第35卷 第3期 华侨大学学报(自然科学版) Vol.35 No.3
2014年5月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) May 2014

文章编号:1000-5013(2014)03-0340-04 doi:10.11830/ISSN.1000-5013.2014.03.0340

一类非线性比式和问题的分支定界算法

杨金勇，宋海洲

(华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021)

摘要： 针对一类带有常系数的非线性比式和全局优化问题(P)，给出求解该问题的分支定界算法.首先，将问题(P)转化为问题(Q)，两者的变量个数和约束条件的个数相同.然后，利用不等式放缩的方法，建立问题(Q)的松弛线性规划，并结合分支定界算法求解.最后，在此基础上提出区域删减策略，并进行数值实验.结果表明：本算法和删减策略均是有效的.

关键词： 松弛线性规划；分支定界算法；区域删减策略；非线性比式和；全局优化

中图分类号： O 157 **文献标志码：** A

考虑如下非线性比式和全局优化问题：

$$\left.\begin{aligned}&\min\ \sum_{j=1}^{p} c_j\,\frac{f_{0,j}(\boldsymbol{x})}{g_{0,j}(\boldsymbol{x})},\\&\text{s.t.}\quad \sum_{k=1}^{p}\frac{f_{m,k}(\boldsymbol{x})}{g_{m,k}(\boldsymbol{x})}\leqslant 0,\qquad m=1,\cdots,M,\\&\qquad\ \boldsymbol{x}\in S=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n:0<\boldsymbol{l}\leqslant\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{u}\}.\end{aligned}\right\}\tag{P}$$

式中：$f_{0,j}(\boldsymbol{x})$，$g_{0,j}(\boldsymbol{x})$，$f_{m,k}(\boldsymbol{x})$，$g_{m,k}(\boldsymbol{x})$均为广义多元多项式，即$f_{0,j}(\boldsymbol{x})=\sum_{t=1}^{T_j^1}\alpha_{j,t}^1\prod_{i=1}^{n}x_i^{r_{j,t,i}^1}\geqslant 0$，$j=1,\cdots,p$；$g_{0,j}(\boldsymbol{x})=\sum_{t=1}^{T_j^2}\alpha_{j,t}^2\prod_{i=1}^{n}x_i^{r_{j,t,i}^2}>0$，$j=1,\cdots,p$；$f_{m,k}(\boldsymbol{x})=\sum_{t=1}^{T_{m,k}^3}\alpha_{m,k,t}^3\prod_{i=1}^{n}x_i^{r_{m,k,t,i}^3}$，$k=1,\cdots,q$；$m=1,\cdots,M$；$g_{m,k}(\boldsymbol{x})=\sum_{t=1}^{T_{m,k}^4}\alpha_{m,k,t}^4\prod_{i=1}^{n}x_i^{r_{m,k,t,i}^4}$，$k=1,\cdots,q$；$m=1,\cdots,M$. 其中：$c_j$，$\alpha_{j,t}^1$，$\alpha_{j,t}^2$，$\alpha_{m,k,t}^3$，$\alpha_{m,k,t}^4$为任意实数；$\gamma_{j,t,i}^1$，$\gamma_{j,t,i}^2$，$\gamma_{m,k,t,i}^3$，$\gamma_{m,k,t,i}^4$为任意有理数；$\boldsymbol{l}=(l_1,l_2,\cdots,l_n)^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)^{\mathrm{T}}$.

非线性比式和全局优化问题(P)广泛应用于经济、交通等领域. 目前，求解线性比式和问题的方法有很多[1].对于非线性比式和问题，当目标函数分子是正的凹函数和分母是正的凸函数时，文献[2-3]给出了一个解决该问题的全局优化算法，文献[4]提出了一个分子分母都是正的广义多元多项式比式和问题的全局最优方法，文献[5-9]给出了一个带有常系数的非线性比式和问题的几种全局最优化方法.本文求解一个带有常系数的非线性比式和问题(P).

1 全局优化问题的转化

对问题(P)的广义多元多项式进行通分、变量替换、合并同类项等操作，并转化为如下问题：

$$\left.\begin{aligned}&\min\ h(\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^{p} c_j\,\frac{n_j(\boldsymbol{x})}{d_j(\boldsymbol{x})},\\&\text{s.t.}\quad g_m(\boldsymbol{x})\leqslant 0,\qquad m=1,\cdots,M,\\&\qquad\ \boldsymbol{x}\in S=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n:0<\bar{\boldsymbol{l}}\leqslant\boldsymbol{x}\leqslant\bar{\boldsymbol{u}}\}.\end{aligned}\right\}\tag{Q}$$

收稿日期： 2012-11-06

通信作者： 宋海洲(1971-)，男，教授，主要从事数学模型的研究. E-mail：hzsong@hqu.edu.cn.

基金项目： 华侨大学科研基金资助项目(10HZR26)

式中：$n_j(\boldsymbol{x})=\sum_{t=1}^{T_j^1}\beta_{j,t}^1\prod_{i=1}^{n}x_i^{\eta_{j,t,i}^1}\geqslant 0$；$d_j(\boldsymbol{x})=\sum_{t=1}^{T_j^2}\beta_{j,t}^2\prod_{i=1}^{n}x_i^{\eta_{j,t,i}^2}>0$，$j=1,\cdots,p$；$g_m(\boldsymbol{x})=\sum_{t=1}^{T_m^3}\beta_{m,t}^3\prod_{i=1}^{n}x_i^{\eta_{m,t,i}^3}$，$m=1,\cdots,M$. c_j，$\beta_{j,t}^1$，$\beta_{j,t}^2$，$\beta_{m,t}^3$ 为任意实数；$\eta_{j,t,i}^1$，$\eta_{j,t,i}^2$，$\eta_{m,t,i}^3$ 为非负整数；$\bar{\boldsymbol{l}}=(\bar{l}_1,\bar{l}_2,\cdots,\bar{l}_n)^{\mathrm{T}}$；$\bar{\boldsymbol{u}}=(\bar{u}_1,\bar{u}_2,\cdots,\bar{u}_n)^{\mathrm{T}}$.

易知问题(P)和问题(Q)的变量个数和约束条件的个数相同.

2　多元多项式不等式放缩引理

引理 1　假设 $H_K(\boldsymbol{x})(K\geqslant 2)$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的 K 次多元多项式，对任意给定 $\boldsymbol{l}'\leqslant\boldsymbol{u}'$，存在一个 $\boldsymbol{x}$ 不超过 $K-1$ 次的多元多项式 $H_{K-1}^{(\boldsymbol{l}',\boldsymbol{u}')}(\boldsymbol{x})$，使得 $H_{K-1}^{(\boldsymbol{l}',\boldsymbol{u}')}(\boldsymbol{x})$ 满足 1）对任意满足 $\boldsymbol{l}'\leqslant\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{u}'$ 的 $\boldsymbol{x}$，有 $H_K(\boldsymbol{x})\geqslant H_{K-1}^{(\boldsymbol{l}',\boldsymbol{u}')}(\boldsymbol{x})$ 成立；2）对任意满足 $\boldsymbol{l}'\leqslant\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{u}'$ 的 $\boldsymbol{x}$，有 $|H_K(\boldsymbol{x})-H_{K-1}^{(\boldsymbol{l}',\boldsymbol{u}')}(\boldsymbol{x})|\to 0(\|\boldsymbol{u}'-\boldsymbol{l}'\|\to 0)$.

引理 2　假设 $H_K(\boldsymbol{x})(K\geqslant 2)$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的 K 次多元多项式，对任意给定 $\boldsymbol{l}'\leqslant\boldsymbol{u}'$，存在一个仿射函数 $H_1^{(\boldsymbol{l}',\boldsymbol{u}')}(\boldsymbol{x})$，使得 $H_1^{(\boldsymbol{l}',\boldsymbol{u}')}(\boldsymbol{x})$ 满足 1）对于任意满足 $\boldsymbol{l}'\leqslant\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{u}'$ 的 $\boldsymbol{x}$，有 $H_K(\boldsymbol{x})\geqslant H_1^{(\boldsymbol{l}',\boldsymbol{u}')}(\boldsymbol{x})$ 成立；2）对任意满足 $\boldsymbol{l}'\leqslant\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{u}'$ 的 $\boldsymbol{x}$，有 $|H_K(\boldsymbol{x})-H_1^{(\boldsymbol{l}',\boldsymbol{u}')}(\boldsymbol{x})|\to 0(\|\boldsymbol{u}'-\boldsymbol{l}'\|\to 0)$.

3　松弛规划及其对应的分支定界算法

假设 S^k 是 S 的任意子长方体，且 $S^k=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n:\boldsymbol{l}^k\leqslant\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{u}^k\}$，其中：$\boldsymbol{l}^k=(l_1^k,\cdots,l_n^k)^{\mathrm{T}}$，$\bar{\boldsymbol{u}}^k=(u_1^k,\cdots,u_n^k)^{\mathrm{T}}$. 则问题(Q)在 S^k 的子问题 $\mathrm{Q}(S^k)$ 为

$$\left.\begin{aligned}&\min\ h(\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^{p}c_j\frac{n_j(\boldsymbol{x})}{d_j(\boldsymbol{x})},\\&\text{s.t.}\quad g_m(\boldsymbol{x})\leqslant 0,\qquad m=1,\cdots,M,\\&\qquad\ \boldsymbol{x}\in S^k=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n:\boldsymbol{l}^k\leqslant\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{u}^k\}.\end{aligned}\right\}$$

对 $g_m(\boldsymbol{x})=\sum_{t=1}^{T_m^3}\beta_{m,t}^3\prod_{i=1}^{n}x_i^{\eta_{m,t,i}^3}$，$m=1,\cdots,M$，根据引理 2，对任意满足 $\boldsymbol{l}^k\leqslant\boldsymbol{u}^k$ 的 $\boldsymbol{l}^k$，$\boldsymbol{u}^k$，存在仿射函数 $L_m^k(\boldsymbol{x})=t_m^k\boldsymbol{x}+c_m^k$，使对任意满足 $\boldsymbol{l}^k\leqslant\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{u}^k$ 的 $\boldsymbol{x}$，有 $g_m(\boldsymbol{x})\geqslant L_m^k(\boldsymbol{x})$，$|g_m(\boldsymbol{x})-L_m^k(\boldsymbol{x})|\to 0(\|\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{l}^k\|\to 0)$. 对于目标函数 $h(\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^{p}c_j\frac{n_j(\boldsymbol{x})}{d_j(\boldsymbol{x})}$，根据引理 2，对任意满足 $\boldsymbol{l}^k\leqslant\boldsymbol{u}^k$ 的 $\boldsymbol{l}^k$，$\boldsymbol{u}^k$，存在仿射函数，使对任意满足 $\boldsymbol{l}^k\leqslant\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{u}^k$ 的 $\boldsymbol{x}$，有 $n_j(\boldsymbol{x})\geqslant L_{0,j}^k(\boldsymbol{x})$，$|n_j(\boldsymbol{x})-L_{0,j}^k(\boldsymbol{x})|\to 0(\|\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{l}^k\|\to 0)$.

构造下面式子，即

$$L_0^k(\boldsymbol{x})=\sum_{c_j>0}c_j\frac{L_0^k(\boldsymbol{x})}{M_j}+\sum_{c_j<0}c_j\frac{L_0^k(\boldsymbol{x})}{m_j}.$$

式中：当 $c_j>0$ 时，$M_j=\max\limits_{x\in S^k}d_j(\boldsymbol{x})$；当 $c_j<0$ 时，$m_j=\min\limits_{x\in S^k}d_j(\boldsymbol{x})$，则 $L_0^k(\boldsymbol{x})$ 为仿射函数，记 $L_0^k(\boldsymbol{x})=a_0^k\boldsymbol{x}+c_0^k$. 对任意满足 $\boldsymbol{l}^k\leqslant\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{u}^k$ 的 $\boldsymbol{x}$，有

$$h(\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^{p}c_j\frac{n_j(\boldsymbol{x})}{d_j(\boldsymbol{x})}\geqslant\sum_{c_j>0}c_j\frac{L_0^k(\boldsymbol{x})}{M_j}+\sum_{c_j<0}c_j\frac{L_0^k(\boldsymbol{x})}{m_j}=L_0^k(\boldsymbol{x}).$$

由 $|n_j(\boldsymbol{x})-L_{0,j}^k(\boldsymbol{x})|\to 0(\|\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{l}^k\|\to 0)$，可得 $|h(\boldsymbol{x})-L_0^k(\boldsymbol{x})|\to 0(\|\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{l}^k\|\to 0)$，从而得到问题 $\mathrm{Q}(S^k)$ 的松弛规划 $\mathrm{RQ}(S^k)$ 为

$$\left.\begin{aligned}&\min\ L_0^k(\boldsymbol{x}),\\&\text{s.t.}\quad L_m^k(\boldsymbol{x})\leqslant 0,\qquad m=1,\cdots,M,\\&\qquad\ \boldsymbol{x}\in S^k=\{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{l}^k\leqslant\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{u}^k\}.\end{aligned}\right\}$$

因为 L_0^k，L_m^k 都是仿射函数，故 $\mathrm{RQ}(S^k)$ 是一个线性规划. 显然，若问题 $\mathrm{Q}(S^k)$ 和 $\mathrm{RQ}(S^k)$ 的最优值分别为 $v(S^k)$ 和 $u(S^k)$，则 $v(S^k)\geqslant u(S^k)$.

下面给出求解问题(Q)的分支定界算法——算法 1.

步骤 1　给定参数 $\varepsilon\geqslant 0$，令迭代次数 $k=1$，可能存在全局最优解的长方体构成的集合为 $R_k=\{S\}$，

子长方体 $S^k=S$,初始上界 $v_k=\infty$,初始下界 $u_k=-\infty$,初始可行解集 $V=\varnothing$. 记问题(Q)可行域为 F. 求解问题 RQ(S^k),若该问题无可行解,则算法停止,原问题(Q)无解;否则,该问题 RQ(S^k)有最优解,记该问题的一个最优解为 x_k,更新下界 $u_k=L_0^k(x_k)$. 若 x_k 使问题(Q)可行,则更新上界 $v_k=h(x_k)$,更新可行解集 V. 若 $v_k-\mu_k\leqslant\varepsilon$,则算法停止,即 x_k 是问题(Q)的最优解,v_k 是最优值;否则,执行步骤 2.

步骤 2 采用矩形对分原则,即沿垂直于 S^k 的最长边方向将 S^k 平分成两部分 $S^{k_r}(r=1,2)$. $\forall r\in\{1,2\}$,求解问题 RQ(S^{k_r}),若该问题无解或 $S^{k_r}\cap F=\varnothing$,则删除 S^{k_r};若 $S^{k_r}\cap F\neq\varnothing$ 且该问题 RQ(S^{k_r})有解,设其一个最优解和相应的最优值分别为 x_{k_r} 和 $\mu(S^{k_r})$. 判断 $\mu(S^{k_r})$ 与 v_k 的大小,如果 $\mu(S^{k_r})>v_k$,删除 S^{k_r};否则,将 S^{k_r} 加入到集合 R_k 中,即 $R_k=R_k\cup\{S^{k_r}\}$. 如果 x_{k_r} 使问题(Q)可行,则更新上界,即令 $v_k=\min\{v_k,h(x_k)\}$. 在 R_k 中去掉根节点 S^k,即 $R_k=R_k-\{S^k\}$,定义 $\mu_k=\min\{\mu(S_x):S_x\in R_k\}$,选择 x_k 使得 $v_k=h(x_k)$.

步骤 3 令 $R_k=R_k-\{S_x\in R_k:v_k-\mu(S_x)\leqslant\varepsilon\}$,若 $R_k=\varnothing$,则算法停止;如果 $R_k=\varnothing$ 且 $V=\varnothing$,则问题(Q)无解;如果 $R_k=\varnothing$ 且 $V\neq\varnothing$,则 v_k 为问题(Q)的最优值,x_k 为其最优解;否则 $k=k+1$,选取盒子 S^k,使得 $\mu(S^k)=\mu^{k-1}$. 返回步骤 2.

4 区域删减策略及改进算法

为了加速寻找问题的全局最优解,对算法 1 进行改进. 即加入一种区域删减策略,通过该策略能整体删除或缩小算法迭代过程中产生的分割子区域,从而加速算法的收敛性.

对任意的 $x\in S^k=(S_j^k)_{n\times1}$,$S_j^k=[l_j^k,u_j^k](j=1,2,\cdots,n)$. 问题 RQ($S^k$)的目标函数为 $L_0^k(\boldsymbol{x})=a_0^k\boldsymbol{x}+c_0^k$,约束函数为 $L_m^k(\boldsymbol{x})=t_m^k\boldsymbol{x}+c_m^k$,$m=1,\cdots,M$. 设问题(Q)的当前上界为 UB,则令 $rC=\sum_{j=1}^{p}\min\{a_{0,j}^k l_j^k,a_{0,j}^k u_j^k\}+c_0^k$,$rL_m=\sum_{j=1}^{p}\min\{t_{m,j}^k l_j^k,t_{m,j}^k u_j^k\}+c_m^k$,$m=1,\cdots,M$. 可以建立如下区域删减策略.

策略 1(最优性策略) 计算 rC,如果 $rC>UB$,则删除 S^k;否则,如果 $a_{0,j}^k>0$,$\forall j\in\{1,2,\cdots,n\}$,则令 $u_j^k=\min\{u_j^k,\dfrac{UB-rC+a_{0,j}^k l_j^k}{a_{0,j}^k}\}$;如果 $a_{0,j}^k<0$,则令 $l_j^k=\max\{l_j^k,\dfrac{UB-rC+a_{0,j}^k u_j^k}{a_{0,j}^k}\}$.

策略 2(可行性策略) 计算 rL_m,如果 $rL_m>0$,则删除 S^k;否则,如果 $t_{m,j}^k>0$,$\forall j\in\{1,2,\cdots,n\}$,则令 $u_j^k=\min\{u_j^k,\dfrac{-rL_m+t_{m,j}^k l_j^k}{t_{m,j}^k}\}$;如果 $t_{m,j}^k<0$,则令 $l_j^k=\max\{l_j^k,\dfrac{-rL_m+t_{m,j}^k u_j^k}{t_{m,j}^k}\}$. 其中 $m=1,\cdots,M$.

下面给出算法 1 的改进算法——算法 2.

步骤 1 给定参数 $\varepsilon\geqslant0$,令迭代次数 $k=1$,可能存在全局最优解的长方体构成的集合为 $R_k=\{S\}$,子长方体 $S^k=S$,初始上界 $v_k=\infty$,初始下界 $u_k=-\infty$,初始可行解集 $V=\varnothing$. 记问题(Q)可行域为 F. 首先利用区域删减策略删减盒子 S^k. 若 $S^k=\varnothing$,则问题(Q)无解,算法停止;否则,求解问题 RQ(S^k). 其他过程同算法 1 的步骤 1.

步骤 2 采用矩形对分原则,即沿垂直于 S^k 的最长边方向将 S^k 平分成两部分 $S^{k_r}(r=1,2)$,$\forall r\in\{1,2\}$. 首先利用区域删减策略删减盒子 S^{k_r};若 $S^{k_r}=\varnothing$,再求解 RQ(S^{k_r}),其他过程同算法 1 的步骤 2.

步骤 3 同算法 1 的步骤 3.

5 算法收敛性分析

定理 1 假定问题(Q)的全局最优解存在,并给定参数 $\varepsilon=0$,那么算法 1 或者在有限步内求得问题(Q)的全局最优解,或者算法 1 产生的迭代序列的聚点必是问题(Q)的全局最优解;算法 2 或者在有限步内求得问题(Q)的全局最优解,或者算法 2 产生的迭代序列的聚点必是问题(Q)的全局最优解.

6 数值实验

为了验证文中算法,在 Pentium(R) 6 微机上用 MATLAB 7.1 进行数值实验,取 $\varepsilon=0.1$.

例 1　做随机实验检测算法的有效性，考虑如下问题：

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{p} \dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} Q_i \boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} P_i \boldsymbol{x}}, \\ \text{s. t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{m,j} x_j^2 + \tilde{\boldsymbol{d}}_m^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} \leqslant b_m, \quad m = 1,2,\cdots,M; \quad 1 \leqslant x_i \leqslant 2; \quad i = 1,2,\cdots,n, \\ \qquad b_m = (\sum_{j=1}^{n} a_{m,j} + \sum_{j=1}^{n} \tilde{\boldsymbol{d}}_{m,j}^{\mathrm{T}}) + r_m[(\sum_{j=1}^{n} 4a_{m,j} + \sum_{j=1}^{n} 2\tilde{\boldsymbol{d}}_{m,j}^{\mathrm{T}}) - (\sum_{j=1}^{n} a_{m,j} + \sum_{j=1}^{n} \tilde{\boldsymbol{d}}_{m,j}^{\mathrm{T}})]. \end{cases}$$

式中：n 表示变量的个数；M 表示约束的个数；p 表示目标函数分式项的个数；Q_i，P_i，$\boldsymbol{d}_i^{\mathrm{T}}$，$\tilde{\boldsymbol{d}}_m^{\mathrm{T}}$ 的所有元素是分别在[0,5]内随机选取的；$a_{m,j}$，r_m 的取值范围分别为[1,5]，[0,1]，$j=1,\cdots,n$；$m=1,\cdots,M$.

对于每组(n,M,p)，算法 1 和算法 2 分别随机运行 10 次，得到平均迭代次数(N_{av})和平均运行时间(t_{av})，如表 1 所示．从表 1 可知：对于随机问题，给出的两个算法均有效的，且加入删除策略的算法 2 在迭代次数和运行时间均优于算法 1.

表 1　例 1 的计算结果

Tab. 1　Calculation results of example 1

(n,M,p)	算法 1		算法 2	
	N_{av}	t_{av}/s	N_{av}	t_{av}/s
(2,2,2)	147.0	71.72	123.0	60.86
(2,3,5)	419.7	524.67	359.4	304.54
(2,5,10)	479.7	861.89	402.8	732.37

参考文献：

[1]　BENSON H P. On the global optimization of sums of linear fractional functions over a convex set[J]. Journal of Optimization Theory and Applications，2004，121(1)：19-39.

[2]　BENSON H P. Global optimization algorithm for the nunlinear sum of ratios problem[J]. Journal of Optimization Theory and Applications，2002，112(1)：1-29.

[3]　BENSON H P. Using concave envelopes to globally solve the nonlinear sum of ratios problem[J]. Journal of Gobal Optimization，2002，22(1/2/3/4)：343-364.

[4]　WANG Yan-jun，ZHANG Ke-cun. Global optimization of nonlinear sum of ratios problem[J]. Applied Mathematics and Computation，2004，158(2)：319-330.

[5]　申培萍. 全局优化方法[M]. 北京：科学出版社，2006：195-216.

[6]　申培萍，裴永刚，段运鹏. 一类非线性比式和问题的对偶界方法[J]. 河南师范大学学报：自然科学版，2008，36(3)：132-133.

[7]　李晓爱，郑凯，申培萍. 二次比式和问题的全局优化方法[J]. 河南师范大学学报：自然科学版，2009，37(4)：9-14.

[8]　申培萍，王俊华. 一类带反凸约束的非线性比式和问题的全局优化算法[J]，应用数学，2012，25(1)：126-130.

[9]　焦红伟，薛臻，申培萍. 一类线性比式和问题的全局优化算法[J]. 河南师范大学学报，2007，35(1)：17-18.

Branch and Bound Algorithm for a Class of Nonlinear Sum of Ratios Problem

YANG Jin-yong, SONG Hai-zhou

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract:　For a class nonlinear sum of ratios global optimization problem (P), the branch and bound algorithm is given. First of all, problem (P) will be transformed into problem (Q), so that the number of variables and the number of constrains of the two problems are equal. After that, by using the inequality sacling method, the relaxed linear programming about problem (Q) is established and combined with the branch and bound algorithm for solving. Last, based on these steps, region-deleting rules are put forward and numerical experiments are carried out. The result shows that the algorithm and the region-deleting rules are feasible.

Keywords:　relaxed linear programming; branch and bound; region-deleting rules; nonlinear sum of ratios; global optimization

(**责任编辑：**陈志贤　　**英文审校：**黄心中)