

应用类桁架模型的连续体拓扑优化方法

郑伟伟, 周克民

(华侨大学 土木工程学院, 福建 厦门 361021)

摘要: 为了避免棋盘格、单元铰接等数值不稳定现象,研究了基于类桁架模型的连续体拓扑优化方法.将单元节点处材料密度的大小和方向作为设计变量,采用满应力优化准则对材料密度大小进行优化.为了形成带孔洞的匀质连续体,对设计变量增加了上下限约束,剔除密度低于一定下限的节点,限制节点密度.算例结果表明:不需要进一步处理,就能从类桁架连续体中获得清晰的带孔板.

关键词: 结构优化; 拓扑优化; 类桁架材料; 应力约束; 平面连续体

中图分类号: TU 311.4

文献标志码: A

结构拓扑优化的研究包括均匀化方法^[1]、演化优化算法^[2]、水平集方法^[3]、ICM 法^[4]等.为了获得清晰的结构,抑制中间密度单元,这会引起了数值不稳定现象,如棋盘格现象^[5],需要格外的技术解决这个问题^[6-8].Michell^[9]揭示了拓扑优化结构是非均匀质各向异性类桁架连续体,即由无限密的杆件构成,这一特性启发了从类桁架连续体中获取最优拓扑的想法^[10-11].工程中更多地使用带孔等厚板,通过剔除密度小于一定值的节点形成孔洞.演化优化算法^[12-13]有采用过这种做法,但是由于演化优化算法采用的是各向同性材料,且设计变量为单元的密度,因此,该算法得到的结果会出现棋盘格现象且与网格密度有关.本文通过优化孔洞的分布形成带孔等厚板的优化算法,在优化迭代过程中逐步由类桁架连续体演化为带孔板,使优化结果更接近工程需要.

1 类桁架连续体材料模型

1.1 弹性矩阵

在类桁架连续体材料模型中,材料模型是由无限多的非均匀连续分布的杆件构成,假设任意点都是由两组正交的杆件构成,它们在任意点的密度用 t_1 和 t_2 表示.假设应力 σ_i 和应变 ϵ_i 的线性关系为

$$\sigma_i = E t_i \epsilon_i, \quad i = 1, 2. \quad (1)$$

式(1)中: E 是弹性模量.

在类桁架连续体中,相临的相互平行杆件之间没有相互作用.因此,泊松比应当假设为零,剪切刚度也应该为零.但是,如果没有剪切刚度,材料会不稳定,材料刚度矩阵将为奇异矩阵.基于此原因,假设剪切刚度大小为 $\frac{E(t_1+t_2)}{4}$,弹性矩阵表示为

$$\mathbf{D}(t_1, t_2, 0) = E \cdot \text{diag}[t_1, t_2, \frac{t_1+t_2}{4}]. \quad (2)$$

式(2)中: $\text{diag}[\cdot]$ 表示对角矩阵.

在这种假设下,当 $t_1=t_2$ 时,式(2)的各项为同性材料.若假设结构坐标轴到材料坐标轴的转角为 α ,那么结构坐标系中的弹性矩阵可由坐标转换矩阵获得,即

$$\mathbf{D}(t_1, t_2, \alpha) = \mathbf{T}^T(\alpha) \mathbf{D}(t_1, t_2, 0) \mathbf{T}(\alpha). \quad (3)$$

式(3)中: $\boldsymbol{T}(\alpha)$ 为坐标转换矩阵,即

$$\boldsymbol{T}(\alpha)=\begin{bmatrix}\cos^2\alpha & \sin^2\alpha & 0.5\sin 2\alpha \\ \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & -0.5\sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \sin 2\alpha & \cos 2\alpha\end{bmatrix}.\tag{4}$$

弹性矩阵(3)可以表示为

$$\boldsymbol{D}(t_1,t_2,\alpha)=E\sum_{b=1}^2t_b\sum_{r=1}^3s_{b,r}g_r(\alpha)\boldsymbol{A}_r.\tag{5}$$

式(5)中: $s_{b,r}$ 和 $g_r(\alpha)$ 分别为常数矩阵和函数矩阵分量, \boldsymbol{A}_r 为常数矩阵,有

$$\boldsymbol{s}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{g}(\alpha)=[\cos 2\alpha,\sin 2\alpha,1],$$
$$\boldsymbol{A}_1=\frac{1}{2}\text{diag}[1,-1,0],\quad \boldsymbol{A}_2=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_3=\frac{1}{2}\text{diag}[1,1,\frac{1}{2}].$$

节点 $j\ (j=1,2,\cdots,J)$ 处的杆件密度 $t_{1,j},t_{2,j}$ 和方向 α_j 作为设计变量, J 是节点的总数,设计变量节点 j 处的弹性矩阵可以表示为

$$\boldsymbol{D}_j=\boldsymbol{D}(t_{1,j},t_{2,j},\alpha_j).\tag{6}$$

有限元内部任意一点的弹性矩阵可以由该单元节点位置的弹性矩阵插值得到

$$\boldsymbol{D}_e(\xi,\eta)=\sum_{j\in S_e}N_j(\xi,\eta)\boldsymbol{D}_j=\sum_{j\in S_e}N_j(\xi,\eta)\boldsymbol{D}(t_{1,j},t_{2,j},\alpha_j).\tag{7}$$

式(7)中: $N_j(\xi,\eta)$ 是型函数; ξ,η 是局部坐标; S_e 是属于单元 e 的节点的集合.

将式(6)带入式(7),得到

$$\boldsymbol{D}_e=E\sum_{j\in S_e}N_j\sum_{r=1}^2t_{b,j}\sum_{b=1}^3s_{b,r}g_r(\alpha_j)\boldsymbol{A}_r.\tag{8}$$

1.2 刚度矩阵

将单元刚度矩阵(8)带入刚度矩阵,有

$$\boldsymbol{k}_e=\int_{V_e}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{D}_e\boldsymbol{B}\text{d}V.$$
$$\boldsymbol{k}_e=E\sum_{j\in S_e}\sum_b t_{b,j}\sum_{r=1}^3s_{b,r}g_r(\alpha_{b,j})\int_{V_e}N_j\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}_r\boldsymbol{B}\text{d}V=$$
$$\sum_{j\in S_e}\sum_b t_{b,j}\sum_{r=1}^3s_{b,r}g_r(\alpha_{b,j})\boldsymbol{H}_{e,j,r}.\tag{10}$$

式(10)中: $\boldsymbol{H}_{e,j,r}=E\int_{V_e}N_j\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}_r\boldsymbol{B}\text{d}V$ 是常数矩阵,与材料分布没有关系.如果采用规则单元,那么该矩阵在有限元计算之前就能计算出来.结构的总刚矩阵可以由所有单元的刚度矩阵累加得到,即

$$\boldsymbol{K}=\sum_e\boldsymbol{k}_e=\sum_e\sum_{j\in S_e}\sum_b t_{b,j}\sum_r s_{b,r}g_r(\alpha_{b,j})\boldsymbol{H}_{e,j,r}.\tag{11}$$

2 优化方法

将节点处的杆件密度和方向作为设计变量,材料的体积作为目标函数,每一节点施加应力约束,优化问题的列式为

$$\left.\begin{aligned}&\text{find } t_{b,j},\alpha_j, \\&\min V, \\&\text{s. t. } |\sigma_{b,j}|\leqslant\sigma_p,\quad b=1,2;\quad j=1,2,\cdots,J.\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

式(12)中: $\sigma_{b,j}$ 为节点处杆件 b 的应力; σ_p 为允许应力.

迭代过程有如下 5 个步骤.

步骤 1 设计域被划分为有限个单元,单元采用 4 节点矩形单元,杆件初始密度和方向设置为

$$t_{1,j}^0 = t_{2,j}^0 = 0.2, \quad \alpha_j^0 = 0,$$

上标 0 代表迭代次数, 初始密度剔除标准 t_c^0 设为 0;

步骤 2 通过有限元方法, 计算节点处的主应力方向和主应力方向上的应变的大小;

步骤 3 利用满应力准则, 优化杆件的密度, 杆件的方向与主应力的方向一致, 即

$$t_{b,j}^{i+1} = Et_{b,j}^i \epsilon_{b,j}^i / \sigma_p, \quad \alpha_j^{i+1} = \theta_j^i;$$

步骤 4 为了防止刚度矩阵奇异, 设置低于密度剔除标准 t_c^0 的杆件密度为 t_0 (这里取 10^{-6}), 而不是直接设置为 0, 高于平均密度 t_m^i 的杆件的密度将设置为

$$t_m^i, t_{b,j}^{i+1} = t_0, \quad \text{if } t_{b,j}^{i+1} < t_c^i, \quad t_{b,j}^{i+1} = \min(t_{b,j}^{i+1}, t_m^i);$$

步骤 5 密度剔除标准. 随迭代次数而增加, $t_c^{i+1} = t_c^i + \Delta t$, Δt 是密度剔除标准的增量.

通过大量的数值计算, 取 10^{-4} 比较合适. 太小则孔洞形成的较慢, 需要更多步的迭代; 太大则形成的拓扑与最优拓扑相差较大. 重复步骤 2~5, 直到没有密度的节点数占总节点数的 60%, 剔除材料比例可以由用户根据需要自行决定.

3 数值算例

运用文中的算法, 计算两个经典的算例, 两个算例中: 弹性模量 $E=210 \text{ GPa}$; 允许应力 $\sigma_p=160 \text{ MPa}$.

第 1 个算例是一个右端中点受集中荷载的悬臂梁, 尺寸如图 1 所示. 图 1 中: 厚度 (h) 为 0.01 m ; 设计域被划分为 64×40 矩形单元. 所有节点密度 (两个方向的杆件密度之和) 的等值线填充图, 如图 2, 3 所示. 图 2, 3 中: 等值线的间距为最大密度的 5%. 图 2 是迭代 31 次后的结果, 设计域开始出现一些孔. 图 3 是迭代 62 次后的结果, 孔不断扩展、溶合, 结构拓扑趋于简单.

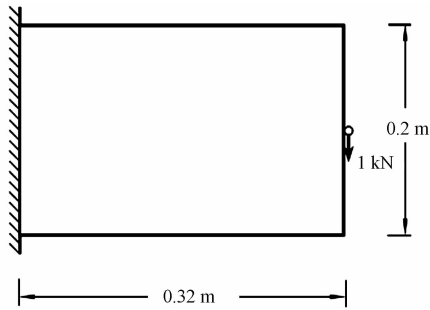


图 1 悬臂梁尺寸

Fig. 1 Dimension of cantilever beam

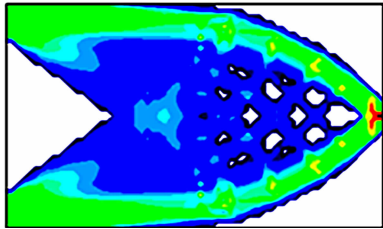


图 2 迭代 31 次后的密度等值线图

Fig. 2 Isogram of density after 31 iterations

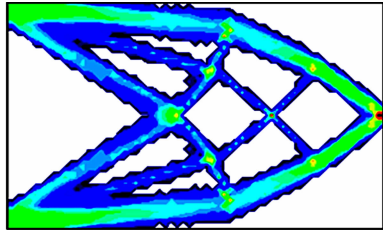


图 3 迭代 62 次后的密度等值线图

Fig. 3 Isogram of density after 62 iterations

大部分区域的密度分布较均匀, 只有支座和荷载作用点附近区域密度较大, 但没有出现严重的应力集中现象. 体积比的定义为优化后结构总体积占初始体积的百分比. 体积比 (R_v) 和保留的节点数百分比 (R_n) 随着迭代次数 (N) 的变化曲线, 如图 4 所示.

从图 4 可知: 由于荷载比较小, 优化后纤维密度较初始密度小很多, 优化后的体积只占初始体积很小一部分. 保留的节点百分比指密度大于临界值 (这里取 $2t_0$) 的节点占总节点数的百分比, 反映了类桁架连续体演化为带孔板的进程, 当其等于 40% 时, 迭代停止. 满应力优化准则可以在少量的迭代下使结构体积达到最小, 通过密度限值约束, 去除小密度杆件, 结构离散得越来越简单, 但体积只增加了一点.

第 2 个算例是跨中受集中荷载的简支梁, 尺寸如图 5 所示. 图 5 中: 厚度 (h) 为 0.01 m ; 设计域被矩形单元划分为 60×40 .

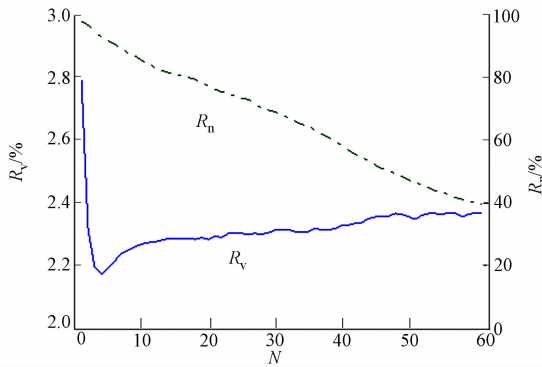


图 4 体积比及节点数比的变化

Fig. 4 Variation of volume ratio and nodes ratio

未经密度限值约束迭代 100 次得到的优化结果,如图 6 所示.图 6 中:为了使荷载集中点的密度不至于大其他区域的密度太多倍,仍施加了密度上限为平均密度的约束.从图 6 可知:未经密度限值约束的优化结果形成连续材料场,而不能形成杆件.

增加密度限值约束后迭代 56 次的结果,如图 7 所示.对比图 6,7 可以看出:增加密度限值约束后,在设计域的中间部分形成了几根杆件,而且与圆拱的密度基本一致,比较均匀.

体积比和保留节点数百分比这两项指标随迭代次数的

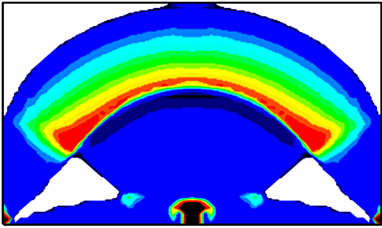


图 6 没有密度限值约束的优化结果

Fig. 6 Optimal result without density restriction

变化,及施加密度限值约束前后的对比,如图 8 所示.从图 8 可知:施加密度限值约束后的体积比会比施加前稍微大一些,且体积比会随着迭代次数逐步提高;对比施加密度限值约束前后节点数比,非零密度(大于 $2t_0$) 节点比在施加密度限值约束后比施加前减少快很多.随着迭代次数的变化线形,这一指标决定于密度剔除标准的确定方法,因此,可以通过改变密度剔除标准的函数形式(线性或非线性)来控制类桁架连续体向带孔板演化的过程.

4 结束语

研究了基于类桁架连续体材料模型的带孔板拓扑优化方法,通过在每一迭代步中剔除小于一定值的密度形成孔洞,限定大于一定值的密度达到密度均匀的目的,最终得到带孔板.下一步工作是对连续体施加最小宽度的约束,从而可以得到孔数量不同的连续体拓扑优化结果.

参考文献:

[1] BENDSØE M P, KIKUCHI N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method [J]. Comput Methods Appl Mech Eng, 1988, 71(2): 197-224.

[2] XIE Yin-min, STEVEN G P. A simple evolutionary procedure for structural optimization[J]. Comput Struct, 1993, 49(5): 885-896.

[3] SETHIAN J A, WIEGMANN A. Structural boundary design via level set and immersed interface methods[J]. J Comput Phys, 1999, 163(2): 489-528.

[4] 隋允康, 彭细荣. 结构拓扑优化 ICM 方法的改善[J]. 力学学报, 2005, 37(2): 190-198.

[5] SIGMUND O. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima[J]. Struct Optim, 1998, 16(1): 68-75.

[6] HABER R B, JOG C S, BENDSØE M P. A new approach to variable-topology design using a constraint on the per-

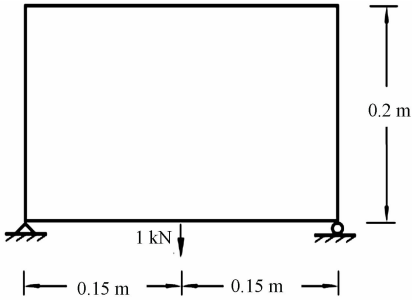


图 5 简支梁尺寸

Fig. 5 Dimension of simply supported beam

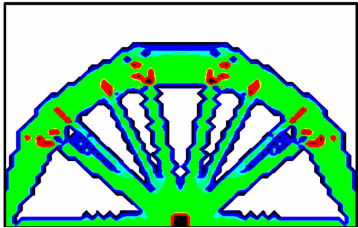


图 7 经密度限值约束的优化结果

Fig. 7 Optimal result with density restriction

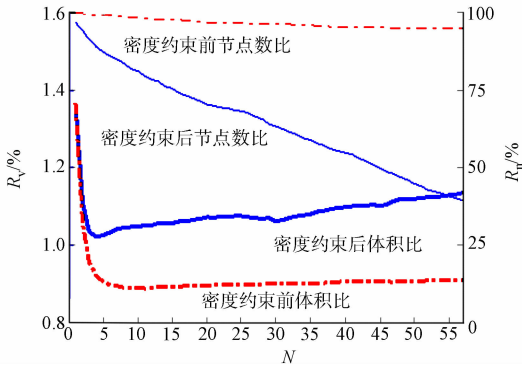


图 8 施加密度限值约束前后指标变化及对比

Fig. 8 Indexes variation and contrast before and after density restriction

imeter[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization,1996,11(1):1-12.

[7] PETERSSON J, SIGMUND O. Slope constrained topology optimization[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering,1998,41(8):1417-1434.

[8] Sigmund O. Materials with prescribed constitutive parameters: An inverse homogenization problem[J]. International Journal of Solids and Structures,1994,31(17):2313-2329.

[9] MICHELL A G M. The limits of economy of material in frame structure[J]. Phil Mag,1904,8(6):589-597.

[10] ZHOU Ke-ming, LI Xia. Topology optimization of structures under multiple load cases using a fiber-reinforced composite material model[J]. Comput Mech,2005,38(2):163-170.

[11] ZHOU Ke-ming, LI Xia. Topology optimization for minimum compliance under multiple loads based on continuous distribution of members[J]. Struct Multidisc Optim,2008,37(1):49-56.

[12] XIE Yin-min, STEVEN G P. Optimal design of multiple load case structures using an evolutionary procedure[J]. Engineering Computations,1994,11(4):295-302.

[13] CHU D N, XIE Yin-min, HIRA A, et al. Evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraints[J]. Finite Elements in Analysis and Design,1996,21(4):239-251.

Continuum Topology Optimization Based on Truss-Like Model

ZHENG Wei-wei, ZHOU Ke-min

(College of Civil Engineering, Huaqiao University, Xiamen 361021, China)

Abstract: In order to apply the truss-like model in the topology optimization of continuum and to avoid some numerical instability phenomenon like checkerboard and elements hinge, the topology optimization method of continuum based on truss-like model was investigated. The densities and orientations of material at nodes were taken as design variables. The densities of material were optimized by fully-stressed criteria. In order to form homogenous continuum with holes, the material with densities below the given critical value was removed, densities above upper limit are limited. Numerical examples show that plate with distinct holes can be obtained from the truss-like continua without further process.

Keywords: topology optimization; structural optimization; truss-like material; stress constraint; planar continuum

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 方德平)