)=a_j(\xi)+ib_j(\xi)$,$j=1,2$ 且 $\lambda(\xi)\neq 0$,$r(\xi)\neq 0$. 其中:$\lambda(\xi)=\begin{vmatrix}\lambda_1(\xi) & r_1(\xi)\\ \lambda_2(\xi) & r_2(\xi)\end{vmatrix}$;$r(\xi)=\begin{vmatrix}1 & r_1(\xi)\\ 1 & r_2(\xi)\end{vmatrix}$;$c(\xi)=\begin{vmatrix}c_1(\xi) & r_1(\xi)\\ c_2(\xi) & r_2(\xi)\end{vmatrix}$.

2 基本引理

记 $\kappa=\dfrac{1}{\pi}[\arg\lambda(t)]_L$,$\kappa_{\omega}=\dfrac{1}{\pi}[\arg\lambda(\xi)]_{L_{\omega}}$ 分别称为 Hilbert 边值逆问题(Ⅰ),(Ⅱ)的指标.

引理 1[2] 设 L_{ω} 是 L 的扰动曲线,$\|\omega\|_2<\rho_0$,则把区域 $D(L_{\omega})$保形映射到单位圆 $D(\Gamma)$上的函数可表示成

$$w=F(z,L_{\omega})=z\{1+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\tau+z}{(\tau-z)\tau}\omega(\tau)\mathrm{d}\tau\}+O(\|\omega\|_2^{1-\varepsilon}), \qquad z\in D(L_{\omega}),$$

且其逆映射可表示成

$$z=\psi(w,\Gamma)=w\{1-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\tau+w}{(\tau-w)\tau}\omega(\tau)\mathrm{d}\tau\}+O(\|\omega\|_2^{1-\varepsilon}), \qquad w\in D(\Gamma),$$

其中:$D(L_{\omega})$为 L_{ω} 所围的内部区域.

引理 2 任给 $\omega\in B(\rho_0)$,有 $\kappa=\kappa_{\omega}$.

证明 事实上,通过先将 Hilbert 边值逆问题(Ⅰ)和(Ⅱ)转化为 Hilbert 边值问题来求出 $\Phi(z)$和 $\Phi_{\omega}(z)$,而 κ 和 κ_{ω} 也恰好是对应 Hilbert 边值问题的指标. 由文献[2]的引理 5,可以得到 $\kappa=\kappa_{\omega}$.

引理 3[2] 设函数 $f(z)\in H^{\mu}(E)$,记 $f_{\psi}(\tau)=f(\psi(\tau,L))$,则对于 $\forall\upsilon\in(0,1)$,有

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f_{\psi}(\tau)\mathrm{d}\tau}{\tau-F(\xi,L_{\omega})}-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(\tau)\mathrm{d}\tau}{\tau-t}\right\|_L\leqslant C(\rho_0,\varepsilon)A(f)\|\omega\|_2^{\mu\upsilon(1-\varepsilon)},$$

其中:$\xi=t+\omega(t)\in L_{\omega}$,$t\in L$,$\varepsilon>0$. 这里,$\psi$,$F$ 是引理 1 中 ψ,F 连续延拓到边界上的.

引理 4[2] 设 $F(\xi,L_{\omega})$是引理 1 中 F 连续延拓到边界,则有

$$\|F(\xi,L_{\omega})-t\|_L\leqslant C(\rho_0,\varepsilon)\|\omega\|_2^{1-\varepsilon}, \quad \xi=t+\omega(t)\in L_{\omega},0<\varepsilon<1.$$

引理 5[9] 如果 $f,h\in H(E)$且 $f_{\omega}(t)=f(t+\omega(t))$,$h_{\omega}(t)=h(t+\omega(t))$,$t\in L$,满足 $\|f_{\omega}-f\|_L\leqslant C(\rho_0)A(f)\|\omega\|_1^{\mu}$,$\|h_{\omega}-h\|_L\leqslant C(\rho_0)A(h)\|\omega\|_1^{v}$,则有

1) $\|f_{\omega}h_{\omega}-fh\|_L\leqslant C(\rho_0)(A(f)+A(h))\|\omega\|_1^{\min(\mu,v)}$;

2) $\|f_{\omega}/h_{\omega}-f/h\|_L\leqslant C(\rho_0)(A(f)+A(h))\|\omega\|_1^{\min(\mu,v)}$,$h(t)\neq 0$,$h_{\omega}(t)\neq 0$,$t\in L$.

3 主要结果及其证明

对于边值逆问题(Ⅱ)的边值条件,将其第一式两端乘以 $r_2(\xi)$,并与第二式两端乘以 $r_1(\xi)$后相减,可得 Hilbert 边值问题为

$$\mathrm{Re}[\overline{\lambda(\xi)}\Phi_{\omega}^{+}(\xi)]=c(\xi), \qquad \xi=t+\omega(t)\in L_{\omega}.$$

定理 1 当 $\kappa\geqslant 0$ 时,边值逆问题(Ⅱ)中的 $\Phi_{\omega}(z)$有一般解,即

$$\Phi_{\omega}(z)=\Phi_{0,\omega}(z)+X_{\omega}(z)P_{\kappa}(z), \tag{1}$$

且记 $\|\Phi_{\omega}-\Phi\|_{\Omega}=\sup\limits_{z\in\Omega}|\Phi_{\omega}(z)-\Phi(z)|$. 对于任意 $v\in(0,1)$,$\varepsilon>0$,则

$$\|\Phi_{\omega}-\Phi\|_{\Omega}\leqslant C(\rho_0,\varepsilon)[C(\lambda)+C(\lambda,c)+\|P_{\kappa}\|_L]\|\omega\|_2^{\mu v(1-\varepsilon)}, \qquad \Omega=D^{+}\cap D_{\omega}^{+} \tag{2}$$

成立. 式(1),(2)中:$C(\lambda)=2\|\lambda^{-1}\|_LA(\lambda)+1$,$C(\lambda,c)=2\|\lambda^{-1}\|_L^2(\|c\|_LA(\lambda)+\|\lambda\|_LA(c))$;

$X_{\omega}(z)=\begin{cases}B\exp(\Gamma_{\omega}(z)), z\in D_{\omega}^{+},\\ BF^{-\kappa}(z,L_{\omega})\exp(\Gamma_{\omega}(z)), z\in D_{\omega}^{-};\end{cases}$ $\Gamma_{\omega}(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma}\frac{\log G_{\psi}^{*}(\tau)}{\tau-F(z,L_{\omega})}\mathrm{d}\tau$;$G_{\psi}^{*}(\tau)=\tau^{-\kappa}G_{\psi}(\tau)=-\tau^{-\kappa}$

$\dfrac{\lambda_{\psi}(\tau)}{\overline{\lambda_{\psi}(\tau)}}$；$\Phi_{0,\omega}(z) = \dfrac{X_{\omega}(z)}{4\pi i}\left\{\int_{\Gamma}\dfrac{g_{\psi}(\tau)}{X_{\psi}^{+}(\tau)(\tau-F(z,L_{\omega}))}d\tau + F^{\kappa}(z,L_{\omega})\int_{\Gamma}\dfrac{\tau^{-\kappa}g_{\psi}(\tau)}{X_{\psi}^{+}(\tau)(\tau-F(z,L_{\omega}))}d\tau\right\} - \dfrac{F^{\kappa}(z,L_{\omega})X_{\omega}(z)}{4\pi i}\int_{\Gamma}\dfrac{\tau^{-\kappa-1}g_{\psi}(\tau)}{X_{\psi}^{+}(\tau)}d\tau$. 其中，$g_{\psi}(\tau)=\dfrac{2c_{\psi}(\tau)}{\lambda_{\psi}(\tau)}$，$P_{\kappa}(z)$为关于 z 的不超过κ 次任意多项式，B 为非零常数.

证明　由文献[8]的定理 2 和文献[2]的定理 4 可知，式(1)成立；由文献[2]的定理 6 可得到

$$\|\Phi_{\omega}-\Phi\|_{\Omega}\leqslant C(\rho_0,\omega)[A(G)+A(g)+\|G\|_{L}+\|P_{\kappa}\|_{L}]\|\omega\|_{2}^{\mu v(1-\varepsilon)},\qquad \Omega=D^{+}\cap D_{\omega}^{+}.$$

且有

$$\|G\|_{L}=\max_{t\in L}|G(t)|=\max_{t\in L}\left|\frac{\lambda(t)}{\overline{\lambda(t)}}\right|=1,\tag{3}$$

$$\begin{aligned}|G(z_1)-G(z_2)|&=\left|\frac{\lambda(z_1)}{\overline{\lambda(z_1)}}-\frac{\lambda(z_2)}{\overline{\lambda(z_2)}}\right|=\left|\frac{\lambda(z_1)\overline{\lambda(z_2)}-\overline{\lambda(z_1)}\lambda(z_2)}{\lambda(z_1)\lambda(z_2)}\right|\leqslant\\&\frac{[|\lambda(z_1)|\cdot|\overline{\lambda(z_2)}-\overline{\lambda(z_1)}|+|\overline{\lambda(z_1)}|\cdot|\lambda(z_1)-\lambda(z_2)|]}{|\lambda(z_1)\lambda(z_2)|}=\\&\frac{1}{|\lambda(z_2)|}[|\overline{\lambda(z_2)}-\overline{\lambda(z_1)}|+|\lambda(z_1)-\lambda(z_2)|]\leqslant\\&\|\lambda^{-1}\|_{L}\cdot[A(\bar{\lambda})|z_1-z_2|^{\mu}+A(\lambda)|z_1-z_2|^{\mu}]=\\&\|\lambda^{-1}\|_{L}\cdot 2A(\lambda)|z_1-z_2|^{\mu},\end{aligned}$$

所以可得

$$A(G)\leqslant 2\|\lambda^{-1}\|_{L}\cdot A(\lambda)=C(\lambda)-1.\tag{4}$$

同理可证

$$A(g)\leqslant 2\|\lambda^{-1}\|_{L}^{2}\cdot(\|c\|_{L}\cdot A(\lambda)+\|\lambda\|_{L}\cdot A(c))=C(\lambda,c).\tag{5}$$

因此，对于任意 $v\in(0,1)$，$\varepsilon>0$，有

$$\|\Phi_{\omega}-\Phi\|_{\Omega}\leqslant C(\rho_0,\varepsilon)[C(\lambda)+C(\lambda,c)+\|P_{\kappa}\|_{L}]\|\omega\|_{2}^{\mu v(1-\varepsilon)},\qquad \Omega=D^{+}\cap D_{\omega}^{+}.$$

定理 2　设 $X(z)$是 $G(t)$，$t\in L$ 的典则函数，$X_{\omega}(z)$如定理 1 给出，则有

1）$\|X_{\omega}^{+}(\xi)-X^{+}(t)\|_{L}\leqslant C(\rho_0,\varepsilon)[A(G)+1]\|\omega\|_{2}^{\mu v(1-\varepsilon)}$，

2）$\|X_{\omega}^{-}(\xi)-X^{-}(t)\|_{L}\leqslant C(\rho_0,\varepsilon)[A(G)+1]\|\omega\|_{2}^{\mu v(1-\varepsilon)}$，其中 $\xi=t+\omega(t)$，$t\in L$.

证明　因为有

$$\begin{aligned}|X_{\omega}^{-}(\xi)-X^{-}(t)|&=|BF^{-\kappa}(\xi,L_{\omega})\exp(\Gamma_{\omega}^{-}(\xi))-Bt^{-\kappa}\exp(\Gamma^{-}(t))|=\\&B|F^{\kappa}(\xi,L_{\omega})\exp(\Gamma^{-}(t))-t^{\kappa}\exp(\Gamma_{\omega}^{-}(\xi))|,\end{aligned}$$

所以由文献[2]定理 5 及其证明并注意到$\|G\|_{L}=1$，立即得到结论成立.

下面求 $\Psi_{\omega}(\xi)$，并且给出 Ψ_{ω} 与 Ψ 的误差估计.

因为 L_{ω} 一般为非单位圆，故为了求解 Hilbert 边值逆问题Ⅱ中 $\Psi_{\omega}(\xi)$的解，先作如引理 1 所述的共形映射 $z=\psi(w,\Gamma)$. 它是 w 平面上单位圆 $D(\Gamma)$到 z 平面上 $D(L_{\omega})$的共形映射，其边界对应为 $\xi=\psi(\zeta,\Gamma)$. 因此，边值逆问题(Ⅱ)转化为单位圆周上 Hilbert 边值逆问题(Ⅲ).

求函数对$(\Phi^{+}(\psi(w,\Gamma)),\Psi(\psi(\zeta,\Gamma)))$，这里 $\Phi^{+}(\psi(w,\Gamma))$为区域 S^{+}(Γ 所围的内部区域)内的全纯函数，连续到 $S^{+}+\Gamma$ 上，$\Psi(\psi(\zeta,\Gamma))$为 Γ 上 H 类实函数，满足边值条件

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{Re}[\overline{\lambda_1(\psi(w,\Gamma))}\Phi^{+}(\psi(\zeta,\Gamma))]=r_1(\psi(\zeta,\Gamma))\Psi(\psi(\zeta,\Gamma))+c_1(\psi(\zeta,\Gamma)),\qquad \zeta\in\Gamma,\\&\mathrm{Re}[\overline{\lambda_2(\psi(w,\Gamma))}\Phi^{+}(\psi(\zeta,\Gamma))]=r_2(\psi(\zeta,\Gamma))\Psi(\psi(\zeta,\Gamma))+c_2(\psi(\zeta,\Gamma)),\qquad \zeta\in\Gamma.\end{aligned}\right\}$$

记 $f(\psi(\cdot,\Gamma))=f_{\psi}(\cdot)$，则上式可写为

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{Re}[\overline{\lambda_{1,\psi}(\zeta)}\Phi_{\psi}^{+}(\zeta)]=r_{1,\psi}(\zeta)\Psi_{\psi}(\zeta)+c_{1,\psi}(\zeta),\qquad \zeta\in\Gamma,\\&\mathrm{Re}[\overline{\lambda_{2,\psi}(\zeta)}\Phi_{\psi}^{+}(\zeta)]=r_{2,\psi}(\zeta)\Psi_{\psi}(\zeta)+c_{2,\psi}(\zeta),\qquad \zeta\in\Gamma.\end{aligned}\right\}\tag{Ⅲ}$$

由文献[2]知：$a_{j,\psi}$，$b_{j,\psi}$，$c_{j,\psi}$，$r_{j,\psi}$($j=1,2$)是 Holder 连续函数类，阶数为 $\mu(1-\varepsilon)$，$\varepsilon\in(0,1)$，则问题(Ⅲ)就成为单位圆上的 Hilbert 边值逆问题.

记 $\kappa_1=\dfrac{1}{\pi}[\arg\lambda_{\psi}(\zeta)]_{\Gamma}$，称为边值逆问题(Ⅲ)的指标．由引理 2 的证明并利用文献[2]中引理 5，可

得 $\kappa_1=\kappa=\kappa_\omega$. 另由文献[8]的定理 2,可得边值逆问题(Ⅲ)的一般解为

$$\Psi_\psi(\zeta)=\Psi_{0,\psi}(\zeta)+\widetilde{X}_\psi(\zeta)P_\kappa(\zeta).$$

上式中:$\Psi_{0,\psi}(\zeta)=\widetilde{g}_\psi(\zeta)+\dfrac{\widetilde{X}_\psi(\zeta)}{4\pi i}\left\{\int_\Gamma\dfrac{g_\psi(\tau)}{X_\psi^+(\tau)(\tau-\zeta)}\mathrm{d}\tau+\zeta^\kappa\int_\Gamma\dfrac{\tau^{-\kappa}g_\psi(\tau)}{X_\psi^+(\tau)(\tau-\zeta)}\mathrm{d}\tau-\zeta^\kappa\int_\Gamma\dfrac{\tau^{-\kappa-1}g_\psi(\tau)}{X_\psi^+(\tau)}\mathrm{d}\tau\right\}-\dfrac{c_{2,\psi}(\zeta)-c_{1,\psi}(\zeta)}{r_\psi(\zeta)}$;$\widetilde{X}_\psi(\zeta)=[\overline{(\lambda_{2,\psi}(\zeta)-\lambda_{1,\psi}(\zeta))}X_\psi^+(\zeta)+(\lambda_{2,\psi}(\zeta)-\lambda_{1,\psi}(\zeta))X_\psi^-(\zeta)]/2r_\psi(\zeta)$;$\widetilde{g}_\psi(\zeta)=[\overline{(\lambda_{2,\psi}(\zeta)-\lambda_{1,\psi}(\zeta))}g_\psi(\zeta)+(\lambda_{2,\psi}(\zeta)-\lambda_{1,\psi}(\zeta))\overline{g_\psi(\zeta)}]/4r_\psi(\zeta)$;$\Gamma_\psi(w)=\dfrac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\dfrac{\log G_\psi^*(\tau)}{\tau-w}\mathrm{d}\tau$;$X_\psi(w)=\begin{cases}B\exp(\Gamma_\psi(w)),\ |w|<1,\\ Bw^{-\kappa}\exp(\Gamma_\psi(w)),\ |w|>1;\end{cases}$ $G_\psi^*(\zeta)=\zeta^{-\kappa}G_\psi(\zeta)=-\zeta^{-\kappa}\dfrac{\lambda_\psi(\zeta)}{\overline{\lambda_\psi(\zeta)}}$;$g_\psi(\zeta)=\dfrac{2c_\psi(\zeta)}{\lambda_\psi(\zeta)}$.

对上述式作变换 $w=F(z,L_\omega)$ 和 $\zeta=F(\xi,L_\omega)$,可得到如下定理.

定理 3 当 $\kappa\geqslant0$ 时 边值逆问题(Ⅱ)中有一般解为

$$\Psi_\omega(\xi)=\Psi_{0,\omega}(\xi)+\widetilde{X}_\omega(\xi)P_\kappa(\xi).$$

上式中:$\Psi_{0,\omega}(\xi)=\widetilde{g}_\omega(\xi)+\dfrac{\widetilde{X}_\omega(\xi)}{4\pi i}\left\{\int_\Gamma\dfrac{g_\psi(\tau)}{X_\psi^+(\tau)(\tau-F(\xi,L_\omega))}\mathrm{d}\tau+F^\kappa(\xi,L_\omega)\int_\Gamma\dfrac{\tau^{-\kappa}g_\psi(\tau)}{X_\psi^+(\tau)(\tau-F(\xi,L_\omega))}\mathrm{d}\tau-F^\kappa(\xi,L_\omega)\int_\Gamma\dfrac{\tau^{-\kappa-1}g_\psi(\tau)}{X_\psi^+(\tau)}\mathrm{d}\tau\right\}-\dfrac{c_2(\xi)-c_1(\xi)}{r(\xi)}$;$\widetilde{X}_\omega(\xi)=[\overline{(\lambda_2(\xi)-\lambda_1(\xi))}X_\omega^+(\xi)+(\lambda_2(\xi)-\lambda_1(\xi))X_\omega^-(\xi)]/2r(\xi)$;$\widetilde{g}(\xi)=[\overline{(\lambda_2(\xi)-\lambda_1(\xi))}g(\xi)+(\lambda_2(\xi)-\lambda_1(\xi))\overline{g(\xi)}]/4r(\xi)$.

这里,$X_\omega(z)$ 如定理 1 中所示,而 $P_\kappa(\xi)$ 为关于 ξ 的不超过 κ 次任意多项式.

定义 1 设 $(\Phi(z),\Psi(t))$,$(\Phi_\omega(z),\Psi_\omega(\xi))$ 分别是 Hilbert 边值逆问题(Ⅰ),(Ⅱ)的一般解. 则当 $\|\omega\|_2\to0$ 时,若有 $\|\Phi_\omega-\Phi\|_\Omega\to0$ 且 $\|\Psi_\omega-\Psi\|_L=\max\limits_{t\in L}|\Psi_\omega(t+\omega(t))-\Psi(t)|\to0$,成立,则称边值逆问题(Ⅱ)的一般解 $(\Phi(z),\Psi_\omega(\xi))$ 在 $\bar{\Omega}$ 上是稳定的[10].

定理 4 设 $\|\omega\|_2<\rho_0$,$a_j(z),b_j(z),c_j(z),r_j(z)\in H^\mu(E)$,$j=1,2$ 当 $\kappa\geqslant0$ 时,Hilbert 边值逆问题(Ⅱ)中的解 $\Psi_\omega(\xi)$ 与问题Ⅰ的解中 $\Psi(t)$ 满足对于任意 $v\in(0,1)$,$\varepsilon>0$ 有

$$\|\Psi_\omega-\Psi\|_L\leqslant C(\rho_0,\varepsilon)[C(\lambda)+C(\lambda,c)+A(r)+A^*+\|P_\kappa\|_L]\|\omega\|_2^{\mu v(1-\varepsilon)}.$$

证明 由引理 5 可得

$$\left\|\frac{\overline{(\lambda_2(\xi)-\lambda_1(\xi))}}{2r(\xi)}-\frac{\overline{(\lambda_2(t)-\lambda_1(t))}}{2r(t)}\right\|_L\leqslant C(\rho_0)[A(\lambda_1)+A(\lambda_2)+A(r)]\|\omega\|_1^\mu,\tag{6}$$

$$\left\|\frac{(\lambda_2(\xi)-\lambda_1(\xi))}{2r(\xi)}-\frac{(\lambda_2(t)-\lambda_1(t))}{2r(t)}\right\|_L\leqslant C(\rho_0)[A(\lambda_1)+A(\lambda_2)+A(r)]\|\omega\|_1^\mu.\tag{7}$$

根据定理 2 和引理 5,可得到

$$\begin{aligned}|\widetilde{X}_\omega(\xi)-\widetilde{X}(t)|=&\left|\frac{[\overline{(\lambda_2(\xi)-\lambda_1(\xi))}X_\omega^+(\xi)+(\lambda_2(\xi)-\lambda_1(\xi))X_\omega^-(\xi)]}{2r(\xi)}-\right.\\&\left.\frac{[\overline{(\lambda_2(t)-\lambda_1(t))}X^+(t)+(\lambda_2(t)-\lambda_1(t))X^-(t)]}{2r(t)}\right|\leqslant\\&\left|\frac{\overline{(\lambda_2(\xi)-\lambda_1(\xi))}}{2r(\xi)}X_\omega^+(\xi)-\frac{\overline{(\lambda_2(t)-\lambda_1(t))}}{2r(t)}X^+(t)\right|+\\&\left|\frac{(\lambda_2(\xi)-\lambda_1(\xi))}{2r(\xi)}X_\omega^-(\xi)-\frac{(\lambda_2(t)-\lambda_1(t))}{2r(t)}X^-(t)\right|\leqslant\\&C(\rho_0,\omega)[A(G)+A(\lambda_1)+A(\lambda_2)+A(r)+1]\|\omega\|_2^{\mu v(1-\varepsilon)}.\end{aligned}$$

上式中:$\xi=t+\omega(t)\in L_\omega$;$v\in(0,1)$;$\varepsilon>0$. 因为 $g(\tau)=2c(t)/\overline{\lambda(t)}\in H^\mu$,所以由引理 3 可证明

$$\left\|\frac{1}{4\pi i}\int_L\frac{g_\psi(\tau)\mathrm{d}\tau}{X_\psi^+(\tau)(\tau-F(\xi,L_\omega))}-\frac{1}{4\pi i}\int_L\frac{g(\tau)\mathrm{d}\tau}{X^+(\tau)(\tau-t)}\right\|_L\leqslant C(\rho_0,\varepsilon)[A(G)+A(g)]\|\omega\|_2^{\mu v(1-\varepsilon)},$$

$$\left\|\frac{1}{4\pi i}\int_L\frac{\tau^{-\kappa}g_\psi(\tau)\mathrm{d}\tau}{X_\psi^+(\tau)(\tau-F(\xi,L_\omega))}-\frac{1}{4\pi i}\int_L\frac{\tau^{-\kappa}g(\tau)\mathrm{d}\tau}{X^+(\tau)(\tau-t)}\right\|_L\leqslant C(\rho_0,\varepsilon)[A(G)+A(g)]\|\omega\|_2^{\mu v(1-\varepsilon)}$$

成立. 运用引理 5 可证明

$$\|\widetilde{g}_\omega(\xi)-\widetilde{g}(t)\|_L\leqslant C(\rho_0)[A(g)+A(\lambda_1)+A(\lambda_2)+A(r)]\|\omega\|_1^\mu,\tag{8}$$

$$\left\| \frac{c_2(\xi)-c_1(\xi)}{r(\xi)} - \frac{c_2(t)-c_1(t)}{r(t)} \right\|_L \leqslant C(\rho_0)[A(r)+A(c_1)+A(c_2)] \|\omega\|_1^{\mu}, \tag{9}$$

又因为

$$|F^{\kappa}(\xi,L_{\omega})-t^{\kappa}| \leqslant C(\rho_0,\varepsilon)\,|F(\xi,L_{\omega})-t| \leqslant C(\rho_0,\varepsilon)\|\omega\|_2^{-\varepsilon}, \tag{10}$$

令 $A^*=\max\{A(\lambda_1),A(\lambda_2),A(c_1),A(c_2)\}$，从而得对任意 $v\in(0,1)$，$\varepsilon>0$，有

$$\|\Psi_{\omega}-\Psi\|_L \leqslant C(\rho_0,\varepsilon)[A(G)+A(g)+A(r)+A^*+1+\|P_{\kappa}\|_L]\|\omega\|_2^{\mu v(1-\varepsilon)}. \tag{11}$$

又由式(4)，(5)可得

$$\|\Psi_{\omega}-\Psi\|_L \leqslant C(\rho_0,\varepsilon)[C(\lambda)+C(\lambda,c)+A(r)+A^*+\|P_{\kappa}\|_L]\|\omega\|_2^{\mu v(1-\varepsilon)}.$$

因此，边值逆问题(Ⅱ)的一般解($\Phi_{\omega}(z)$，$\Psi(\xi)$)在 $\bar{\Omega}$ 上是稳定的.

参考文献：

[1] 章红梅，王传荣. Riemann 边值问题关于边界曲线的稳定性[J]. 福州大学学报：自然科学版，2001，29(1)：1-4.

[2] ZHANG Hong-mei，WANG Chuan-rong，ZHU Yuan-can. Stability of Hilbert boundary value problem under perturbation of the boundary curve [J]. J Math Anal Appl，2003，284(2)：601-617.

[3] LIN Juan，WANG Chuan-rong. Riemann boundary value problem with respect to the perturbation of boundary curve to be an open arc[J]. Acta Math Sci，2009，29B(5)：1481-1488.

[4] 林峰. Beurling-Ahlfors 扩张伸张函数在非光滑摄动下的稳定性[J]. 华侨大学学报：自然科学版，2011，32(2)：222-225.

[5] IOAKIMIDS N I，PERDIOS E A，PAPADAKIS K E. Numerical estimation of the coefficient of the homogeneous Riemann-Hilbert problem on the basis of boundary data[J]. Applied Mathematics and Computation，1991，41(1)：21-33.

[6] LI Xing. The inverse riemann boundary value jump problem[C]// Proceeding of the International Conference on Computation Engineering Science. Atlanta：Technology Publications，1992：19-28.

[7] LI Xing. A class of inverse Riemann boundary value problems[J]. J Math，1996，16(3)：303-306.

[8] 王明华. 一类 Riemann-Hilbert 边值逆问题[J]. 纯粹数学与应用数学，2006，12(22)：532-537.

[9] WANG Chuan-rong，ZHANG Hong-mei，ZHU Yuan-can. The riemann boundary value problem with respect to the perturbation of boundary curve [J]. Complex Variables and Elliptic Equations，2006，51(8)：631-845.

[10] 王小林，龚亚方. 一类奇异积分和 Cauchy 型积分关于积分曲线的稳定性[J]. 数学学报，1999，42(2)：343-350.

On Stability of Inverse Hilbert Boundary Value Problem with Respect to Path of Boundary

CHEN Hong-mei，LIN Feng

(School of Mathematical Sciences，Huaqiao University，Quanzhou 362021，China)

Abstract： Using the knowledge of conformal mapping theorem，we discuss the solvability of inverse Hilbert boundary value problem under the small perturbation of boundary curve. When the index of this problem is non-negative，the representations of the solutions are obtained. We also show the solutions are stable，and give the corresponding error estimates.

Keywords： inverse Hilbert boundary value problem；perturbation；stability；conformal transformation

（**责任编辑**：陈志贤　　**英文审校**：黄心中）